

سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

هندسه ۲، تبدیل های هندسی و کاربردها - ۱۰ سوال

۱۳۱- کدام تناظر  $R^2 \rightarrow R^2$  با ضابطه داده شده، یک تبدیل است؟

- (۱)  $T(x, y) = (x + y, 1)$   
 (۲)  $T(x, y) = (x, y^2 - 1)$   
 (۳)  $T(x, y) = (1, -y)$   
 (۴)  $T(x, y) = (x + y, x)$

۱۳۲- بازتاب نقطه  $M$  نسبت به خط  $y = 1$ ، نقطه  $M'$  و بازتاب نقطه  $M'$  نسبت به خط  $y = -1$ ، نقطه  $M''$  است.  $M''$  تصویر  $M$ .....  
 ... است.

- (۱) تحت بازتاب نسبت به محور  $y$  ها  
 (۲) تحت بازتاب نسبت به محور  $x$  ها  
 (۳) تحت انتقال با بردار  $(0, 4)$   
 (۴) تحت انتقال با بردار  $(0, -4)$

۱۳۳- اگر نگاشت  $T(x, y) = ((m-1)x + m, -y + m)$  یک تبدیل ایزومتری باشد، آنگاه  $m$  کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) -۱  
 (۴) -۲

۱۳۴- اگر  $D(x, y) = (mx, (1-2m)y)$  ضابطه یک تجانس به مرکز مبدأ مختصات باشد، مساحت هر شکل در صفحه بر اثر این تجانس، چند برابر می شود؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{9}$   
 (۳) ۴  
 (۴) ۹

۱۳۵- تصویر نقطه  $A = (-2, 1)$ ، تحت یک بازتاب محوری، نقطه  $A' = (4, -5)$  شده است. معادله محور این بازتاب، کدام است؟

- (۱)  $y = x - 3$   
 (۲)  $y = x + 2$   
 (۳)  $y = -x - 1$   
 (۴)  $y = x + 1$

۱۳۶- اگر مثلث  $ABC$  به رأس های  $A = (4, 0)$ ،  $B = (1, 6)$  و  $C = (1, 0)$  تحت دوران  $R(x, y) = (y, -x)$  به مثلث  $A'B'C'$  تبدیل گردد، آنگاه مساحت مثلث  $A'B'C'$ ، کدام است؟

- (۱) ۴  
 (۲) ۹  
 (۳) ۶  
 (۴) ۱۲

۱۳۷- تصویر خط  $3x + 2y = 1$  تحت دوران  $90^\circ$  حول مبدأ از کدام نقطه زیر می گذرد؟

- (۱)  $(3, 2)$   
 (۲)  $(5, 4)$   
 (۳)  $(1, 1)$   
 (۴)  $(6, 3)$

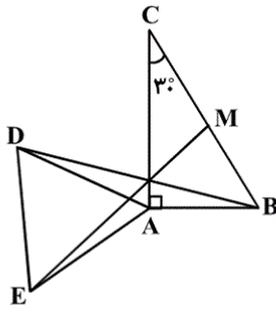
۱۳۸- معادله تصویر خط  $L$  تحت تبدیل  $T(x, y) = (y - 1, x)$  به صورت  $L' : x - y = 3$  است. معادله خط  $L$  کدام است؟

- (۱)  $y = x - 4$   
 (۲)  $y = 2x - 4$   
 (۳)  $y = x + 4$   
 (۴)  $y = 2x + 4$

۱۳۹- اگر تصویر خط  $2x + 4y - 5 = 0$  تحت تجانس  $D(x, y) = (kx, ky)$ ، خط  $x + 2y - 3 = 0$  باشد،  $k$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{6}{5}$   
 (۲)  $\frac{5}{6}$   
 (۳)  $\frac{3}{5}$   
 (۴)  $\frac{5}{3}$

۱۴۰- مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) و مثلث متساوی‌الاضلاع  $ADE$  در رأس  $A$  مشترکند. اگر  $\hat{C} = 30^\circ$  و  $M$  وسط وتر  $BC$  باشد، آنگاه زاویه حاده بین پاره‌خط‌های  $BD$  و  $ME$  کدام است؟



- (۱)  $30^\circ$
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $75^\circ$

دیفرانسیل و انتگرال، کاربرد مشتق - ۲۰ سوال

۸۱- در تابعی با ضابطه  $f(t) = t - \sqrt{t}$ ، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در  $t = 4$  چقدر از آهنگ متوسط تغییر آن از  $t = 1$  تا  $t = 4$ ، بیشتر است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$
- (۲)  $\frac{2}{3}$
- (۳)  $\frac{1}{6}$
- (۴)  $\frac{1}{12}$

۸۲- دامنه کدام تابع با دامنه تابع مشتق آن یکسان است؟

$$f(x) = |x^2 - 1| \quad (۱)$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$h(x) = \frac{1}{|x|} \quad (۳)$$

$$k(x) = \sqrt[3]{x} \quad (۴)$$

۸۳- دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = 5x - a|x - 1|$  و  $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$  مفروض‌اند. تابع  $f \circ g$  به‌ازای کدام مقدار  $a$  در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  مشتق پذیر است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$
- (۲)  $-\frac{3}{5}$
- (۳)  $5$
- (۴) هیچ مقدار  $a$

۸۴- مقدار مشتق تابع  $f(x) = \frac{1+x+\dots+x^y}{1+x^2}$  در  $x = -1$  کدام است؟

- (۱)  $3$
- (۲)  $-3$
- (۳)  $2$
- (۴)  $-2$

۸۵- اگر  $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  کدام است؟

- (۱)  $-\pi$
- (۲)  $-\frac{\pi}{2}$
- (۳)  $\frac{\pi}{2}$
- (۴)  $\pi$

۸۶- در تابع  $f(x) = \left( \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3$ ، حاصل  $f'(2)$ ، کدام است؟

- (۱)  $-21$
- (۲)  $-18$
- (۳)  $12$
- (۴)  $15$

۸۷- اگر  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  و  $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = \frac{k}{x^n}$  باشد، حاصل  $k+n$  کدام است؟ ( $k, n \in \mathbb{Z}$ )

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۸۸- اگر  $y = ax^2 + bx + c$  در رابطه  $y + y' + y'' = x^2 + x + 1$  صدق کند، حاصل  $a+b+c$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۸۹- خط  $y - 4x + 5 = 0$  در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع  $f$  مماس است. اگر  $g(x) = (x^2 - 1)f^{-1}(2x - 1)$  باشد، مقدار

