



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

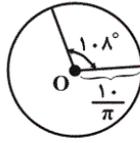
[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، رادیان - ۲ سوال -

۶۶- طول کمان کوچک تر روبرو به زاویه O چقدر است؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۱۲

۷۰- حاصل عبارت $\frac{[\cos 1] + [\cos 2]}{[\sin 3] - [\tan 1]}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

حسابان ۱، نسبت های مثلثاتی برخی زوایا - ۷ سوال

۷۱- اگر $A = \cos^2 \frac{5\pi}{26} + \cos^2 \frac{6\pi}{26} + \cos^2 \frac{7\pi}{26} + \cos^2 \frac{8\pi}{26}$ ، حاصل $\sin(\frac{7A\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۷۲- حاصل عددی عبارت $\cos \frac{3\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{8\pi}{16} + \cos \frac{11\pi}{16} + \cos \frac{13\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۷۳- هرگاه $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل کسر $\frac{3 \sin(75^\circ) + 2 \sin(105^\circ)}{\cos(-15^\circ) - \cos(105^\circ)}$ بر حسب a برابر است با:

- (۱) $\frac{5}{1+a}$ (۲) $\frac{5}{1-a}$ (۳) $\frac{1+a}{5}$ (۴) $\frac{1-a}{5}$

۷۴- مقدار عبارت $B = \sin(\pi \cos(\frac{16\pi}{3})) - \tan(\pi \cot(\frac{171\pi}{4}))$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

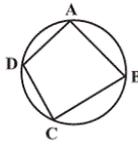
۶۷- نقطه P به مختصات $(1, 0)$ را چند رادیان در جهت حرکت عقربه‌های ساعت نسبت به مبدأ مختصات دوران دهیم تا برای اولین بار به

نقطه $P'(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ برسد؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{6}$ (۴) $\frac{7\pi}{6}$

۶۸- از به هم وصل کردن انتهای کمان‌های $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3}$ روی دایره مثلثاتی مثلثی تشکیل می‌شود. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



۶۹- در چهارضلعی شکل مقابل، کدام یک از روابط زیر همواره برقرار است؟ ($\hat{A} \neq \hat{C}$)

- (۱) $\sin \hat{A} = \sin \hat{C}$ (۲) $\cos \hat{A} = \cos \hat{C}$
 (۳) $\sin \hat{A} = \cos \hat{C}$ (۴) $\cos \hat{A} = \sin \hat{C}$

حسابان ۱، توابع مثلثاتی - ۵ سوال

۷۵- تابع $y = \sin x$ با کدام دامنه، تابعی یک به یک است؟

- (۱) $(\pi, \frac{5\pi}{3})$ (۲) $(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$ (۳) $(3\pi, 4\pi)$ (۴) $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$

۷۶- نمودار کدام یک از توابع زیر بر نمودار تابع $y = \sin(-x + \frac{\pi}{4})$ منطبق است؟

- (۱) $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ (۲) $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$
 (۳) $y = \frac{1}{2} \sin(-2x + \frac{\pi}{2})$ (۴) $y = -\frac{1}{2} \sin(-2x + \frac{\pi}{2})$

۷۷- نمودار تابع $y = \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \cos^2 x}$ در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۷۹- با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ ، چند x در بازه $(-\frac{3\pi}{2}, 4\pi)$ می‌توان یافت که $\cos x = \frac{1}{3}$ باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۸۰- قدرمطلق اختلاف بین کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = \sin^2 x - \sin x + 1$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{7}{2}$

حسابان ۱، ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی - ۶ سوال -

۷۸- دامنه تابع $y = \log(2^x - 3)$ کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(\log_2^3, +\infty)$ (۳) $(\log_2^2, +\infty)$ (۴) $(0, 1)$

۶۱- اگر $\log_2^A = 5$ باشد، حاصل $\log_4^{(2A)}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴) ۳/۵

۶۲- اگر $3 - \log x = 2\sqrt{\log x}$ ، آن گاه حاصل $\log_{x-7}^{2(x-1)}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۳- اگر $2^x = 3^{2-x}$ ، حاصل $\frac{2x}{x + 2\log_6^4}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) \log_{12}^6 (۳) \log_{12}^9 (۴) \log_{18}^9

۶۴- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱) نمودار دو تابع $y = 4^x$ و $y = \frac{1}{4}\log_2 x$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.

(۲) برد تابع $y = 2^x - 1$ برابر با $(-1, +\infty)$ است.

(۳) اگر $0 < a < 1$ باشد، آن گاه $\log_a(a+1) < 0$.

(۴) برد تابع $y = \log_3 x$ ، مجموعه اعداد حقیقی است.

۶۵- نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۲۰ دقیقه است. اگر ۲۵۶ میلی‌گرم از این ماده را در اختیار داشته باشیم، پس از گذشت ۲ ساعت، چند میلی‌گرم از آن باقی می‌ماند؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴) ۱

هندسه ۲، تبدیل های هندسی - ۸ سوال -

۱۰۱- در تجانس به مرکز O و نسبت k ، کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

(۱) اگر $k > 0$ ، تجانس را تجانس مستقیم می‌نامیم.

(۲) اگر $k < 0$ ، تجانس را تجانس معکوس می‌نامیم.

(۳) اگر $k < -1$ ، تصویر شکل کوچک تر می‌شود.

(۴) اگر $k > 1$ ، تصویر شکل بزرگ تر می‌شود.

۱۰۲- قاعده کوچک دوزنقه متساوی الساقین تحت چه تبدیلی می‌تواند بر قاعده بزرگ آن تصویر شود؟

- (۱) تجانس (۲) دوران (۳) انتقال (۴) بازتاب

۱۰۳- دایره $C(O, R)$ را با بردار انتقالی به طول ۱۰، انتقال می‌دهیم. اگر $C'(O', 3)$ تصویر دایره C باشد، دورترین فاصله بین نقاط دو دایره کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۶ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۰۴- مستطیل ABCD به طول و عرض ۴ و ۳ واحد را با بردار انتقالی در راستای قطر DB و به اندازه ۳ واحد، انتقال می‌دهیم تا مستطیل A'B'C'D' به وجود آید. مساحت ناحیه مشترک بین مستطیل ABCD و تصویرش کدام است؟
 (۱) ۴/۸ (۲) ۳/۸۴ (۳) ۲/۴ (۴) ۱/۹۲

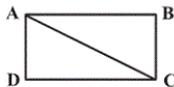
۱۰۵- نقطه M' تصویر نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس ۴/۳ است. اگر نقطه M' تصویر نقطه O در تجانس به مرکز M باشد، نسبت تجانس کدام است؟

- (۱) ۱/۳ (۲) -۱/۳ (۳) ۲/۳ (۴) -۲/۳

۱۰۶- اگر دایره C'(O', ۳) مجانس دایره C(O, ۴) در تجانس مستقیم به مرکز M و MO = ۲° باشد، اندازه وتر مشترک دو دایره C و C' کدام است؟
 (۱) ۲/۴ (۲) ۳/۶ (۳) ۴/۸ (۴) ۶

۱۰۹- چهارضلعی محدب ABCD با مساحت ۵۴ واحد مفروض است. هرگاه AB'C'D' مجانس این چهارضلعی به مرکز A و نسبت تجانس ۱/۳ باشد، مساحت ناحیه محصور بین دو چهارضلعی کدام است؟
 (۱) ۲۷ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴) ۴۸

۱۱۰- در شکل زیر در مستطیل ABCD، BC = √۳ و BAC = ۳° است. اگر این مستطیل را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حول نقطه A به اندازه ۶° دوران دهیم، مساحت ناحیه مشترک بین مستطیل ABCD و تصویر آن تحت این دوران کدام است؟

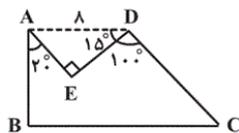


- (۱) √۳ (۲) ۱ (۳) √۳ (۴) ۲

هندسه ۲، کاربرد تبدیل ها - ۲ سوال -

۱۰۷- مجانس نقطه A(۳, ۴) با نسبت تجانس k = ۲ و به مرکز O(-۱, ۲) کدام است؟
 (۱) (۶, ۷) (۲) (۵, ۱۰) (۳) (۷, ۶) (۴) (۱۰, ۵)

۱۰۸- اگر بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چندضلعی ABCDE، مساحت آن را افزایش دهیم، مساحت شکل جدید چقدر بیشتر از مساحت شکل اولیه است؟



- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) ۲

حسابان ۱- سوالات موازی، رادیان - ۸ سوال -

۹۲- طول کمان کوچک تر روبرو به زاویه O چقدر است؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۹۴- اندازه یک کمان برحسب رادیان برابر است با حاصل تقسیم عدد 5π بر اندازه آن کمان برحسب درجه. اندازه این کمان برحسب رادیان کدام است؟ (انتهای کمان در ناحیه اول است).

