



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

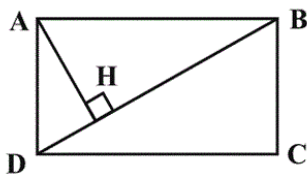


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۱۰۱- اگر سه رأس یک مثلث روی محیط یک دایره باشند، آن گاه کدام گزینه درست است؟

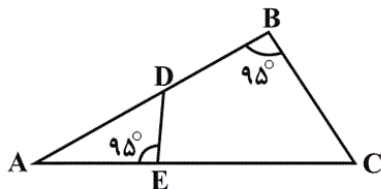
- (۱) محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث، مرکز دایره است.
- (۲) مرکز دایره حتماً روی کوچک‌ترین ضلع مثلث قرار دارد.
- (۳) محل تلاقی نیمسازهای مثلث، مرکز دایره است.
- (۴) مرکز دایره حتماً داخل مثلث قرار می‌گیرد.

۱۰۲- مطابق شکل زیر در مستطیلی به طول ۱۴، از رأس A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم. اگر  $BH = 10$  باشد، طول قطر AC کدام است؟



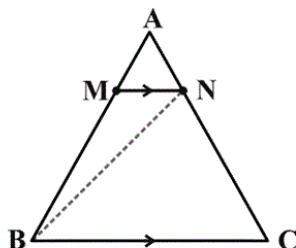
- کدام است؟
- (۱)  $20/4$
  - (۲)  $16/2$
  - (۳)  $19/6$
  - (۴)  $17/2$

۱۰۳- در شکل زیر طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث بزرگ‌تر برابر ۱۲ است. اگر  $AE = 4$  و  $AB = 8$  باشد، طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث کوچک‌تر کدام است؟



- کدام است؟
- (۱) ۸
  - (۲) ۶
  - (۳) ۴
  - (۴) ۲

۱۰۴- در شکل زیر  $MN \parallel BC$  و  $\frac{MN}{BC} = \frac{2}{7}$ ، مساحت مثلث BNC چند برابر مساحت مثلث ABN است؟



- (۱)  $\frac{2}{7}$
- (۲)  $\frac{7}{2}$
- (۳)  $\frac{5}{2}$
- (۴)  $\frac{2}{5}$

۱۰۵- مساحت ناحیه‌ای درون یک مربع به ضلع ۲ واحد، که فاصله نقاط درون آن ناحیه از هر رأس مربع بیشتر از ۱ واحد می‌باشد، کدام است؟

- (۱)  $2 - \pi$       (۲)  $4 - \pi$       (۳)  $4 - \frac{\pi}{2}$       (۴)  $2 - \frac{\pi}{2}$

۱۰۶- مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۶ با مثلثی به اضلاع ۲،  $a$  و  $b$  متشابه است. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مثلث کوچک‌تر می‌تواند باشد؟

- (۱)  $1/5$       (۲) ۲      (۳)  $3/5$       (۴) ۹

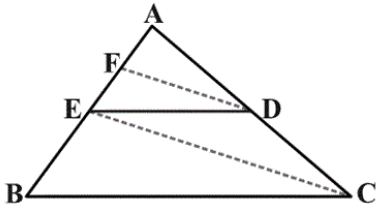
۱۰۷- اگر برای مقادیر مثبت  $a$  و  $b$ ،  $c$  داشته باشیم:  $\frac{a}{3} = \frac{4}{b} = \frac{5}{a+c}$  و  $b+c=6$ ، حاصل  $a-b+c$  کدام است؟

- (۱) ۴      (۲) ۳      (۳) ۲      (۴) ۱

۱۰۸- در دوزنقه  $ABCD$  قاعده بزرگ سه برابر قاعده کوچک است. پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند، مساحت دوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

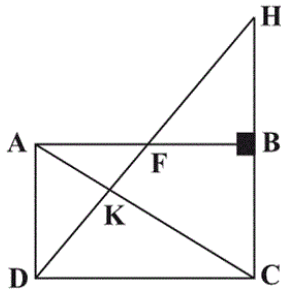
- (۱)  $1/2$       (۲)  $1/3$       (۳)  $2/3$       (۴)  $3/5$