$g'(2)$  کدام است؟

- (۱)  $8/75$  (۲) ۹ (۳)  $9/25$  (۴)  $9/5$

۹۰- اگر  $f'(x) = 2f(x) + \sqrt{4f^2(x) + 1}$  باشد،  $(f^{-1})'(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{4x^2 + 1} + 2x$  (۲)  $\sqrt{4x^2 + 1} - 2x$

- (۳)  $\frac{1}{2f(x) + \sqrt{4f^2(x) + 1}}$  (۴)  $\frac{1}{\sqrt{4f^2(x) + 1} - 2x}$

۹۱- مشتق تابع  $f(x) = e^{3\text{Ln}x} \text{Ln} \frac{x}{x+1}$  به ازای  $x=1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2} - 3\text{Ln}2$  (۲)  $\text{Ln}2 + 3$

- (۳)  $3 - \text{Ln}2$  (۴)  $\frac{1}{4} - 3\text{Ln}2$

۹۲- با فرض  $f(x) = x^{\sin x}$ ، مقدار  $f'(\frac{\pi}{2})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\frac{2}{\pi}$  (۳) ۱ (۴) صفر

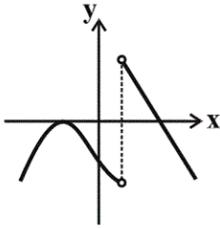
۹۳- تابع  $f(x) = |x^2 - x|$  چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۴- در کدام تابع زیر  $x=1$  مینیمم نسبی نیست؟  $(\ ]$ ، نماد جزء صحیح است).

(۱)  $y = \cos(\pi[x])$     (۲)  $y = (x-1)^2[x]$     (۳)  $y = \sqrt{x-[x]}$     (۴)  $y = x[-x]$

۹۵- شکل مقابل نمودار مشتق تابع پیوسته  $f$  را نشان می‌دهد  $(D_f = \mathbb{R})$ . نمودار تابع  $f$  دارای:



- (۱) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.
- (۲) یک مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.
- (۳) یک مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.
- (۴) دو مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

۹۶- اگر  $A(-1, \frac{1}{2})$  نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+3}$  باشد، طول و نوع نقطه اکسترمم نسبی دیگر تابع  $f$  کدام است؟

- (۱) ۱، ماکزیمم
- (۲) ۱، مینیمم
- (۳) ۳، ماکزیمم
- (۴) ۳، مینیمم

۹۷- اگر مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع  $f(x) = x(x^2 - 3) + k$  در بازه  $[0, 3]$  قرینه هم باشند، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) ۸
- (۲) -۸
- (۳) ۱۰
- (۴) -۱۰

۹۸- یک شیرینی‌فروشی می‌خواهد با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه مقوایی مربع شکل به طول ضلع واحد و بالا بردن

چهار طرف آن، جعبه‌ای در باز بسازد. بیش‌ترین حجم ممکن برای جعبه چند واحد مکعب است؟

- (۱)  $\frac{4}{9}$
- (۲)  $\frac{2}{27}$
- (۳)  $\frac{7}{15}$
- (۴)  $\frac{9}{31}$

۹۹- وضعیت یکنوایی تابع  $f(x) = \frac{1}{x} + \cos^2 x$  در بازه  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  چگونه است؟

- (۱) ابتدا صعودی و سپس نزولی
- (۲) ابتدا نزولی و سپس صعودی
- (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی و سپس صعودی
- (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی و سپس نزولی

۱۰۰- نمودار تابع  $f(x) = \frac{mx^3}{3} + \frac{(m+1)x^2}{2} + mx + m$  اکیداً صعودی است. حدود  $m$  کدام است؟

(۱)  $\mathbb{R} - \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

(۲)  $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

(۴)  $(-\infty, 1)$

(۳)  $[1, +\infty)$

هندسه‌ی تحلیلی، **مقاطع مخروطی** - سوال ۱۰

۱۱۱- فاصله کانونی هذلولی به معادله  $y^2 = 4x^2 + 16x + 2y + 19$  کدام است؟

(۴)  $2\sqrt{3}$

(۳) ۴

(۲)  $2\sqrt{5}$

(۱) ۲

هندسه‌ی تحلیلی، **ماتریس، دترمینان و دستگاه** - سوال ۹

۱۱۲- مجموع همسازهای نظیر درایه‌های ستون دوم ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$  کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۱۱

(۲) -۱۲

(۱) -۱۰

۱۱۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس  $C = A^t B$  کدام است؟

(۴) ۶۸

(۳) ۵۴

(۲) ۵۸

(۱) ۶۴

۱۱۴- مجموع درایه‌های ماتریس  $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & \sin \frac{\pi}{12} \\ -\sin \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{bmatrix}$  کدام است؟

(۴)  $2\sqrt{3}$

(۳)  $\sqrt{3}$

(۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) صفر

۱۱۵- اگر برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a+1 & a \\ b^2-3 & 0 \end{bmatrix}$  رابطه  $A + A^t = 0$  برقرار باشد، حاصل عبارت  $a^2 + b^2$  کدام است؟

(۴) ۱۷

(۳) ۱۲

(۲) ۱۰

(۱) ۵

۱۱۶- اگر نقطه  $(a, b)$  روی خط به معادله  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$  قرار داشته باشد، حاصل  $a + b$  کدام است؟

(۴) ۲

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) صفر

۱۱۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس  $\frac{1}{7}A^3$  کدام است؟

- (۱) -۵۰۰ (۲) -۲۵۰ (۳) -۱۰۰۰ (۴) -۱۲۵

۱۱۸- اگر به هر یک از درایه‌های سطرهای اول و دوم دترمینان  $\begin{vmatrix} c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ، ۲ واحد افزوده شود، حاصل دترمینان همواره چه تغییری می‌کند؟

- (۱) تغییر نمی‌کند. (۲) سه برابر می‌شود. (۳) چهار برابر می‌شود. (۴) پنج برابر می‌شود.