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{7}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۹۵- در دایره‌ای به قطر π ، طول کمان روبه‌رو به زاویه 60° کدام است؟

- (۱) 30π (۲) $\frac{\pi^2}{6}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{\pi^2}{3}$

۹۶- حاصل عبارت $\frac{[\cos 1] + [\cos 2]}{[\sin 3] - [\tan 1]}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۹۷- کدام مقایسه زیر صحیح است؟

- (۱) $\cos 2 > \cos 1$ (۲) $\cos 3 > \cos 2$
(۳) $\cos 5 > \cos 4$ (۴) $\cos 5 > \cos 6$

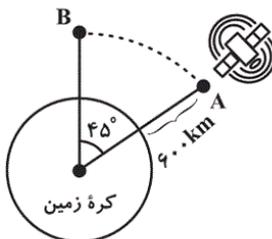
۹۸- انتهای کدام یک از زوایای زیر بر انتهای زاویه 120° در دایره مثلثاتی منطبق است؟

- (۱) $\frac{11\pi}{3}$ (۲) $\frac{100\pi}{3}$ (۳) $-\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۴) $3\pi - \frac{\pi}{3}$

۹۹- در یک پیست دوچرخه سواری به شکل دایره، فاصله دوچرخه سوار از مرکز پیست ۶ متر است. وقتی که دوچرخه سوار مسافت ۱۰ متر را طی می‌کند، چه زاویه‌ای را نسبت به مرکز پیست بر حسب درجه طی کرده است؟

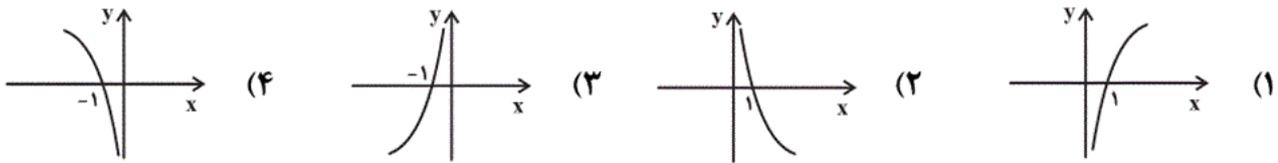
- (۱) $\frac{300}{\pi}$ (۲) $\frac{400}{\pi}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۱۰۰- مطابق شکل زیر، ماهواره‌ای در یک مسیر دایره‌ای در فاصله ۶۰۰ کیلومتری از سطح کره زمین در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در حرکت است. اگر ماهواره در هر ساعت مسافت 10π کیلومتر را طی کند، حداقل چند ساعت طول می‌کشد تا از نقطه A به B برسد؟ (شعاع کره زمین ۶۴۰۰ km است).



- (۱) ۱۶۵
(۲) ۱۵۵
(۳) ۱۷۰
(۴) ۱۷۵

۸۲- نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، به کدام صورت زیر است؟



حسابان - سوالات موازی، ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی - سوال ۱۱ -

۸۳- حاصل عبارت زیر کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

$$[\log_2 \log_2^3] + [\log_2 \log_2^4] + [\log_2 \log_2^5] + \dots + [\log_2 \log_2^n]$$

(۴) ۷

(۳) ۱۰

(۲) ۶

(۱) ۹

۸۴- اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله $x^2 - (2m+1)x - 3 = 0$ باشند و $\log ab - \log a \log b = -\frac{1}{3}m$ ، مقدار m کدام است؟

(۴) $\frac{15}{4}$

(۳) $\frac{21}{8}$

(۲) $-\frac{12}{7}$

(۱) $\frac{6}{5}$

۸۵- اگر $3 - \log x = 2\sqrt{\log x}$ ، آن‌گاه حاصل $\log_{x-7}^{3(x-1)}$ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۸۶- اگر $\log 2 = a$ و $\log 7 = b$ باشد، مقدار $\log 0.35$ کدام است؟

(۴) $b + a - 1$

(۳) $b - a - 1$

(۲) $b + a - 2$

(۱) $b - a - 2$

۸۷- جواب معادله $x + \log_{15}^{(3^x + \sqrt{2})} = 2 \log_{15}^2 + x \log_{15}^5$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2} \log_2^3$

(۳) $\frac{3}{2} \log_3^2$

(۲) $\frac{1}{2} \log_2^3$

(۱) $\frac{1}{2} \log_3^2$

۸۸- اگر $2^x = 3^{2-x}$ ، حاصل $\frac{2x}{x + 2 \log_6^4}$ کدام است؟

(۴) \log_{18}^9

(۳) \log_{12}^9

(۲) \log_{12}^6

(۱) ۱

۸۹- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱) نمودار دو تابع $y = 4^x$ و $y = \frac{1}{4} \log_4 x$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.

(۲) برد تابع $y = 2^x - 1$ برابر با $[-1, +\infty)$ است.

(۳) اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه $\log_a(a+1) < 0$.

(۴) برد تابع $y = \log_3 x$ ، مجموعه اعداد حقیقی است.

۹۰- وارون تابع $f(x) = a + \log_3(bx + 1)$ از دو نقطه $A(3, 1)$ و $B(5, 13)$ عبور می‌کند. مقدار b کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۱- نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو 2^0 دقیقه است. اگر 256 میلی‌گرم از این ماده را در اختیار داشته باشیم، پس از گذشت 2 ساعت، چند میلی‌گرم از آن باقی می‌ماند؟

- ۱ (۴) ۴ (۳) ۱۶ (۲) ۶۴ (۱)

۹۳- اگر $x > 0$ و $x^2 > 2^x$ در بازه (a, b) برقرار باشد، حداکثر مقدار عبارت $\log_8 \sqrt{b-a}$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۱/۴ (۳) ۱/۳ (۲) ۱/۶ (۱)

۸۱- اگر $\log_2^A = 5$ باشد، حاصل $\log_4^{(2A)}$ کدام است؟

- ۳/۵ (۴) ۳ (۳) ۲/۵ (۲) ۲ (۱)

هندسه ۲- سوالات موازی، تبدیل های هندسی - ۱۰ سوال

۱۱۱- در تجانس به مرکز O و نسبت k ، کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) اگر $k > 0$ ، تجانس را تجانس مستقیم می‌نامیم.
 (۲) اگر $k < 0$ ، تجانس را تجانس معکوس می‌نامیم.
 (۳) اگر $k < -1$ ، تصویر شکل کوچک تر می‌شود.
 (۴) اگر $k > 1$ ، تصویر شکل بزرگ تر می‌شود.

۱۱۲- قاعده کوچک دوزنقه متساوی الساقین تحت چه تبدیلی می‌تواند بر قاعده بزرگ آن تصویر شود؟

- تجانس (۱) دوران (۲) انتقال (۳) بازتاب (۴)

۱۱۳- دایره $C(O, R)$ را با بردار انتقالی به طول 10 ، انتقال می‌دهیم. اگر $C'(O', 3)$ تصویر دایره C باشد، دورترین فاصله بین نقاط دو دایره کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۶ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴)

۱۱۴- مستطیل $ABCD$ به طول و عرض 4 و 3 واحد را با بردار انتقالی در راستای قطر BD و به اندازه 3 واحد، انتقال می‌دهیم تا مستطیل $A'B'C'D'$ به وجود آید. مساحت ناحیه مشترک بین مستطیل $ABCD$ و تصویرش کدام است؟

- ۴/۸ (۱) ۳/۸۴ (۲) ۲/۴ (۳) ۱/۹۲ (۴)

۱۱۵- نقطه M' تصویر نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{4}{3}$ است. اگر نقطه M' تصویر نقطه O در تجانس به مرکز M باشد،

نسبت تجانس کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۱۱۶- اگر دایره $C'(O', 3)$ مجانس دایره $C(O, 4)$ در تجانس مستقیم به مرکز M باشد و داشته باشیم $MO = 2^\circ$ ، آن گاه اندازه وتر مشترک دو دایره C و C' کدام است؟