۱۰۹- در مثلث  $ABC$  داریم:  $DE \parallel BC$  و  $DF \parallel EC$ ؛ اگر  $AB = 12/25$  و  $FE = 3$  باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط  $BE$  کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) ۹      (۲)  $1/25$       (۳) ۷      (۴) ۳

۱۱۰- چهارضلعی  $ABCD$  مستطیل بوده و  $DK = 6$  و  $FH = 5$  می‌باشد. طول پاره‌خط  $KF$  کدام است؟ (نقاط  $H$ ،  $F$ ،  $K$  و  $D$  در یک راستا هستند.)



- (۱) ۹      (۲) ۵      (۳) ۴      (۴)  $4/5$

۹۱- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = |x-1| + |x+3|$  کدام است؟

(۴) بی‌شمار

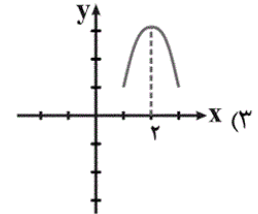
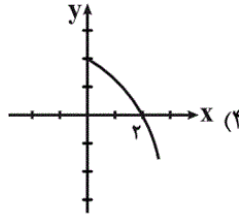
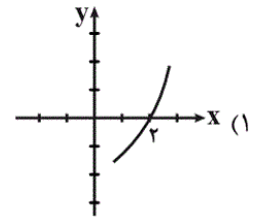
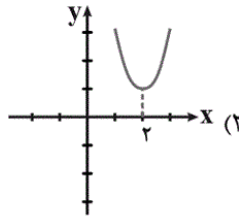
(۳) دو

(۲) یک

(۱) صفر

$x$	۲		
$f'$	-	۰	+

۹۲- جدول روبه‌رو، تعیین علامت مشتق تابع  $f$  است. نمودار  $f$  کدام می‌تواند باشد؟



۹۳- منحنی تابع درجه سوم  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$  در بازه  $(a, b)$  اکیداً نزولی است. اگر  $b - a$  بیشینه باشد، نقطهٔ وسط

بازه کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۹۴- اگر نقطه  $A(3, 6)$  اکسترمم نسبی تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{ax + b}$  باشد، آن‌گاه حاصل  $b - a$  کدام است؟

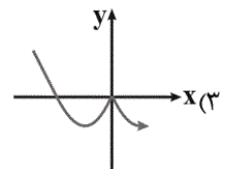
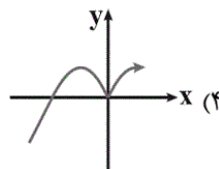
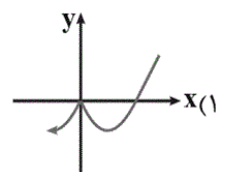
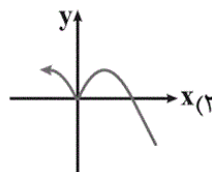
(۴) ۱

(۳) -۳

(۲) ۳

(۱) -۱

۹۵- نمودار تابع  $y = 3\sqrt[3]{x^5} - 15\sqrt[3]{x^2}$  شبیه کدام است؟



۹۶- تابع  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}$  در  $x = a$  دارای نقطهٔ بحرانی و مشتق‌پذیر است. مقدار  $a$  کدام است؟

(۴)  $x = -\frac{1}{2}$

(۳)  $x = \frac{1}{2}$

(۲)  $x = 1$

(۱)  $x = 0$

۹۷- به ازای کدام مقادیر  $a$ ، نقطه‌ای به طول  $\frac{6}{7}$ ، نقطه بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = (x^2) \times (\sqrt[3]{2x-a})$  است؟

- (۱)  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{10}{7}\right\}$  (۲)  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{12}{7}\right\}$  (۳)  $\left\{2, \frac{10}{7}\right\}$  (۴)  $\left\{2, \frac{12}{7}\right\}$

۹۸- تعداد نقاط ماکزیمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۹۹- اگر  $m$  عددی حقیقی و غیرصفر باشد، شیب خط واصل بین نقاط اکسترمم نسبی منحنی تابع  $f(x) = \frac{4x^2 - mx + m^2}{x - m}$

کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۲

۱۰۰- برد تابع  $y = \frac{5}{3x^4 - 4x^3 + 3}$  کدام است؟ (عبارت مخرج کسر ریشه ندارد.)