۱۱۹- اگر  $A$  ماتریس مربعی از مرتبه ۲ و  $\|A\| = \|A + 2A\|$ ، آنگاه دترمینان ماتریس  $2A$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۲ (۲) -۶ (۳) -۸ (۴) -۱۲

۱۲۰- اگر  $x + y + z = -1$  باشد، حاصل دترمینان  $\begin{vmatrix} 1+2x+y & y & 2z \\ 2x & 1+2y+z & z \\ x & 2y & 1+2z+x \end{vmatrix}$  همواره کدام است؟

- (۱)  $x^2 + y^2 + z^2$  (۲)  $-(xy + yz + zx)$  (۳)  $xyz$  (۴)  $xy + yz + zx$

ریاضیات گسسته، نظریه ی اعداد - سوال ۲ -

۱۲۱- باقی‌مانده تقسیم  $2^{23}$  بر  $43$  کدام است؟

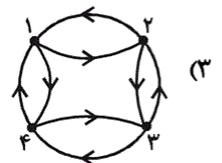
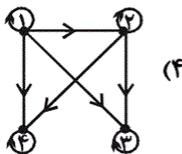
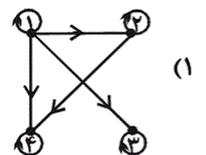
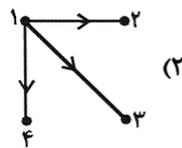
- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۳۹ (۴) ۳۵

۱۲۲- باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر ۱۴، ۱۶ و ۲۴ به ترتیب ۱۱، ۱۳ و ۲۱ است. رقم یکان کوچک‌ترین مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

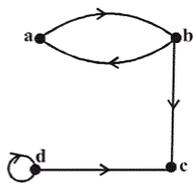
ریاضیات گسسته، ترکیبات - سوال ۷ -

۱۲۳- رابطه  $R$  روی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به صورت  $aRb \Leftrightarrow a|b$  تعریف شده است. گراف متناظر با این رابطه کدام است؟



۱۲۴- چند رابطه بازتابی روی یک مجموعه ۳ عضوی می‌توان نوشت که متقارن نباشد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۵۲ (۳) ۶۴ (۴) ۵۶



۱۲۵- اگر گراف روبه‌رو متناظر با رابطه  $R$  باشد، رابطه  $R \circ R$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۶  
(۲) ۵  
(۳) ۴  
(۴) ۳

۱۲۷- چند تابع پوشا از مجموعه  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  به مجموعه  $R = \{1, 2, 3, 4\}$  می‌توان تعریف کرد که شامل زوج مرتب‌های  $(1, 1)$  و  $(2, 2)$  باشد؟

- (۱) ۱۱۰  
(۲) ۱۲۵  
(۳) ۱۳۵  
(۴) ۱۵۰

۱۲۸- چه تعداد از اعضای مجموعه  $M = \{31, 32, 33, \dots, 300\}$  نسبت به ۲۱ اول هستند؟

- (۱) ۱۴۰  
(۲) ۱۵۰  
(۳) ۱۵۵  
(۴) ۱۸۰

۱۲۹- تعداد جواب‌های طبیعی معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  کدام است؟

- (۱) ۴۵  
(۲) ۴۸  
(۳) ۷۸  
(۴) ۹۳

۱۳۰- چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که نسبت به ۹۸ اول است؟

- (۱) ۳۸  
(۲) ۳۹  
(۳) ۴۱  
(۴) ۴۲

ریاضیات گسسته ، مجموعه ، ضرب دکارتی و رابطه - ۱ سوال

۱۲۶- رابطه  $R$  روی  $Z$  به صورت  $a^2 + d = c^2 + b \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$  تعریف شده است. کدام عضو در کلاس هم‌ارزی  $[(2, 5)]$  قرار دارد؟

- (۱)  $(3, 4)$   
(۲)  $(-1, 2)$   
(۳)  $(2, -3)$   
(۴)  $R$  هم‌ارزی نیست.

ریاضی پایه ، حد - ۴ سوال -

۱۰۷- مجموعه تمام مقادیر  $k$ ، که به ازای آن معادله  $2^{x-2|x|} = kx$  جواب دارد، کدام است؟

- (۱) هر مقدار  $k$   
(۲)  $k \neq 0$   
(۳)  $k > 0$   
(۴)  $0 < k < 1$

۱۰۸- ضابطه وارون تابع  $f(x) = 2^{x+1} - 3$  به صورت تابع  $f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x+a}{b}\right)$  است. مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

۱۰۹- معادله  $\frac{1}{1-\log x} + \frac{2}{1-\log x^2} = 3$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) جواب ندارد.

۱۱۰- مجموعه جواب‌های معادله  $|\log_3^x - 2| + \log_3^x = 2$  به صورت  $[0, a]$  است. مقدار  $\log(a+1)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

ریاضی پایه ، الگو و دنباله - ۲ سوال

۱۰۱- اگر  $x = \sqrt{8\sqrt{9\sqrt{81}}}$  باشد،  $x^2$  کدام است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۱۰۲- جمله هشتم یک دنباله هندسی صعودی برابر ۸ و حاصل ضرب جمله‌های دهم و هجدهم آن برابر  $2^{18}$  است. جمله سی و دوم این دنباله کدام است؟

- (۱)  $2^{27}$  (۲)  $2^{28}$  (۳)  $2^{31}$  (۴)  $2^{32}$

ریاضی پایه ، محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات - ۴ سوال

۱۰۳- مجموع تمام جملات یک دنباله حسابی  $2430$  می‌باشد. اگر مجموع  $10$  جمله اول این دنباله  $15$  و مجموع  $10$  جمله آخر آن  $1065$  باشد، این دنباله چند جمله دارد؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۲۲ (۳) ۵۳ (۴) ۳۴

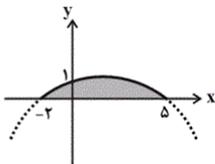
۱۰۴- اگر چندجمله‌ای  $p(x) = x^2 - ax^2 + bx + 1$  بر عبارت‌های  $x-2$  و  $x+1$  بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم  $p(x)$  بر چندجمله‌ای  $2x-1$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) صفر

۱۰۵- اگر اعداد غیرصفر  $a$  و  $b$  جواب‌های معادله  $3x^2 + ax + b = 0$  باشند؛ حاصل ضرب آن‌ها کدام است؟

- (۱)  $-\frac{7}{31}$  (۲)  $\frac{9}{34}$  (۳)  $-\frac{4}{27}$  (۴)  $\frac{11}{25}$

۱۰۶- نمای جانبی یک عدسی به کمک سهمی مقابل مدل سازی شده است. بیشترین ضخامت عدسی کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{25}$  (۲)  $\frac{1}{225}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{1}{55}$

۱۳۱- تصویر زیر را در نظر بگیرید.  
تبدیل، نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است. یعنی در تبدیل، هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است. به راحتی می‌توان نشان داد که نگاشت  $T(x, y) = (x + y, x)$ ، یک به یک است. به مثال نقض گزینه‌های دیگر توجه کنید:

(۱) گزینه:  $T(0, 1) = T(1, 0) = (1, 1)$

(۲) گزینه:  $T(1, 1) = T(1, -1) = (1, 0)$

(۳) گزینه:  $T(1, 0) = T(0, 0) = (1, 0)$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۳۲- تصویر زیر را در نظر بگیرید.  
(داریوش ناظمی)  
ضابطه بازتاب نسبت به خط  $y = \alpha$  به صورت  $R(x, y) = (x, 2\alpha - y)$  است. پس داریم:

$$M = (x, y) \xrightarrow{\text{بازتاب نسبت به خط } y=1} M' = (x, 2 - y)$$

$$M' = (x, 2 - y) \xrightarrow{\text{بازتاب نسبت به خط } y=-1} M'' = (x, -2 - (2 - y)) = (x, -4 + y)$$

نقطه  $M'' = (x, -4 + y)$ ، تصویر  $M = (x, y)$  تحت انتقال با بردار  $(0, -4)$  است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۹۱ تا ۱۰۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

تصاویر دو نقطه دلخواه از صفحه را تحت نگاشت  $T$  به دست می آوریم:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{تحت نگاشت } T} \begin{array}{c} m \\ m \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{تحت نگاشت } T} \begin{array}{c} 2m-1 \\ -1+m \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \end{array}$$

چون  $T$  ایزومتري است پس  $|OA| = |O'A'|$  و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} |O'A'| = \sqrt{(m-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 2} \\ |OA| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{m^2 - 2m + 2} = \sqrt{2} \Rightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\Rightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی: صفحه های ۱۴ تا ۹۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(محمد ابراهیم کیتی زاده)

تبدیل  $D(x, y) = (kx, ky)$  در صفحه مختصات، یک تجانس با نسبت تجانس  $k$  و مرکز تجانس  $(0, 0)$  را نشان می دهد که طول را  $|k|$  برابر و مساحت را  $k^2$  برابر می کند.

$$m = 1 - 2m \Rightarrow m = \frac{1}{3} \Rightarrow D(x, y) = (kx, ky) = \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right)$$

مساحت هر شکل صفحه بر اثر این تجانس،  $k^2 = \frac{1}{9}$  برابر می شود.

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی: صفحه ۱۱۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی اکبر جعفری)

محور بازتاب، عمود منصف پاره خط  $AA'$  است. اگر نقطه  $M$  وسط پاره خط  $AA'$  باشد، داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = 1, \quad y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = -2 \Rightarrow M = (1, -2)$$

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{-5 - 1}{4 + 2} = -1$$

$\Rightarrow m' = 1$ : شیب عمود منصف پاره خط  $AA'$

$$y - y_M = m'(x - x_M) \Rightarrow y + 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 3$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲

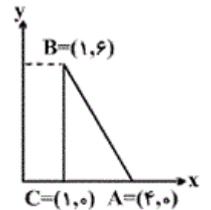
۱ ✓

(هومن نورائی)

با توجه به این که دوران یک تبدیل ایزومتري است، پس مثلث  $A'B'C'$  همنهشت با مثلث  $ABC$  بوده و مساحت‌های دو مثلث برابر است. با توجه به شکل، مثلث  $ABC$  قائم الزاویه است، پس مساحتش برابر است با:

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)



۴

۳

۲ ✓

۱

(محمدرضا دلورنژاد)

ضابطه دوران  $90^\circ$  حول مبدأ:  $T(x, y) = (-y, x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = -y \Rightarrow y = -X \\ Y = x \Rightarrow x = Y \end{cases}$$

تصویر خط  $3X + 2Y = 1$  تحت این دوران به صورت مقابل بدست می‌آید:

$$3(Y) + 2(-X) = 1 \Rightarrow 3Y - 2X = 1$$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه  $(1, 1)$  روی این خط قرار دارد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

$$T(x, y) = (y - 1, x) = (x', y')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 1 = x' \\ x = y' \end{cases}$$

$$x' - y' = 3 \Rightarrow y - 1 - x = 3 \Rightarrow y = x + 4$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیرحسین ابومصوب)

$$D(x, y) = (x', y') = (kx, ky) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{k} \\ y = \frac{y'}{k} \end{cases}$$

$$2x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow \frac{2x'}{k} + \frac{4y'}{k} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x' + 4y' - 5k = 0 \Rightarrow x' + 2y' - \frac{5k}{2} = 0$$

$$\text{با توجه فرض: } \frac{5k}{2} = 3 \Rightarrow k = \frac{6}{5}$$

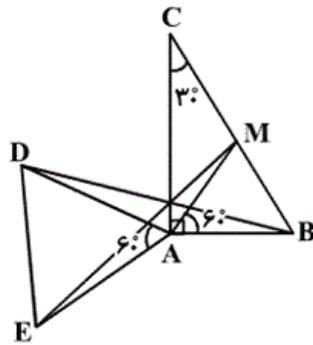
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱ ✓



در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$ ، نصف وتر است. از طرفی میانه وارد بر وتر نیز نصف وتر است، پس:

$$AB = AM = \frac{BC}{2}$$

در نتیجه مثلث  $ABM$  متساوی‌الاضلاع است و لذا  $\hat{BAM} = \hat{DAE} = 60^\circ$ . پس مثلث‌های  $MAE$  و  $BAD$  به حالت تساوی دو ضلع و زاویه بین آن‌ها همنهشت هستند و تحت یک دوران  $60^\circ$ ، حول نقطه  $A$ ، مثلث  $BAD$  روی مثلث  $MAE$  تصویر می‌شود. بنابراین  $BD$ ، پاره‌خط  $ME$  را با زاویه  $60^\circ$  قطع می‌کند. (هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

۴

۳✓

۲

۱

ابتدا آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع  $f$  را در  $t = 4$  به دست می‌آوریم که همان  $f'(4)$  است.

$$f(t) = t - \sqrt{t} \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow f'(4) = \frac{3}{4}$$

از طرفی برای آهنگ متوسط تغییر نیز داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 0}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۲۹)