- (۱) $2/4$ (۲) $3/6$ (۳) $4/8$ (۴) 6

۱۱۷- کدام تبدیل غیرهمانی زیر، نقطه ثابت ندارد؟

- (۱) دوران (۲) تجانس (۳) بازتاب (۴) انتقال

۱۱۸- مجانس نقطه $A(3, 4)$ با نسبت تجانس $k = 2$ و به مرکز $O(-1, 2)$ کدام است؟

- (۱) $(6, 7)$ (۲) $(5, 10)$ (۳) $(7, 6)$ (۴) $(10, 5)$

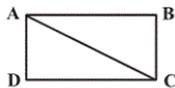
۱۱۹- چهارضلعی محدب $ABCD$ با مساحت 54 واحد مفروض است. هرگاه $AB'C'D'$ مجانس این چهارضلعی به مرکز A و نسبت

تجانس $\frac{1}{3}$ باشد، مساحت ناحیه محصور بین دو چهارضلعی کدام است؟

- (۱) 27 (۲) 36 (۳) 42 (۴) 48

۱۲۰- در شکل زیر در مستطیل $ABCD$ ، $BC = \sqrt{3}$ و $\hat{BAC} = 30^\circ$ است. اگر این مستطیل را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت

حول نقطه A به اندازه 60° دوران دهیم، مساحت ناحیه مشترک بین مستطیل $ABCD$ و تصویر آن تحت این دوران کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) 1 (۳) $\sqrt{3}$ (۴) 2

آمار و احتمال، احتمال شرطی - ۶ سوال

۱۲۲- جعبه‌ای محتوی ۳ مهره آبی، ۵ مهره سبز و ۲ مهره زرد است. سه مهره را به ترتیب و بدون جای‌گذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که مهره اول سبز و دو مهره دیگر آبی یا مهره اول زرد و دو مهره دیگر سبز باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{7}{72}$ (۲) $\frac{19}{200}$ (۳) $\frac{19}{450}$ (۴) $\frac{7}{120}$

۱۲۳- در یک پانسیون مطالعاتی ۶۰ درصد دانش‌آموزان دختر و ۴۰ درصد دانش‌آموزان پسر هستند. احتمال این‌که دانش‌آموز پسر درس آمار و احتمال را در یک روز مشخص مطالعه کند برابر $\frac{3}{10}$ و برای دختران این احتمال $\frac{4}{10}$ است. اگر فردی از این پانسیون انتخاب کنیم، با چه احتمالی در آن روز آمار و احتمال مطالعه نمی‌کند؟

- (۱) $0/36$ (۲) $0/44$ (۳) $0/56$ (۴) $0/64$

۱۲۴- دو ظرف داریم که اولی شامل ۳ مهره قرمز و ۵ مهره آبی و دومی شامل ۱ مهره قرمز و ۳ مهره آبی است. ۳ مهره به تصادف از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم و سپس مهره‌ای به تصادف از ظرف دوم خارج می‌کنیم. با چه احتمالی مهره خارج شده از ظرف دوم قرمز است؟

- (۱) $\frac{13}{35}$ (۲) $\frac{15}{56}$ (۳) $\frac{17}{56}$ (۴) $\frac{19}{56}$

۱۲۶- ۴۰ درصد دانش‌آموزان پایه یازدهم دبیرستانی رشته ریاضی و بقیه رشته تجربی هستند. ۲۵ درصد دانش‌آموزان رشته ریاضی و ۳۰ درصد دانش‌آموزان رشته تجربی در درس فیزیک نمره بالای ۱۸ گرفته‌اند. یکی از دانش‌آموزان پایه یازدهم این دبیرستان را به تصادف انتخاب کرده و مشاهده می‌کنیم که نمره فیزیک او بالای ۱۸ است. با چه احتمالی این فرد دانش‌آموز رشته ریاضی است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{3}{7}$

۱۲۸- سکه سالمی را چهار مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم لاقل یک بار سکه رو ظاهر شده، احتمال این که دقیقاً ۲ بار سکه رو آمده باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۹- دسته‌ای کارت شامل ۳ کارت دو رو قرمز، ۵ کارت یک رو قرمز، یک رو آبی و ۴ کارت دو رو آبی است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم. اگر روی مشاهده شده این کارت قرمز باشد، با کدام احتمال روی دیگر کارت نیز قرمز است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{11}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{6}{11}$

آمار و احتمال ، پیشامدهای مستقل و وابسته - ۴ سوال

۱۳۰- اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر و $P(A \cup B) = 2P(B) = 0.4$ باشد، حاصل $P(A' - B')$ کدام است؟

- (۱) 0.1 (۲) 0.15 (۳) 0.2 (۴) 0.25

۱۳۱- بر روی تاسی اعداد ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳ حک شده است. این تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده برابر ۴ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{18}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۱۳۲- احتمال بهبودی افرادی که به نوعی بیماری مبتلا هستند 0.1 است. احتمال این که از بین ۵ نفر مبتلا به این بیماری، لاقل یک نفر بهبود یابد، کدام است؟

- (۱) $(0.1)^5$ (۲) $(0.9)^5$ (۳) $1 - (0.1)^5$ (۴) $1 - (0.9)^5$

۱۳۳- احتمال قبول شدن علی و رضا در امتحان ریاضی به ترتیب برابر 0.6 و 0.7 است. با چه احتمالی حداقل یک نفر از آن‌ها در امتحان ریاضی قبول می‌شود؟

- (۱) 0.84 (۲) 0.88 (۳) 0.86 (۴) 0.82

-۶۶

(علی شهبازی)

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{108^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3}{5}\pi$$

$$l = r\theta = \frac{10}{\pi} \times \frac{3\pi}{5} = 6$$

(مسابقه ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲

۱

-۷۰

(امیر هوشنگ فمسه)

با توجه به رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ و قرار دادن $R = 1$ مشخص می‌شود که ۱

رادیان تقریباً $3^\circ / 57^\circ$ درجه است. کسینوس در ناحیه اول بین صفر و یک است، پس:

$$0 < \cos 1 \approx \cos 57^\circ < 1 \Rightarrow [\cos 1] = 0$$

۲ رادیان تقریباً برابر با $6^\circ / 114^\circ$ بوده و انتهای کمان آن در ناحیه دوم است و کسینوس در ناحیه دوم بین صفر و -۱ است. پس:

$$-1 < \cos 2 < 0 \Rightarrow [\cos 2] = -1$$

۴

۳

۲

۱

-۷۱

(مهاویش نیکنام)

با توجه به این که دو زاویه $\frac{8\pi}{26}$ و $\frac{5\pi}{26}$ متمم هستند، پس داریم:

$$\cos^2 \frac{5\pi}{26} + \cos^2 \frac{8\pi}{26} = \cos^2 \frac{5\pi}{26} + \sin^2 \frac{5\pi}{26} = 1$$

و با همین استدلال داریم:

$$\cos^2 \frac{7\pi}{26} + \cos^2 \frac{6\pi}{26} = \cos^2 \frac{7\pi}{26} + \sin^2 \frac{7\pi}{26} = 1$$

پس: $A = 2$

$$\sin \frac{7A\pi}{6} = \sin \frac{14\pi}{6} = \sin \frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسابقه ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱

-۷۲

(علی کردی)

$$\frac{3\pi}{16} + \frac{13\pi}{16} = \pi \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{16} = -\cos \frac{13\pi}{16} \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{16} + \cos \frac{13\pi}{16} = 0$$

به طور مشابه داریم:

$$\frac{5\pi}{16} + \frac{11\pi}{16} = \pi \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{16} = -\cos \frac{11\pi}{16} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{11\pi}{16} = 0$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & \cos \frac{3\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{8\pi}{16} + \cos \frac{11\pi}{16} + \cos \frac{13\pi}{16} \\ &= \cos \frac{8\pi}{16} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۷۳

(مهمیر احمدی)

$$\begin{aligned} & \frac{3 \sin 75^\circ + 2 \sin 105^\circ}{\cos(-15^\circ) - \cos(105^\circ)} = \frac{3 \sin(90^\circ - 15^\circ) + 2 \sin(90^\circ + 15^\circ)}{\cos 15^\circ - \cos(90^\circ + 15^\circ)} \\ &= \frac{3 \cos 15^\circ + 2 \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{5 \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} \\ & \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{صورت و مخرج را بر } \cos 15^\circ} \frac{5}{1 + \tan 15^\circ} = \frac{5}{1+a} \end{aligned}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۷۴

(علی کردی)

$$\sin\left(\pi \cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) = \sin\left(\pi \cos\left(\Delta\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \sin\left(-\pi \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\tan\left(\pi \cot\left(\frac{171\pi}{4}\right)\right) = \tan\left(\pi \cot\left(42\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \tan\left(\pi \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \tan(-\pi) = 0$$

$$\Rightarrow B = \sin\left(\pi \cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) - \tan\left(\pi \cot\left(\frac{171\pi}{4}\right)\right) = -1 - 0 = -1$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۶۷

(مهردار ملونری)

فرض کنیم $(\cos\theta, \sin\theta)$ مختصات متناظر با نقطه P' باشد.