- (۱)  $\left(0, \frac{5}{3}\right)$  (۲)  $\left[0, \frac{5}{3}\right]$  (۳)  $\left(0, \frac{5}{3}\right]$  (۴)  $\left[0, \frac{5}{3}\right)$

### ۱۰۱- گزینه ۱»

(معمرسن سلامی هسینی)

این دایره، دایره محیطی مثلث نام دارد که مرکز آن محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است، زیرا عمودمنصف‌های اضلاع از دو سر اضلاع که همان رئوس مثلث هستند، به یک فاصله است.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

### ۱۰۲- گزینه ۳»

(عمیدرضا دهقانی)

با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $ADB$  داریم:  $AB^2 = HB \times BD$

$$\Rightarrow 14^2 = 10 \times BD \Rightarrow BD = 19/6$$

$BD$  و  $AC$  هر دو قطر مستطیل هستند، پس:

$$AC = BD = 19/6$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به این که زاویه  $B$  بزرگ‌تر از  $90^\circ$  است، پس ضلع  $AC$  بزرگ‌ترین ضلع مثلث بزرگ‌تر می‌باشد یعنی  $AC = 12$ . از طرفی  $AE = 4$  و  $AB = 8$  است. دو مثلث  $ABC$  و  $ADE$  به دلیل تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{12}{AD} = \frac{8}{4} \Rightarrow AD = 6$$

بنابراین طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث کوچک‌تر برابر ۶ است.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۶)

۴

۳

۲✓

۱

$$\Rightarrow \begin{cases} AN = 2y \\ NC = 5y \end{cases}$$

ارتفاع مشترک این دو مثلث را رسم می‌کنیم  $(BH)$ ، داریم:

$$\frac{S_{\Delta BNC}}{S_{\Delta ABN}} = \frac{\frac{1}{2} \times BH \times 5y}{\frac{1}{2} \times BH \times 2y} = \frac{5}{2}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۱)

۴

۳✓

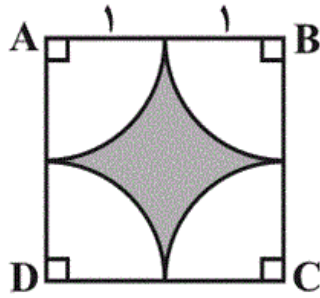
۲

۱

۱۰۵- گزینه «۲»

(افشین گلستانی)

از هر رأس مربع، کمانی به شعاع ۱ واحد در داخل مربع رسم می‌کنیم. مساحت ناحیه خواسته شده در صورت سؤال، همان مساحت ناحیه رنگی است.



$$S = S_{\text{مربع}} - 4 \times S_{\text{ربع دایره}} = 1 - 4 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} = 1 - \pi$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

۴

۳

۲

۱

۱۰۶- گزینه «۴»

(سروش موئینی)

نسبت تشابه می‌تواند  $\frac{3}{2}$ ،  $\frac{4}{2}$  یا  $\frac{6}{2}$  باشد و نسبت مساحت‌ها می‌شود:

$3^2$  یا  $2^2$  یا  $1/5^2$

پس مساحت مثلث بزرگ  $2/25$  یا  $4$  یا  $9$  برابر مثلث کوچک می‌تواند باشد.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۴

۳

۲

۱



$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{9}{a+6} \Rightarrow a^2 + 6a = 27 \Rightarrow a^2 + 6a - 27 = 0$$

$$\Rightarrow (a+9)(a-3) = 0 \begin{cases} \text{ق ق } a=3 \\ \text{غ ق ق } a=-9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{b} = \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow b = 4$$

$$\frac{5}{a+c} = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{5}{3+c} = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$a - b + c = 3 - 4 + 2 = 1$$