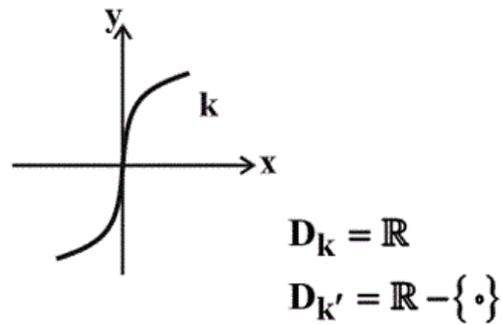
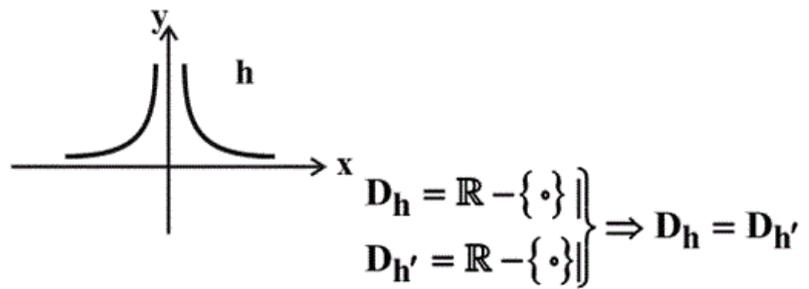
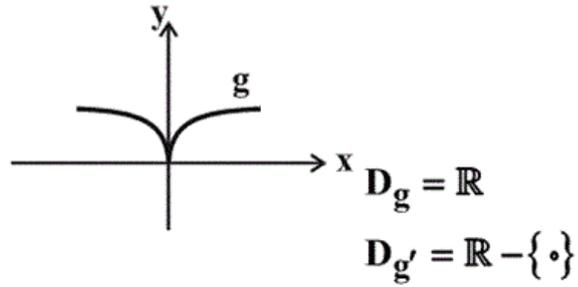
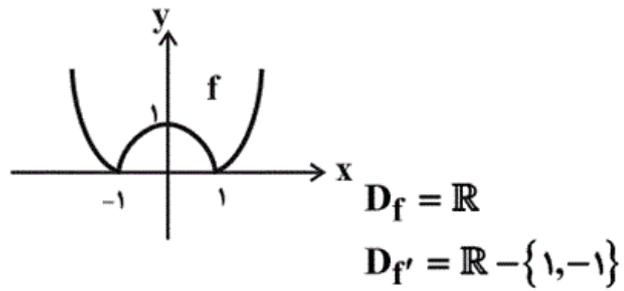
۴✓

۳

۲

۱

با توجه به شکل توابع داریم:



(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(میلاد منصوری)

$$f(g(x)) = 5(2x + |x^2 - 1|) - a|2x + |x^2 - 1| - 1|$$

در همسایگی نقطه  $x = 1$  عبارت  $|2x + |x^2 - 1| - 1|$  مثبت است، لذا:

$$|2x + |x^2 - 1| - 1| = 2x + |x^2 - 1| - 1$$

پس در همسایگی  $x = 1$  داریم:

$$\Rightarrow fog(x) = 10x + 5|x^2 - 1| - a(2x - 1 + |x^2 - 1|)$$

برای مشتق‌پذیری این تابع در  $x = 1$  لازم و کافی است که

$$5|x^2 - 1| - a|x^2 - 1| \text{ یا } (5 - a)|x^2 - 1| \text{ مشتق‌پذیر باشد. بنابراین:}$$

$$5 - a = 0 \Rightarrow a = 5$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میلاد سجاری لاریجانی)

صورت کسر، دنباله هندسی با قدر نسبت  $x$  می‌باشد.

$$\frac{1 + x + \dots + x^y}{1 + x^2} = \frac{1(1 - x^y)}{1 - x} = \frac{1 - x^y}{(1 - x)(1 + x^2)}$$

$$\frac{(1 - x^4)(1 + x^4)}{(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{(1 - x^2)(1 + x^2)(1 + x^4)}{(1 - x)(1 + x^2)}$$

$$= \frac{(1 - x)(1 + x)(1 + x^4)}{(1 - x)} \Rightarrow f(x) = (1 + x)(1 + x^4)$$

برای محاسبه مشتق در  $x = -1$ ، کافی است از عامل صفر کننده مشتق بگیریم.

$$f'(-1) = 1(1 + (-1)^4) = 2$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۳۱، ۱۳۲ و ۱۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

حد خواسته شده، مشتق تابع  $f$  در  $x = 2$  است، یعنی  $f'(2)$  را می‌خواهیم، از آنجایی که  $\cot \frac{\pi}{x}$  در  $x = 2$  صفر می‌شود، لذا برای محاسبه  $f'(2)$  کافی است از آن مشتق گرفته و در بقیه عبارت ضرب کرده و سپس مقدار  $x = 2$  را قرار دهیم:

$$\left(\cot \frac{\pi}{x}\right)' = -\left(\frac{-\pi}{x^2}\right)\left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{2 + \sqrt{2 \times 2}}{2 - 1} \left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۵۱ تا ۱۵۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{3}{4}-1} \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{-7}{(2x-3)^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4} \times \sqrt{\frac{2+2}{4-3}} \times \frac{-7}{(4-3)^2} = -\frac{21}{4}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میلاد سجادی لاریجانی)

$$f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = (f(x).f'(x))'$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f(x) \times f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x^2}$$

$$f(x) \times f'(x) = \frac{-1}{2x^2} \Rightarrow (f(x) \times f'(x))' = \frac{2x}{2x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{k}{x^n} \Rightarrow k=1, n=2 \Rightarrow k+n=3$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سیروس نصیری)

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$$

$$y + y' + y'' = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c + 2ax + b + 2a = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow ax^2 + (b+2a)x + (c+b+2a) = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+2a=1 \\ c+b+2a=1 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=-1, c=0 \Rightarrow a+b+c=0$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی شهرابی)

$$y = 4x - 5 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2 \\ f'(2) = 4 \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$g'(x) = 2x.f^{-1}(2x-1) + (x^2-1)2(f^{-1})'(2x-1)$$

$$\Rightarrow g'(2) = \underbrace{4f^{-1}(3)}_2 + \underbrace{6(f^{-1})'(3)}_{\frac{1}{4}} = 9/5$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴، ۱۵۷ و ۱۵۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(جوابش نیکنام)

فرض کنیم  $(a, b) \in f$ ، پس  $f(a) = b$  و در نتیجه:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{2f(a) + \sqrt{4f^2(a) + 1}} = \frac{1}{2b + \sqrt{4b^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{4b^2 + 1} - 2b \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۴

۳

۲

۱

(عیب شیعی)

با توجه به آن که  $e^{\text{Ln}M} = M$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x) = e^{\text{Ln}x^3} \text{Ln} \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) = x^3 \text{Ln} \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \text{Ln} \frac{x}{x+1} + \left( \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \right) (x^3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \text{Ln} \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow f'(1) = 3 \text{Ln} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -3 \text{Ln} 2 + \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

۴

۳

۲

۱

(ممدطاهر شعاعی)

$$f(x) = x^{\sin x} \Rightarrow \text{Ln} f(x) = \sin x \text{Ln} x$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم.}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \text{Ln} x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \left( \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} \times \text{Ln} \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin \frac{\pi}{2}} \left(0 + \frac{2}{\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{2}{\pi} = 1$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