نقطه P' در ربع چهارم قرار دارد و چون $\cos\theta = \frac{1}{2}$ است، پس P'

منطبق بر انتهای کمان $-\frac{\pi}{3}$ است. برای این که از P به P' برسیم باید

به اندازه $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم.

۴

۳

۲

۱

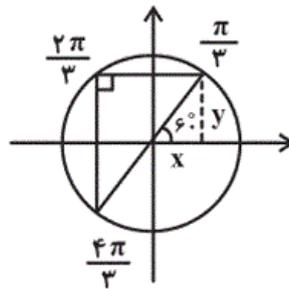
-۶۸

(میثم بهرامی بویا)

با توجه به شکل زیر، از آنجا که $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$ و $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$

می‌باشد، مثلث ایجاد شده یک مثلث قائم‌الزاویه است. حال طول اضلاع

قائم آن را به دست می‌آوریم:



$$y = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

با توجه به آن که $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -x$ و $\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -y$

است، پس:

$$\text{اضلاع قائم: } 2y = \sqrt{3}, 2x = 1$$

$$\text{مساحت} = \frac{2x \times 2y}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱

-۶۹

(فشرشار فرامرزی)

در چهارضلعی محاطی ABCD (چهارضلعی ای که هر چهار رأس آن روی محیط یک دایره باشد) زاویه‌های روبه‌رو مکمل هستند، یعنی داریم:

$$\hat{A} + \hat{C} = \pi$$

$$\sin \hat{A} = \sin(\pi - \hat{C}) = \sin \hat{C} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\cos \hat{A} = \cos(\pi - \hat{C}) = -\cos \hat{C}$$

بنابراین در بین گزینه‌های داده شده، تنها گزینه «۱» همواره درست است.

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

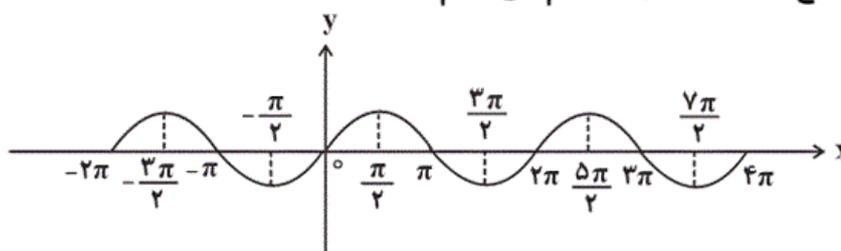
۲

۱ ✓

-۷۵

(علی شهرابی)

نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به گزینه‌ها، تابع $y = \sin x$ با دامنه $(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$ یک‌به‌یک

است.

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۴

۳

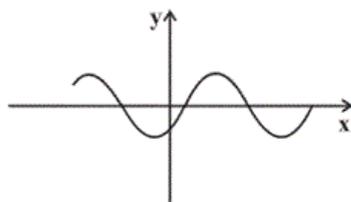
۲ ✓

۱

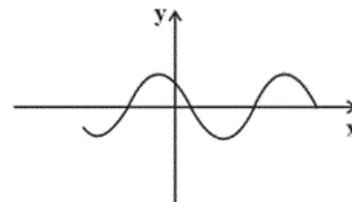
راه حل اول: با رسم و انتقال نمودارها گزینه «۱» صحیح است.

$$\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

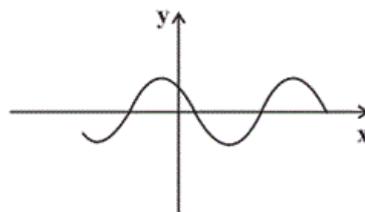


$$y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



نمودار تابع گزینه «۱» را رسم می‌کنیم.

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$



راه حل دوم:

می‌دانیم $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ پس:

$$\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

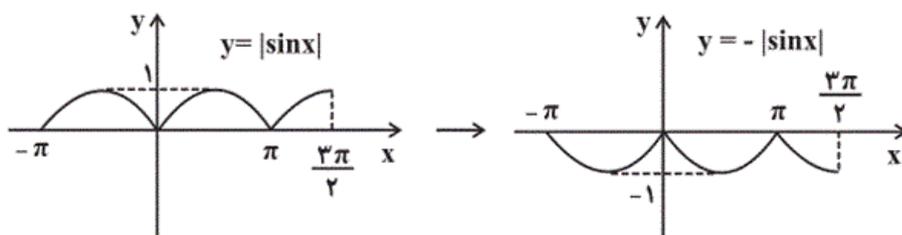
 ۱ ✓

ضابطه تابع داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

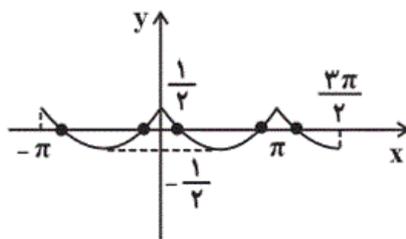
$$y = \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{2} - \sqrt{\sin^2 x} \Rightarrow y = \frac{1}{2} - |\sin x|$$

از طرفی نمودار توابع $y = |\sin x|$ و $y = -|\sin x|$ به صورت زیر

می‌باشد:



حالا نمودار $y = \frac{1}{2} - |\sin x|$ را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که از روی شکل مشخص است، نمودار تابع $y = \frac{1}{2} - |\sin x|$

محور x ها را در ۵ نقطه از بازه ذکر شده قطع می‌کند.

(مسئله ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۰۹)

۴

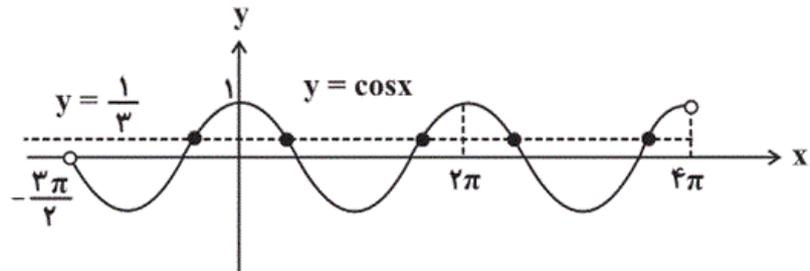
۳ ✓

۲

۱

نمودار تابع $y = \cos x$ را در بازه $(-\frac{3\pi}{2}, 4\pi)$ رسم کرده و تعداد

نقاط برخورد آن را با خط $y = \frac{1}{3}$ به دست می آوریم:



پس ۵ مقدار برای x می توان یافت.

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x + 1 = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \sin x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq f(x) \leq 3$$

بنابراین قدرمطلق اختلاف بین کمترین و بیشترین مقدار

$$\text{تابع } f \text{ برابر } \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = 3 \text{ است.}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$2^x - 3 > 0 \Rightarrow 2^x > 3 \Rightarrow \log_2 2^x > \log_2 3 \Rightarrow x > \log_2 3$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۰ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شعراپی)

$$\log_2^A = 5 \Rightarrow A = 2^5 = 32$$

$$\log_4^{(2A)} = \log_4^{64} = \log_4^{4^3} = 3$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(فرشاد فرامرزی)

با در نظر گرفتن $\sqrt{\log x} = t$ و در نتیجه $\log x = t^2$ ، داریم:

$$3 - t^2 = 2t \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$t = 1 \Rightarrow \sqrt{\log x} = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

$$\Rightarrow \log_{x-7}^{3(x-1)} = \log_2^{27} = \log_2^{3^3} = 3$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

ابتدا از دو طرف معادله $2^x = 3^{2-x}$ لگاریتم در پایه ۲ می‌گیریم تا x به دست آید.

$$2^x = 3^{2-x} \Rightarrow \log_2 2^x = \log_2 3^{2-x}$$

$$\Rightarrow x = (2-x) \log_2 3 \Rightarrow x = 2 \log_2 3 - x \log_2 3$$

$$\Rightarrow x + x \log_2 3 = 2 \log_2 3 \Rightarrow x(1 + \log_2 3) = 2 \log_2 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \log_2 3}{1 + \log_2 3} = \frac{2 \log_2 3}{\log_2 3 + \log_2 3} = \frac{2 \log_2 3}{\log_2 9} = 2 \log_9 3$$