در نتیجه:

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

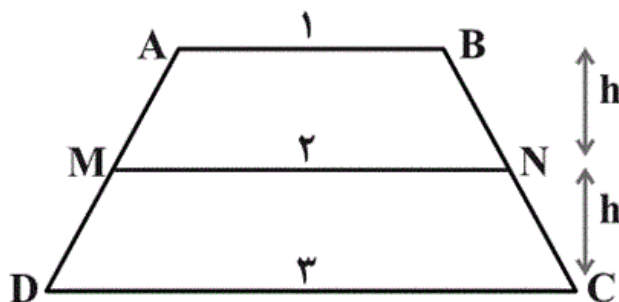
### ۱۰۸- گزینه «۴»

(معمدمصطفی ابراهیمی)

در ذوزنقه  $ABCD$  اگر اندازه قاعده‌ها را برابر ۱ و ۳ واحد فرض کنیم

می‌دانیم  $MN = \frac{AB+DC}{2} = \frac{4}{2} = 2$  می‌شود. از طرفی ارتفاع دو ذوزنقه

ایجاد شده با هم برابر است.



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{\frac{1}{2}(AB+MN) \times h}{\frac{1}{2}(MN+DC) \times h} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC \sim \Delta AED : \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \\ \Delta AFD \sim \Delta AEC : \frac{AF}{FE} = \frac{AD}{DC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FE}$$

$$\Rightarrow \frac{12/25 - x}{x} = \frac{9/25 - x}{3}$$

$$\Rightarrow (9/25 - x)(x) = 3(12/25 - x)$$

$$\Rightarrow 9/25x - x^2 = 36/25 - 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 12/25x + 36/25 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 7)(x - 5/25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 5/25 \end{cases}$$

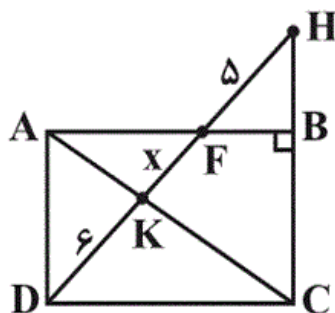
(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۶)

۴

۳ ✓

۲

۱



$\triangle FBH$  و  $\triangle ADF$  متشابه هستند. پس:

$$\frac{5}{x+6} = \frac{FB}{AF}$$

$\triangle KDC$  و  $\triangle AKF$  متشابه هستند. پس:

$$\frac{6}{x} = \frac{DC}{AF} \xrightarrow{DC=AB} \frac{6}{x} = \frac{AB}{AF} = \frac{AF+FB}{AF} = 1 + \frac{5}{x+6}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{x+11}{x+6} \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x-4) = 0 \xrightarrow{x>0} x = 4$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۴

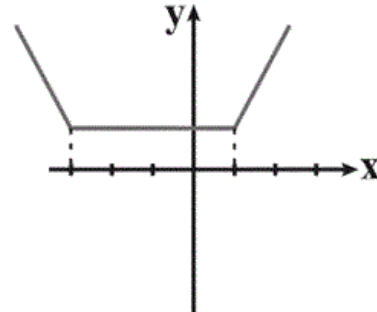
۳

۲

۱

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & x < -3 \\ 4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 2x + 2 & 1 < x \end{cases}$$



تابع در بازه  $(-3, 1)$  ثابت است که مشتق تابع در این نقاط برابر با صفر

است، پس بی‌شمار نقطه بحرانی دارد. (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱

۹۲- گزینه «۲»

(سروش مؤثینی)

مشتق  $f$  قبل از ۲ منفی و بعد از ۲ مثبت است، پس تابع  $f$  قبل از ۲ نزولی

و بعد از آن صعودی است که این حالت تنها در گزینه «۲» دیده می‌شود.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱

در بازه  $(a, b)$  مشتق تابع منفی است.

$$f'(x) = x^2 - 4x + 1, f' < 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$$