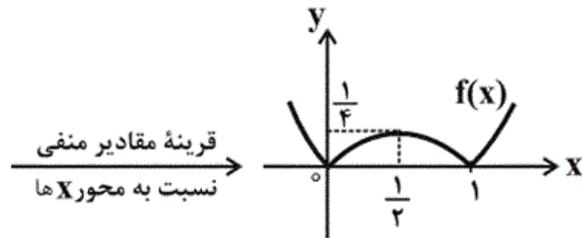
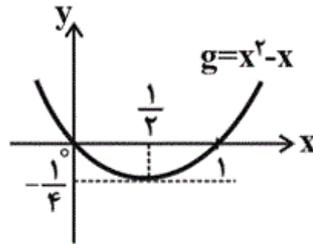
۴

۳

۲

۱

با توجه به رسم نمودار تابع  $f(x) = |x^2 - x|$  داریم:



قرینه مقادیر منفی  
نسبت به محور X ها

با توجه به نمودار بالا، نمودار تابع  $f$  سه نقطه بحرانی دارد. دو نقطه گوشه‌ای  $x = 0$

و  $x = 1$  و نقطه  $x = \frac{1}{2}$  که مشتق در آن برابر صفر است.

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۷۱ و ۱۷۲)

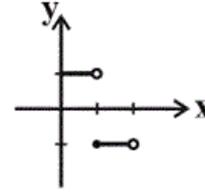
۴

۳

۲

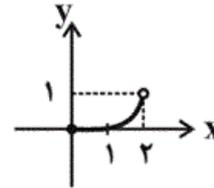
۱

$$y = \cos(\pi[x]) \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = \cos \pi = -1 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$



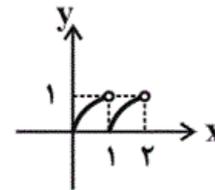
$x = 1$  مینیمم نسبی است.

$$y = (x-1)^2[x] \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = (x-1)^2 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$



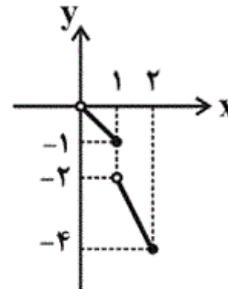
$x = 1$  مینیمم نسبی است.

$$y = \sqrt{x-[x]} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = \sqrt{x-1} \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = \sqrt{x} \end{cases}$$



$x = 1$  مینیمم نسبی است.

$$y = x[-x] \Rightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x < -1 \Rightarrow y = -2x \\ 0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow y = -x \end{cases}$$



$x = 1$  مینیمم نسبی تابع نیست.

بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۶۹)

۴

۳

۲

۱

در نقطه (۱) مشتق تابع صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد، پس اکسترمم نیست.  
در نقطه (۲) مشتق به یک باره از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه مینیمم نسبی و همین‌طور گوشه‌ای است.

در نقطه (۳) مشتق تابع از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه ماکزیمم نسبی است.

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۶۹)

۴

۳

۲

۱

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 3) - 2x(ax + b)}{(x^2 + 3)^2}$$

چون  $x = -1$ ، طول نقطهٔ اکسترمم نسبی  $f$  است، پس  $f'$  در این نقطه صفر است.

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 4a - 2a + 2b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-a + b}{1 + 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow -a + b = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} b = 1, a = -1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-(x^2 + 3) - 2x(-x + 1)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

$f'$  را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-1		3	
f'	+	○	-	○	+
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

پس طول نقطهٔ اکسترمم نسبی دیگر  $f$ ،  $x = 3$  و نوع آن مینیمم است.

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۶۹)

۴

۳

۲

۱

ابتدا طول نقاط بحرانی تابع  $f$  را در بازه  $[0, 3]$  پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 3x + k \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

فقط  $x = 1$  در این بازه قرار دارد.

حال مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه حساب می‌کنیم:

$$f(0) = k \quad \text{و} \quad f(1) = k - 2, \quad f(3) = 18 + k$$

پس ماکزیمم و مینیمم مطلق  $f$  در این بازه به ترتیب  $k + 18$  و  $k - 2$  هستند.

$$\xrightarrow{\text{قرینه همدیگرند}} k - 2 + k + 18 = 0 \Rightarrow k = -8$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

حجم جعبه ساخته شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v(x) = (1 - 2x)(1 - 2x)x = x(1 - 2x)^2$$

توجه داشته باشید که  $0 < x < \frac{1}{2}$  می‌باشد. حال باید مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع

$v(x)$  را در بازه  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  به دست بیاوریم. داریم:

$$v'(x) = (1 - 2x)^2 - 4x(1 - 2x) = (1 - 2x)(1 - 6x)$$

$$v'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = \frac{1}{6}$$

حال چون  $v(0) = v\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  است، به ازای  $x = \frac{1}{6}$  حجم ماکزیمم به دست می‌آید:

$$v_{\max} = v\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{27}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos x (-\sin x) = \frac{1}{2} - \sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

با تعیین علامت  $f'$  در بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  داریم:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	+	0	-	0
f	↗		↘	↗

بنابراین گزینه «۳» صحیح است.

تذکر: برای تعیین علامت توابع پیوسته، می‌توانیم از روش عدد گذاری استفاده کنیم، به این ترتیب که در هر بازه عددی را در ضابطه تابع جای گذاری می‌کنیم و علامت آن،

علامت عبارت موردنظر در آن بازه است. مثلاً در این سؤال،  $f'(0)$ ،  $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$  و

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$  به خوبی علامت بازه‌ها را نشان می‌دهند.

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۷۸ تا ۱۸۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عرفان صادقی)

تابع پیوسته و مشتق پذیر  $f$  اکیداً صعودی است اگر و فقط اگر  $f'(x) \geq 0$  باشد، به شرط آنکه نقاطی که در آن  $f'$  صفر است، تشکیل پاره خط ندهند.

$$f'(x) = mx^2 + (m+1)x + m \geq 0$$

برای اینکه نامساوی فوق همواره صحیح باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} m > 0 & (1) \end{cases}$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4m^2 \leq 0 \Rightarrow -3m^2 + 2m + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(3m+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} m \in [1, +\infty)$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۷۸ تا ۱۸۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمداً ابراهیم کیتی زاده)

$$y^2 - 2y - 4x^2 - 16x = 19 \Rightarrow (y^2 - 2y + 1) - (4x^2 + 16x + 16) = 4$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 - 4(x^2 + 4x + 4) = 4 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{1} = 1$$

$$a^2 = 4, b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\text{فاصله کانونی } |FF'| = 2c = 2\sqrt{5}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۶ تا ۸۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(معمداً ابراهیم کیتی زاده)

$$a_{ij} \text{ همسازۀ نظیر درایه } A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$A \text{ مجموع همسازۀ های نظیر درایه های ستون دوم } A_{12} + A_{22} + A_{32}$$

$$= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 3 = 6$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(معمداً ربیعی)

$$C = A^T B$$

$$\Rightarrow c_{22} = A_{21} A_{12} B_{22} = [4 \quad 0 \quad 6] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 58$$