حال عبارت $\frac{2x}{x + 2 \log_2 3}$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{2x}{x + 2 \log_2 3} = \frac{2 \times 2 \log_2 3}{2 \log_2 3 + 2 \log_2 3} = \frac{2 \log_2 3}{\log_2 9}$$

$$= 2 \log_{12} 3 = \log_{12} 3^2 = \log_{12} 9$$

توجه کنید که اگر لگاریتم‌ها تعریف شده باشند، داریم:

$$\frac{\log_a^b}{\log_a^c} = \log_c^b$$

اثبات: اگر قرار دهیم $\log_a^b = y$ و $\log_a^c = z$ ، آن‌گاه $b = a^y$

$$\log_c^b = \log_{a^z}^{a^y} = \frac{y}{z} \log_a^a = \frac{y}{z} = \frac{\log_a^b}{\log_a^c} \quad \text{و } c = a^z \text{ است. در نتیجه:}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۸)

۴

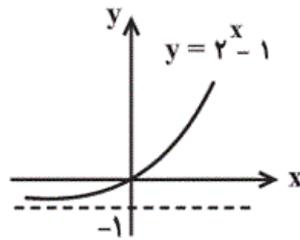
۳ ✓

۲

۱

گزینه «۱»: تابع $y = \frac{1}{4} \log_2 x$ را می‌توانیم به شکل $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ یا

$y = \log_4 x$ بنویسیم که با تابع $y = 4^x$ وارون یکدیگرند. پس نمودار



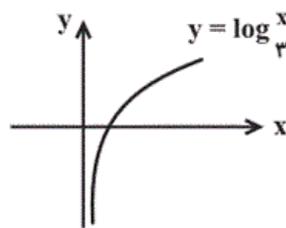
آن‌ها نسبت به خط $y = x$ قرینه است. (✓)

گزینه «۲»: نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.

برد آن مجموعه $(-1, +\infty)$ است. (✗)

گزینه «۳»: اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه $1 < a + 1 < 2$ است. حاصل

$\log_a x$ به ازای $0 < a < 1$ برای $x > 1$ عددی منفی است. (✓)



گزینه «۴»: از نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ می‌فهمیم

که برد آن \mathbb{R} است. (✓)

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر نیمه عمر یک ماده T و جرم اولیه آن A باشد، جرم باقی‌مانده آن

پس از گذشت زمان t ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$m(t) = A \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m(t) = 256 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$t = 2 \text{ ساعت} = 120 \text{ دقیقه}$$

$$\xrightarrow{\frac{t}{T}=6} m(120) = 256 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 256 \times \frac{1}{64} = 4 \text{ میلی‌گرم}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۸ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر $k < -1$ باشد، آن‌گاه $|k| > 1$ و در نتیجه تصویر شکل بزرگ‌تر

می‌شود.

(هندسه ۲ - صفحه ۴۷)

 ۴

 ۳

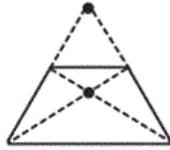
 ۲

 ۱

۱۰۲-

(ریم مشتاق نظم)

قاعده کوچک ذوزنقه متساوی الساقین می تواند با تجانس مستقیم به مرکز محل برخورد امتداد ساق ها یا تجانس معکوس به مرکز محل برخورد قطر ها بر قاعده بزرگ تصویر شود. دقت کنید که اندازه دو قاعده ذوزنقه متساوی الساقین برابر نیست، در حالی که تبدیل های دوران، انتقال و بازتاب، طولها هستند.



(هندسه ۲- صفحه های ۴۵ تا ۵۱)

۴

۳

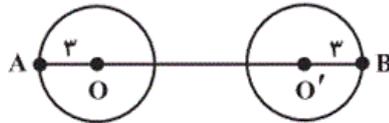
۲

۱

۱۰۳-

(علی فتح آبادی)

می دانیم انتقال یک تبدیل طولی است. بنابراین دو دایره یکسان و دارای شعاع های برابر می باشند. از طرفی طول خط المکزین دو دایره برابر طول بردار انتقال است، پس $OO' = 10$ می باشد.



دورترین نقاط بین دو دایره از برخورد امتداد خط المکزین با محیط آنها به دست می آید. بنابراین طول AB فاصله بین دورترین نقاط دو دایره را نشان می دهد که برابر ۱۶ است.

(هندسه ۲- صفحه های ۴۰ و ۴۱)

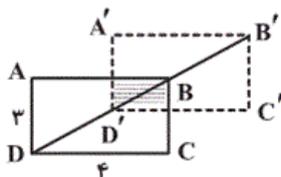
۴

۳

۲

۱

ابتدا اندازه قطر BD را به دست می آوریم:



$$BD^2 = AD^2 + CD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\Rightarrow BD = 5 \xrightarrow{DD'=3} BD' = 2$$

از طرفی مستطیل به وجود آمده (ناحیه مشترک) با مستطیل ABCD

$$k = \frac{BD'}{BD} = \frac{2}{5}$$

متشابه بوده و نسبت تشابه برابر است با:

در نتیجه داریم:

$$S_{\text{ناحیه مشترک}} = k^2 S_{ABCD} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 3 \times 4 = \frac{48}{25} = 1/92$$

(هندسه ۲- صفحه های ۳۰ و ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱


$$OM' = \frac{4}{3} OM \Rightarrow MM' = \frac{1}{3} OM$$

با توجه به تساوی فوق و این که نقاط O و M' دو طرف M قرار دارند

می توان گفت M' تصویر O در تجانس به مرکز M و نسبت

تجانس $-\frac{1}{3}$ است.

(هندسه ۲- صفحه های ۴۵ تا ۵۱)

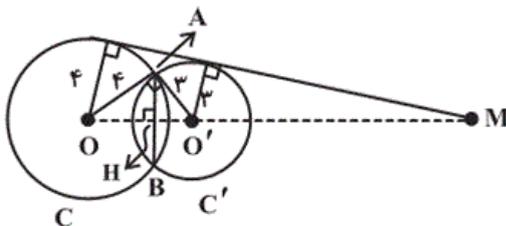
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در دو دایره متجانس، قدرمطلق نسبت تجانس، برابر نسبت شعاع‌های دو دایره است.



$$|k| = \frac{r'}{r} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{تجانس مستقیم}} k = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{3}{4} \xrightarrow{MO=20} MO' = 15 \Rightarrow OO' = 5$$

بنابراین طبق عکس قضیه فیثاغورس، مثلث OAO' قائم‌الزاویه می‌باشد و داریم:

$$AH \times OO' = AO \times AO' \Rightarrow AH \times 5 = 4 \times 3 \Rightarrow AH = \frac{12}{5} = 2/5$$

خط‌المركزین دو دایره متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است و در

$$AB = 2AH = 4/8$$

نتیجه داریم:

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

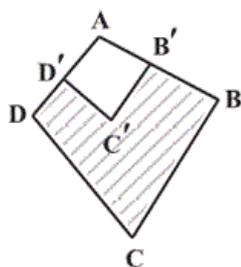
۴

۳ ✓

۲

۱

می‌دانیم هر دو شکل متجانس، با یکدیگر متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها همان قدرمطلق نسبت تجانس است، بنابراین داریم:



$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{54} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = 6$$

$$\text{مساحت ناحیه محصور} = S_{ABCD} - S_{A'B'C'D'} = 54 - 6 = 48$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

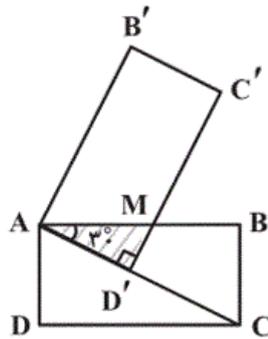
۴ ✓

۳

۲

۱

از دوران مستطیل $ABCD$ حول نقطه A و به اندازه 60° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، مطابق شکل مستطیل $AB'C'D'$ حاصل می‌شود که نقطه D' بر روی قطر AC واقع است. دوران تبدیلی طولپاست، پس $AD' = AD = \sqrt{3}$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف طول وتر است، پس در صورتی که $MD' = x$ باشد، $AM = 2x$ است و داریم:



$$\Delta AMD' : AM^2 = AD'^2 + MD'^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 3 + x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x>0} x = 1$$

$$S_{AMD'} = \frac{1}{2} MD' \times AD' = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

فرض کنید نقطه B مجانس نقطه A به مرکز O و نسبت $k = 2$ باشد. از آنجایی که نسبت تجانس برابر ۲ است بنابراین $OA = AB$ ، یعنی نقطه A بین O و B است.