(ستون سوم B) (سطر دوم A)

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$A = R_{\frac{\pi}{4}} \times R_{-\frac{\pi}{12}} = R_{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}} = R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

$$A \text{ مجموع درایه‌های } = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۲)

۴

۳✓

۲

۱

$$A + A^t = O \Rightarrow A^t = -A \Rightarrow \text{پادمتقارن است}$$

$$A \Rightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ b^2 - 3 = -a \Rightarrow b^2 - 3 = 1 \Rightarrow b^2 = 4 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = (-1)^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۴✓

۳

۲

۱

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a(1-2) - b(0-(-1)) + 1(0-(-1)) = 0$$

$$\Rightarrow -a - b = -1 \Rightarrow a + b = 1$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه ۱۲۹)

۴

۳

۲✓

۱

(کاملاً با تقرزاده)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

ساروس  $(-3 + 0 + 6) - (1 + 12 + 0) = 3 - 13 = -10$

$$\left| \frac{1}{2} A^2 \right| = \frac{1}{2^2} |A|^2 = \frac{1}{4} (-10)^2 = -\frac{1000}{4} = -125$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های 117 تا 125)

4 ✓

3

2

1

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

$$\begin{vmatrix} c+2 & b+2 & a+2 \\ 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c & b & a \\ 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های 118 تا 124)

4

3

2 ✓

1

(امید ممد طاهری)

$$||A|A + 2A| = |A|$$

$$\Rightarrow |A| \underbrace{(|A| + 2)}_{\text{عدد}} = |A| \Rightarrow (|A| + 2)^2 |A| = |A|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \Rightarrow |2A| = 4|A| = 0 \\ |A| + 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} |A| = -1 \\ |A| = -3 \end{cases} \Rightarrow |2A| = 2^2 |A| = \begin{cases} -4 \\ -12 \end{cases} \end{cases}$$

دترمینان ماتریس  $2A$  تنها یکی از مقادیر  $0$ ،  $-4$  و  $-12$  می‌تواند باشد.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های 118 تا 126)

4 ✓

3

2

1

(معمداً ابراهیم کیتی زاده)

ستون‌های دوم و سوم را به ستون اول اضافه و از عبارت  $1 + 2(x + y + z)$  در ستون اول فاکتور می‌گیریم.  $x + y + z$  را مساوی  $(-1)$  قرار می‌دهیم، سپس سطر اول را از سطرهای دوم و سوم کم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{دترمینان} &= (1-2) \begin{vmatrix} 1 & y & 2z \\ 1+y+z & -z & \\ y & 1+x & \end{vmatrix} \\ &= -((1+y+z)(1+x) + yz) = -(1+x+y+z + xy + yz + zx) \\ 1+x+y+z &= 1-1=0 \Rightarrow \\ \text{حاصل دترمینان} &= -(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهرداد وقوعی)

$$\begin{cases} 2^y = 128 \\ 43 \times 3 = 129 \end{cases} \Rightarrow 2^y = 129 - 1 \equiv -1 \pmod{43}$$

$$\Rightarrow 2^{23} = (2^y)^2 \times 2^2 \equiv (-1)^2 \times 4 \equiv -4 \equiv 39 \pmod{43}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۱ تا ۵۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\begin{cases} a \equiv 11 \\ a \equiv 13 \\ a \equiv 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3 \equiv 14 \equiv 0 \\ a + 3 \equiv 16 \equiv 0 \\ a + 3 \equiv 24 \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + 3 \equiv 0 \pmod{[14, 16, 24]} \Rightarrow a + 3 \equiv 0 \pmod{336} \Rightarrow a \equiv -3 \pmod{336}$$

$$\Rightarrow a = 336k - 3, k \in \mathbb{N}$$

$$\stackrel{k=1}{\Rightarrow} \min(a) = 333$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۱ تا ۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هومن نورائی)

رابطه  $R$  به صورت زیر است:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$$

گراف گزینه (۱) متناظر با رابطه  $R$  می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نکات درسی: (۱) تعداد رابطه‌های بازتابی روی یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با:

$$2n^2 - n$$

(۲) تعداد رابطه‌های بازتابی و متقارن روی یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با:

$$\frac{n^2 - n}{2}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M(R \circ R) = [M(R)]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس رابطه  $R \circ R$ ، پنج عضو دارد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

هر کدام از این توابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f = \{(1,1), (2,2), (3,0), (4,0), (5,0), (6,0)\}$$

اگر مجموعه این دسته از توابع را با  $S$  و زیر مجموعه‌هایی از  $S$  که برد آنها

به ترتیب فاقد ۳ و فاقد ۴ باشد را با  $A$  و  $B$  نمایش دهیم، داریم:

$$|S| = 4^6 = 256$$

$$|A| = |B| = 3^6 = 81$$

$$|A \cap B| = 2^6 = 16$$

در این صورت مجموعه توابع پوشا معادل مجموعه  $\bar{A} \cap \bar{B}$  است. داریم:

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= 256 - (81 + 81 - 16) = 256 - 146 = 110$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

اگر عددی نسبت به ۲۱ اول باشد نسبت به عوامل اول ۲۱ یعنی ۷ و ۳ اول است. بنا بر

اصل شمول و عدم شمول داریم:

(تعداد اعضای از مجموعه  $M$  که بر ۳ بخش پذیرند.)

$$|A| = \left[ \frac{300}{3} \right] - \left[ \frac{30}{3} \right] = 90$$

(تعداد اعضای از مجموعه  $M$  که بر ۷ بخش پذیرند.)

$$|B| = \left[ \frac{300}{7} \right] - \left[ \frac{30}{7} \right] = 42 - 4 = 38$$

(تعداد اعضای از مجموعه  $M$  که بر ۲۱ بخش پذیرند.)

$$|A \cap B| = \left[ \frac{300}{21} \right] - \left[ \frac{30}{21} \right] = 14 - 1 = 13$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

$$X_4 = 1 \Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 = 11$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{11-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

$$X_4 = 2 \Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 = 4$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$45 + 3 = 48$$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی معادله برابر است با:

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۷)

 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

$$\begin{aligned}
 98 &= 2 \times 7^2 \Rightarrow \varphi(98) = 2 \times 7^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \\
 &= 2 \times 7^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{7} = 42
 \end{aligned}$$

۴۲ عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۹۸ وجود دارد که نسبت به آن اول هستند. از بین

آنها اعداد ۱، ۳، ۵، ۹، یک رقمی هستند؛ از طرفی عدد ۹۹ دو رقمی است و نسبت به

۹۸ اول است، پس تعداد اعداد طبیعی دو رقمی که نسبت به ۹۸ اولند برابر است با:

$$42 - 4 + 1 = 39$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

به راحتی می‌توانیم ببینیم که  $R$ ، ویژگی‌های بازتابی، تقارنی و تعدی را دارد که نشان می‌دهد یک رابطه هم‌ارزی است. اکنون خواهیم داشت:

$$[(2,5)] = \{(a,b) \in Z^2 \mid (a,b)R(2,5)\}$$

$$= \{(a,b) \mid a^2 + 5 = 4 + b\} = \{(a,b) \mid a^2 - b + 1 = 0\}$$

یک محاسبه ساده در گزینه ۲ نشان می‌دهد که  $(-1)^2 - 2 + 1 = 0$ ،

پس  $(-1,2) \in [(2,5)]$ .

(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۴

۳

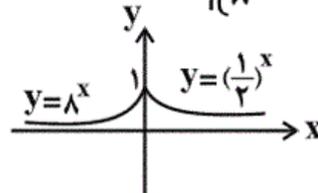
۲ ✓

۱

(کاظم اجلالی)

به نمودار تابع  $y = 2^{x-2|x|}$  توجه کنید:

$$y = 2^{x-2|x|} = \begin{cases} 2^{-x} & ; x \geq 0 \\ 2^{3x} & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x \geq 0 \\ 8^x & ; x < 0 \end{cases}$$



واضح است که اگر  $k = 0$  باشد، معادله به صورت  $2^{x-2|x|} = 0$  در می‌آید که جواب ندارد و اگر  $k \neq 0$  باشد، خط  $y = kx$  نمودار تابع  $y = 2^{x-2|x|}$  را قطع می‌کند و معادله مورد نظر جواب دارد.

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۶ تا ۹۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$y = f(x) = 2^{x+1} - 3 \Rightarrow 2^{x+1} = y + 3 \Rightarrow \log_2(y + 3) = x + 1$$

$$\Rightarrow x = \log_2(y + 3) - 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \log_2(x + 3) - 1$$

$$= \log_2(x + 3) - \log_2 2 = \log_2\left(\frac{x + 3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۹)

۴

۳✓

۲

۱

قرار می‌دهیم:  $\log x = t$ . بنابراین داریم:

$$\frac{1}{1-t} + \frac{2}{1-2t} = 3; \left(t \neq 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 3 - 4t = 3(1-t)(1-2t) \Rightarrow 6t^2 - 5t = 0$$

$$\Rightarrow t(6t - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \log x = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 10^{\frac{5}{6}} \end{cases}$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۶)

۴

۳

۲✓

۱

 $x > 0$ : دامنه معادله

حال معادله را به صورت  $|\log_3^x - 2| = 2 - \log_3^x$  بازنویسی می‌کنیم.

پس داریم:  $\log_3^x - 2 \leq 0 \Rightarrow \log_3^x \leq 2 \Rightarrow \log_3^x \leq \log_3^9 \Rightarrow x \leq 9$

یعنی مجموعه جواب‌های نامعادله، بازه  $(0, 9]$  و در نتیجه  $a = 9$  است.

$$\Rightarrow \log(a + 1) = \log 10 = 1$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

$$\sqrt[4]{81} = 3 \Rightarrow x = \sqrt{8^3 \sqrt{27}} = \sqrt{24^3} \Rightarrow x^2 = 24^3$$

(ریاضیات ۲- الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۲)

۴✓

۳

۲

۱

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} t_8 = t_1 r^7 = 8 = 2^3 \\ t_1 \cdot t_{18} = t_1^2 r^{26} = 2^{18} \end{cases} \quad \text{راه حل اول:}$$

$$\xrightarrow{\text{دنباله صعودی است}} \begin{cases} r = 2 \\ t_1 = 2^{-4} \end{cases} \Rightarrow t_n = 2^{n-5} \Rightarrow t_{32} = 2^{27}$$

راه حل دوم: در یک دنباله هندسی اگر برای اعداد طبیعی  $m, n, p, q$  داشته باشیم:  $m+n=p+q$ ، رابطه  $t_m t_n = t_p t_q$  برقرار است. در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow t_1 \cdot t_{18} = t_8 t_{20} \Rightarrow t_{20} = 2^{15}$$

$$t_{32} = \frac{2^{30}}{2^3} = 2^{27} \quad \text{از طرفی } t_{20}^2 = t_8 t_{32} \text{؛ بنابراین:}$$

(ریاضیات ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 15$$

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_{n-9} = 1065$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + a_{10} + a_{n-9} = 1080$$

از طرفی در هر دنباله حسابی داریم:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{10} + a_{n-9}$$

$$\Rightarrow 10(a_1 + a_n) = 1080 \Rightarrow a_1 + a_n = 108$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 2430 \Rightarrow \frac{n}{2}(108) = 2430 \Rightarrow n = 45$$

(مسابان - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کظم اجلائی)

توجه کنید که باقی‌مانده تقسیم  $p(x)$  بر  $x-2$  و  $x+1$  به ترتیب برابر  $p(2)$  و  $p(-1)$  است. پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(2) = 8 - 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a - 2b = 9 \\ p(-1) = -1 - a - b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow b = -\frac{3}{2}, a = \frac{3}{2} \Rightarrow p(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

باقی‌مانده تقسیم  $p(x)$  بر  $2x-1$  برابر  $p\left(\frac{1}{2}\right)$  است.

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

$$P = ab = \frac{b}{3} \xrightarrow{b \neq 0} a = \frac{1}{3}$$

$$S = a + b = -\frac{a}{3} \xrightarrow{a = \frac{1}{3}} \frac{1}{3} + b = -\frac{1}{9} \Rightarrow b = -\frac{4}{9} \Rightarrow ab = -\frac{4}{27}$$

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$y = a(x+2)(x-5) \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=1}} 1 = a \times (-10) \Rightarrow a = -\frac{1}{10}$$

پس ضابطه تابع به صورت  $y = -\frac{(x+2)(x-5)}{10}$  است. بیش‌ترین ضخامت عدسی، عرض مربوط به رأس سهمی است؛ بنابراین داریم:

$$x_S = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_{\max} = \frac{\frac{3}{2} \times \left(-\frac{7}{2}\right)}{-10} = \frac{49}{40} = 1/225$$

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