$$\begin{array}{c} O \qquad \qquad \qquad A \qquad \qquad \qquad B \\ \left\{ \begin{array}{l} x_A = \frac{x_B + x_O}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\alpha + (-1)}{2} \Rightarrow \alpha = 7 \\ y_A = \frac{y_B + y_O}{2} \Rightarrow 4 = \frac{\beta + 2}{2} \Rightarrow \beta = 6 \end{array} \right. \end{array}$$

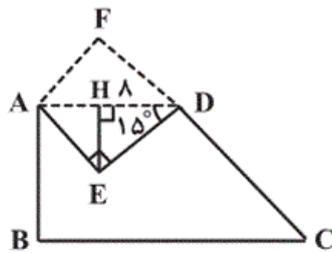
(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۴

۳ ✓

۲

۱



$$EH = \frac{1}{4} \times 8 = 2$$

$$S_{AED} = \frac{2 \times 8}{2} = 8$$

$$\Rightarrow S_{AFDE} = 2 \times 8 = 16$$

بنابراین مساحت شکل حاصل، ۱۶ واحد بیشتر از مساحت شکل اولیه است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شورابی)

-۹۲

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{108^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3}{5}\pi$$

$$l = r\theta = \frac{10}{\pi} \times \frac{3\pi}{5} = 6$$

(مسئله ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مهدی طاهر شعاعی)

-۹۴

اگر اندازه کمان مطلوب بر حسب رادیان α فرض شود، داریم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ \alpha}{\pi}$$

اندازه کمان بر حسب درجه

$$\alpha = \frac{5\pi}{180\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi^2}{180\alpha}$$

$$\Rightarrow 180\alpha^2 = 5\pi^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{36} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

رادیان

(مسئله ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

60° معادل $\frac{\pi}{3}$ رادیان است. به علاوه وقتی قطر دایره π است، شعاع آن

$$L = r\theta \Rightarrow L = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{6} \quad \frac{\pi}{2} \text{ می شود.}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

با توجه به رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ و قرار دادن $R = 1$ مشخص می‌شود که ۱

رادیان تقریباً $3^\circ / 57$ درجه است. کسینوس در ناحیه اول بین صفر و یک است، پس:

$$0 < \cos 1 = \cos 57^\circ < 1 \Rightarrow [\cos 1] = 0$$

۲ رادیان تقریباً برابر با $6^\circ / 114$ بوده و انتهای کمان آن در ناحیه دوم است و کسینوس در ناحیه دوم بین صفر و -۱ است.

$$-1 < \cos 2 < 0 \Rightarrow [\cos 2] = -1$$

۳ رادیان تقریباً برابر با $9^\circ / 171$ بوده و انتهای کمان آن در ناحیه دوم است و سینوس در ناحیه دوم بین صفر و یک است. بنابراین:

$$[\sin 3] = [\sin 171 / 9^\circ] = 0$$

برای $[\tan 1]$ نیز داریم:

$$\tan 45^\circ < \tan 57 / 3^\circ < \tan 60^\circ$$

$$1 < \tan 57 / 3^\circ < \sqrt{3} \Rightarrow [\tan 1] = [\tan 57 / 3^\circ] = 1$$

$$\text{حاصل کسر} = \frac{0 + (-1)}{0 - 1} = 1$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

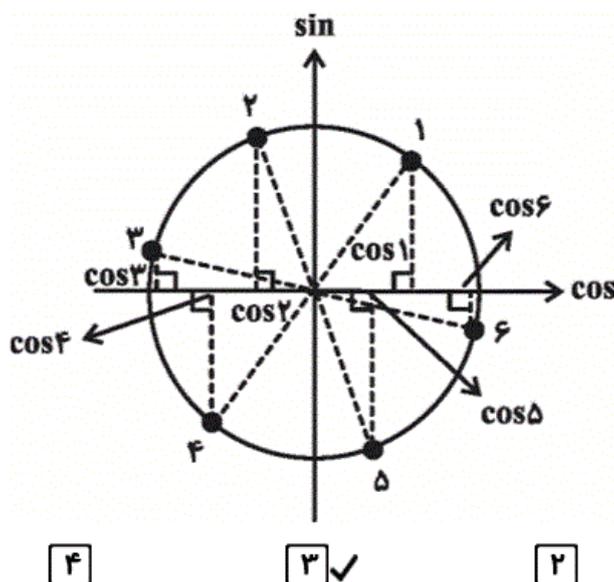
۴

۳ ✓

۲

۱

روی دایره مثلثاتی زوایای ۱ الی ۶ رادیان را مشخص می‌کنیم. تصویر نقاط انتهایی کمان‌ها بر روی محور افقی برابر با کسینوس آن کمان است.



زاویه 120° - درجه را بر حسب رادیان به دست می‌آوریم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{-120^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = -\frac{2\pi}{3} = -2\pi + \frac{4\pi}{3} \text{ رادیان}$$

مقدار گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{11\pi}{3} = 2\pi + \frac{5\pi}{3} \text{ :گزینه «۱»}$$

$$\frac{100\pi}{3} = 32\pi + \frac{4\pi}{3} \text{ :گزینه «۲»}$$

$$-\pi + \frac{2\pi}{3} = -2\pi + \frac{5\pi}{3} \text{ :گزینه «۳»}$$

$$3\pi - \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3} \text{ :گزینه «۴»}$$

دو زاویه θ و $2k\pi + \theta$ بر روی دایره مثلثاتی بر هم منطبق هستند
($k \in \mathbb{Z}$)، پس جواب گزینه «۲» می‌شود.

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۹۹

(معمومه گرایبی)

اگر زاویه θ در دایره‌ای به شعاع r ، طول L را جدا کند (مسافتی به طول L را طی کند)، در این صورت اندازه θ بر حسب رادیان برابر $\frac{L}{r}$ است.

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ رادیان}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \xrightarrow{R=\theta=\frac{5}{3} \text{ رادیان}} D = \frac{180^\circ \times \frac{5}{3}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{300^\circ}{\pi}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۰۰

(مهم مصطفی ابراهیمی)

زاویه 45° برابر $\frac{\pi}{4}$ رادیان است.

$$L = r\theta \Rightarrow \widehat{AB} = L = (6400 + 600) \frac{\pi}{4} = \frac{7000\pi}{4} = 1750\pi$$

هر ساعت 10π کیلومتر را طی می‌کند. پس 1750π کیلومتر را در ۱۷۵ ساعت خواهد رفت.

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۸۲

(مهم مصطفی پور)

با توجه به این که $0 < a < 1$ ، مقادیر تابع $y = \log_a^x$ با افزایش x ، کاهشمی‌یابد. همچنین $\log_a^1 = 0$ بنابراین گزینه «۲» صحیح است.

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میثم بهرامی بویا)

$$\log_2^1 < \log_2^3 < \log_2^4$$

$$\Rightarrow 1 < \log_2^3 < 2 \Rightarrow \log_2^1 < \log_2^{\log_2^3} < \log_2^2$$

$$\Rightarrow 0 < \log_2^{\log_2^3} < 1 \Rightarrow [\log_2^{\log_2^3}] = 0$$

$$\log_2^{\log_2^4} = \log_2^2 = 1 \Rightarrow [\log_2^{\log_2^4}] = 1$$

$$4 < 5 < 6 < \dots < 10 < 16 \Rightarrow \log_2^4 < \log_2^5 < \log_2^6 < \dots < \log_2^{10} < \log_2^{16}$$

$$\Rightarrow 2 < \log_2^5 < \dots < \log_2^{10} < 4 \Rightarrow \log_2^2 < \log_2^{\log_2^5} < \dots < \log_2^{\log_2^{10}} < \log_2^4$$

$$\Rightarrow 1 < \log_2^{\log_2^5} < \dots < \log_2^{\log_2^{10}} < 2 \Rightarrow [\log_2^{\log_2^5}] = \dots = [\log_2^{\log_2^{10}}] = 1$$

بنابراین حاصل ۷ تا از جزء صحیح‌ها برابر با یک می‌شود. پس:

$$0 + \overbrace{1+1+\dots+1}^7 = 7$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علی کردی)

مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $a'x^2 + b'x + c' = 0$ برابر با $-\frac{b'}{a'}$ و حاصل ضرب آن‌ها $\frac{c'}{a'}$ است.

$$\begin{cases} \log a + \log b = 2m + 1 \Rightarrow \log ab = 2m + 1 \\ \log a \log b = -3 \end{cases}$$

$$(\log ab) - (\log a \log b) = -\frac{1}{3}m \Rightarrow 2m + 1 + 3 = -\frac{1}{3}m$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3}m = -4 \Rightarrow m = -\frac{12}{7}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

با در نظر گرفتن $\sqrt{\log x} = t$ و در نتیجه $\log x = t^2$ ، داریم:

$$3 - t^2 = 2t \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$t = 1 \Rightarrow \sqrt{\log x} = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

$$\Rightarrow \log_{x-7}^{3(x-1)} = \log_{3-7}^{27} = \log_3^{3^3} = 3$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(نامر چوقادی)

$$\log 0 / 35 = \log \frac{3/5}{10} = \log 3/5 - \log 10 = \log \frac{7}{2} - 1$$

$$= \log 7 - \log 2 - 1 \Rightarrow \log 0 / 35 = b - a - 1$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(جوانبش نیکنام)

$$x = \log_{15}^4 + \log_{15}^{\Delta^x} - \log_{15}^{(3^x + \sqrt{2})} \Rightarrow x = \log_{15}^{\frac{4 \times \Delta^x}{3^x + \sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow 15^x = \frac{4 \times \Delta^x}{3^x + \sqrt{2}} \xrightarrow{\div \Delta^x} 3^x = \frac{4}{3^x + \sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{3^x = t} t^2 + \sqrt{2}t - 4 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} t = -2\sqrt{2} \\ t = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ غ ق ق}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -2\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 3^x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \log_3^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log_3^2$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$2^x = 2^{2-x} \Rightarrow \log_2 2^x = \log_2 2^{2-x}$$

$$\Rightarrow x = (2-x) \log_2 2 \Rightarrow x = 2 \log_2 2 - x \log_2 2$$

$$\Rightarrow x + x \log_2 2 = 2 \log_2 2 \Rightarrow x(1 + \log_2 2) = 2 \log_2 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \log_2 2}{1 + \log_2 2} = \frac{2 \log_2 2}{\log_2 2 + \log_2 2} = \frac{2 \log_2 2}{\log_2 4} = 2 \log_2 2$$

حال عبارت $\frac{2x}{x + 2 \log_2 4}$ را به دست می آوریم.

$$\frac{2x}{x + 2 \log_2 4} = \frac{2 \times 2 \log_2 2}{2 \log_2 2 + 2 \log_2 4} = \frac{2 \log_2 2}{\log_2 4}$$

$$= 2 \log_{12} 2 = \log_{12} 2^2 = \log_{12} 4$$

توجه کنید که اگر لگاریتمها تعریف شده باشند، داریم:

$$\frac{\log_a^b}{\log_a^c} = \log_c^b$$

اثبات: اگر قرار دهیم $\log_a^b = y$ و $\log_a^c = z$ ، آن گاه $b = a^y$

$$\log_c^b = \log_{a^z}^{a^y} = \frac{y}{z} \log_a^a = \frac{y}{z} = \frac{\log_a^b}{\log_a^c} \quad \text{و } c = a^z \text{ در نتیجه:}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۰ تا ۸۸)

۴

۳ ✓

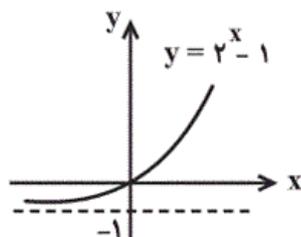
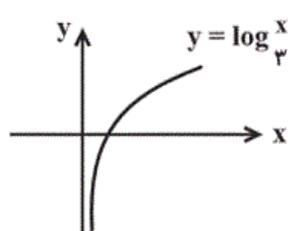
۲

۱

(علی شهبازی)

گزینه «۱»: تابع $y = \frac{1}{3} \log_2 x$ را می‌توانیم به شکل $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ یا $y = \log_4 x$ بنویسیم که با تابع $y = 4^x$ وارون یکدیگرند. پس نمودارآن‌ها نسبت به خط $y = x$ قرینه است. (✓)

گزینه «۲»: نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.

برد آن مجموعه $(-1, +\infty)$ است. (✗)گزینه «۳»: اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه $1 < a + 1 < 2$ است. حاصل $\log_a x$ به ازای $0 < a < 1$ برای $x > 1$ عددی منفی است. (✓)گزینه «۴»: از نمودار تابع $y = \log_3^x$ می‌فهمیمکه برد آن \mathbb{R} است. (✓)

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی شهبازی)

$$(3, 1) \in f^{-1} \Rightarrow (1, 3) \in f \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow a + \log_3^{(b+1)} = 3$$

$$(5, 13) \in f^{-1} \Rightarrow (13, 5) \in f \Rightarrow f(13) = 5 \Rightarrow a + \log_3^{(13b+1)} = 5$$

طرفین دو معادله بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$a + \log_3^{(13b+1)} - a - \log_3^{(b+1)} = 5 - 3 \Rightarrow \log_3^{\frac{(13b+1)}{b+1}} = 2$$

۴

۳

۲ ✓

۱

-۹۱

(حامد پوقاری)

اگر نیمه عمر یک ماده T و جرم اولیه آن A باشد، جرم باقی مانده آن پس از گذشت زمان t، از رابطه زیر به دست می آید:

$$m(t) = A \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m(t) = 256 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$$

$$t = 2 \text{ ساعت} = 120 \text{ دقیقه}$$

$$\xrightarrow{\frac{t}{T}=6} m(120) = 256 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 256 \times \frac{1}{64} = 4 \text{ میلی گرم}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۸ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

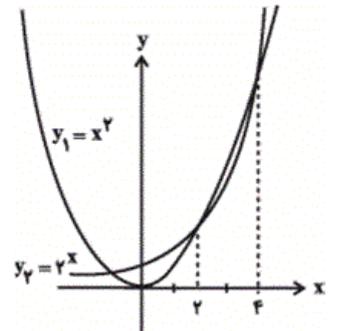
۱

-۹۳

(امیر هوشنگ فمسه)

با توجه به شکل و این که $x > 0$ است، نمودار $y_1 = x^2$ در بازه $(2, 4)$ بالای نمودار $y_2 = 2^x$ قرار می گیرد.

$$\log_8 \sqrt{b-a} = \log_8 \sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$



(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۰ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۸۱

(علی شعرابی)

$$\log_2^A = 5 \Rightarrow A = 2^5 = 32$$

$$\log_4^{(2A)} = \log_4^{64} = \log_4^{4^3} = 3$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۰ تا ۸۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۱۱

(مهم مرصطفی پور)

اگر $k < -1$ باشد، آن گاه $|k| > 1$ و در نتیجه تصویر شکل بزرگ تر می شود.

(هندسه ۲- صفحه ۴۷)

۴

۳ ✓

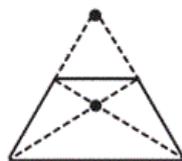
۲

۱

-۱۱۲

(ریم مشفق نظم)

قاعده کوچک ذوزنقه متساوی الساقین می تواند با تجانس مستقیم بر مرکز محل برخورد امتداد ساقها یا تجانس معکوس به مرکز محل برخورد قطرهای می تواند بر قاعده بزرگ تصویر شود.



(هندسه ۲- صفحه های ۴۵ تا ۵۱)

۴

۳

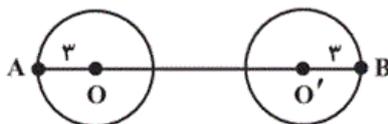
۲

۱ ✓

-۱۱۳

(علی فتح آبادی)

می دانیم انتقال یک تبدیل طولپاست. بنابراین دو دایره یکسان و دارای شعاع های برابر می باشند. از طرفی بردار انتقال دو دایره یکسان، همان طول خط المکزین آنها یعنی $OO' = 10$ می باشد.



دورترین نقاط بین دو دایره از برخورد امتداد خط المکزین با محیط آنها به دست می آید. بنابراین طول AB فاصله بین دورترین نقاط دو دایره را نشان می دهد که برابر ۱۶ است.

(هندسه ۲- صفحه های ۴۰ و ۴۱)

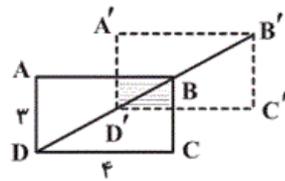
۴

۳

۲ ✓

۱

ابتدا اندازه قطر BD را به دست می آوریم:



$$BD^2 = AD^2 + CD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\Rightarrow BD = 5 \xrightarrow{DD'=3} BD' = 2$$

از طرفی مستطیل به وجود آمده (ناحیه مشترک) با مستطیل ABCD

$$k = \frac{BD'}{BD} = \frac{2}{5} \quad \text{متشابه بوده و نسبت تشابه برابر است با:}$$

در نتیجه داریم:

$$S_{\text{ناحیه مشترک}} = k^2 S_{ABCD} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 3 \times 4 = \frac{48}{25} = 1/92$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

(ممدطاهر شعاعی)

بنا به فرض $OM' = \frac{4}{3}OM$ است و می توان نوشت:

$$OM' = \frac{4}{3}OM \Rightarrow MM' = \frac{1}{3}OM$$

با توجه به تساوی فوق و این که نقاط O و M' دو طرف M قرار دارند می توان گفت M' تصویر O در تجانس به مرکز M و نسبت

تجانس $-\frac{1}{3}$ است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

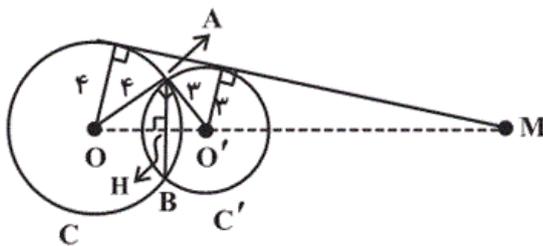
۴

۳

۲ ✓

۱

در دو دایره متجانس، اندازه نسبت تجانس، برابر نسبت شعاع‌های دو دایره است.



$$|k| = \frac{r'}{r} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{تجانس مستقیم}} k = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{3}{4} \xrightarrow{MO=20} MO' = 15 \Rightarrow OO' = 5$$

بنابراین طبق عکس قضیه فیثاغورس، مثلث OAO' قائم‌الزاویه می‌باشد و داریم:

$$AH \times OO' = AO \times AO' \Rightarrow AH \times 5 = 4 \times 3 \Rightarrow AH = \frac{12}{5} = 2/4$$

خط‌المركزین دو دایره متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است و در

$$AB = 2AH = 4/8 \quad \text{نتیجه داریم:}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مرکز دوران، نقطه ثابت دوران است. مرکز تجانس نیز نقطه ثابت تجانس است. نقاط روی محور بازتاب، نقاط ثابت بازتاب می‌باشند ولی انتقال غیرهمانی نقطه ثابت ندارد.

(هندسه ۲- صفحه ۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_O}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\alpha + (-1)}{2} \Rightarrow \alpha = 7 \\ y_A = \frac{y_B + y_O}{2} \Rightarrow 4 = \frac{\beta + 2}{2} \Rightarrow \beta = 6 \end{cases}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

 ۴

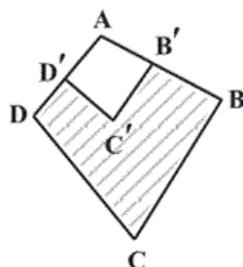
 ۳

 ۲

 ۱

(علی فتح آباری)

می‌دانیم هر دو شکل متجانس، با یکدیگر متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها همان قدر مطلق نسبت تجانس است، بنابراین داریم:



$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{54} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = 6$$

$$\text{مساحت ناحیه محصور} = S_{ABCD} - S_{A'B'C'D'} = 54 - 6 = 48$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

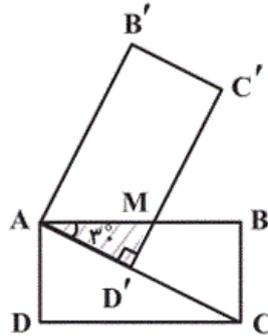
۴ ✓

۳

۲

۱

از دوران مستطیل ABCD حول نقطه A و به اندازه 6° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، مطابق شکل مستطیل $AB'C'D'$ حاصل می‌شود که نقطه D' بر روی قطر AC واقع است. دوران تبدیلی طولیاست، پس $AD' = AD = \sqrt{3}$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 3° ، نصف طول وتر است، پس در صورتی که $MD' = x$ باشد، $AM = 2x$ است و داریم:



$$\Delta AMD' : AM^2 = AD'^2 + MD'^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 3 + x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

$$S_{AMD'} = \frac{1}{2} MD' \times AD' = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(\text{سومی آبی و دومی آبی و اولی سبز}) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{24}$$

$$P(\text{سومی سبز و دومی سبز و اولی زرد}) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{18} = \frac{7}{72}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۲۳

(امیر هوشنگ فمسه)

اگر B_1 و B_2 به ترتیب پیشامد دختر و پسر بودن فرد انتخابی و A پیشامد مطالعه کردن آمار و احتمال باشد، آن گاه طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{4}{10} + \frac{40}{100} \times \frac{3}{10} = \frac{24}{100} + \frac{12}{100} = 0/36$$

بنابراین احتمال این که فرد انتخابی درس آمار و احتمال را در آن روز

$$P(A') = 1 - 0/36 = 0/64 \quad \text{مطالعه نکرده باشد، برابر است با:}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۲۴

(امیر حسین ابومحبوب)

فرض کنید پیشامد این که مهره خارج شده از ظرف دوم، از ابتدا به ظرف دوم تعلق داشته باشد را با B_1 و پیشامد آن که مهره خارج شده از ظرف دوم، از ظرف اول به آن ظرف منتقل شده باشد را با B_2 نمایش دهیم. همچنین A پیشامد خارج شدن مهره قرمز رنگ از ظرف دوم باشد، در این صورت طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{7} + \frac{9}{56} = \frac{17}{56}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

فرض کنید پیشامدهای B_1 و B_2 به ترتیب تعلق داشتن فرد انتخاب شده به رشته ریاضی و رشته تجربی و پیشامد A داشتن نمره بالای ۱۸ باشد. در این صورت طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)$$

$$= \frac{40}{100} \times \frac{25}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{28}{100}$$

حال طبق قانون بیز داریم:

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1)P(A | B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{25}{100}}{\frac{28}{100}} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{1 - P(A')} = \frac{\binom{4}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{6}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{2}{5}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیر حسین ابومحبوب)

فرض کنید پیشامدهای B_1 ، B_2 و B_3 به ترتیب انتخاب کارت دو رو قرمز، کارت یک رو قرمز، یک رو آبی و کارت دو رو آبی باشند و پیشامد A آن باشد که روی مشاهده شده کارت انتخابی قرمز است. طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= \frac{3}{12} \times 1 + \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{12} \times 0 = \frac{1}{4} + \frac{5}{24} = \frac{11}{24}$$

حال طبق قانون بیز داریم:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{12} \times 1}{\frac{11}{24}} = \frac{6}{11}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(فرشاد فرامرزی)

A و B دو پیشامد مستقل اند، پس $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow 0/4 = P(A) + 0/2 - 0/2P(A) \Rightarrow P(A) = 0/25$$

از آنجا که A و B دو پیشامد مستقل هستند، A' و B هم مستقل می‌باشند و داریم:

$$P(A' - B') = P(B \cap A') = P(B)P(A')$$

$$= P(B)(1 - P(A)) = 0/2 \times 0/75 = 0/15$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

در یک بار پرتاب این تاس، احتمال رو شدن اعداد ۱، ۲ و ۳ به ترتیب $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ است. دو بار پرتاب تاس مستقل از یکدیگر است، بنابراین اگر پیشامد آن که مجموع دو عدد رو شده برابر ۴ باشد را با A نمایش دهیم، آن گاه داریم:

$$\begin{aligned} P(A) &= P((1, 3)) + P((3, 1)) + P((2, 2)) \\ &= 2P(1) \times P(3) + P(2) \times P(2) \\ &= 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

لااقل یک نفر بهبود یابد یعنی یک نفر یا بیشتر از یک نفر بهبود یابد. برای محاسبه احتمال این پیشامد می‌توانیم از متمم آن، یعنی حالتی که هیچ فردی بهبود نیابد استفاده کنیم. پس داریم:

$$P(0/9)^5 = 1 - P(\text{هیچ فردی بهبود نیابد}) = 1 - P(\text{لااقل یک نفر بهبود یابد})$$

تذکر: چون احتمال بهبودی هر فرد مستقل از دیگری است، احتمال بهبود نیافتن افراد نیز مستقل از یکدیگر است.

(آمار و احتمال - مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۷۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

پیشامد آن که حداقل یکی از این دو نفر در امتحان ریاضی قبول شوند، متمم آن است که هیچ کدام در امتحان ریاضی قبول نشوند. اگر پیشامدهای قبول شدن علی و رضا را به ترتیب با A و B نمایش دهیم، آن گاه این دو پیشامد و در نتیجه پیشامدهای A' و B' مستقل از یکدیگرند و داریم:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A')P(B') = 0/4 \times 0/3 = 0/12 \\ P(A \cup B) &= 1 - P(A' \cap B') = 1 - 0/12 = 0/88 \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۴

۳

۲ ✓

۱