چون ریشه‌های معادله اعداد صحیح نیستند و در صورت سؤال فقط وسط بازه

خواسته شده کافی است طول رأس سهمی به معادله  $x^2 - 4x + 1$  را به

عنوان جواب انتخاب کنیم که وسط بازه‌ای است که  $f'$  در آن منفی است:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2} = 2$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$y = \frac{x^2 - 3}{ax + b} \xrightarrow{A(3,6)} 6 = \frac{9 - 3}{3a + b} \Rightarrow 3a + b = 1$$

$$y' = \frac{2x(ax + b) - a(x^2 - 3)}{(ax + b)^2} \xrightarrow{x=3} y'(3) = 0$$

$$\Rightarrow 6(3a + b) - 6a = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -2 \Rightarrow b - a = -3$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

کافی است اکستریم‌های نسبی تابع را بیابیم.

$$y' = 3\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right) - 15\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{10}{\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-10}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\begin{cases} 5x-10=0 \Rightarrow x=2 \\ \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

x	0	2
f'	+   -	-   +

↖ max نسبی
↘ min نسبی ↗

پس باید در  $x=0$ ، ماکزیمم نسبی و در  $x=2$ ، مینیمم نسبی داشته باشد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1) - \sqrt[3]{x}}{(x-1)^2}$$

حال مخرج مشترک می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{x-1-3x}{3\sqrt[3]{x^2}(x-1)^2} = \frac{-1-2x}{3\sqrt[3]{x^2}(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{قق } x = -\frac{1}{2} \\ \text{قق } x = 0 \\ \text{غقق } x = 1 \end{cases}$$

تابع در  $x=0$  و  $x=-\frac{1}{2}$  نقطه بحرانی دارد ولی  $x=1$  در دامنه تابع

نیست و نمی‌تواند بحرانی باشد.

۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا برای ساده شدن مشتق‌گیری، عبارت  $x^2$  را زیر رادیکال می‌بریم:

$$f(x) = (x^2)(\sqrt{2x-a}) = \sqrt{x^6(2x-a)} = \sqrt{2x^7 - ax^6}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{14x^6 - 6ax^5}{3\sqrt{(2x^7 - ax^6)^2}}$$

حال نقاطی را که  $f'$  صفر است و یا موجود نیست، می‌یابیم:

$$14x^6 - 6ax^5 = 0 \Rightarrow 2x^5(7x - 3a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3a}{7} = \frac{6}{7} \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$2x^7 - ax^6 = 0 \Rightarrow x^6(2x - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{a}{2} = \frac{6}{7} \Rightarrow a = \frac{12}{7} \end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر  $a$  برای آن که نقطه‌ای به طول  $\frac{6}{7}$  نقطه بحرانی تابع

باشد، به صورت  $\{2, \frac{12}{7}\}$  است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا از ضابطه تابع  $f$  مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 3(x^3 - x^2 - x + 1)$$

$$= 3(x^2(x-1) - x + 1) = 3(x-1)(x^2 - 1)$$

$$= 3(x-1)^2(x+1)$$

جدول تعیین علامت تابع  $f$  را تشکیل می‌دهیم:

$x$		$-1$		$1$	
$f'$		$-$	$+$	$+$	
$f$		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

$\min$

همان‌طور که می‌بینید، تابع  $f$  ماکزیمم نسبی ندارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



برای پیدا کردن اکسترم‌های نسبی، مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{4x^2 - mx + m^2}{x - m}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(4x - m)(x - m) - (1)(4x^2 - mx + m^2)}{(x - m)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 8mx = 0 \Rightarrow x(4x - 8m) = 0 \Rightarrow x = 0, 2m$$

نقاط اکسترم نسبی:

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, f(0)) \rightarrow (0, -m) \\ (2m, f(2m)) \rightarrow (2m, 16m) \end{array} \right.$$

حال کافی است شیب خط گذرنده از این دو نقطه را بدست آوریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(16m) - (-m)}{(2m) - (0)} = \frac{16m}{2m} = 8$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در این تابع چون صورت کسر عدد ثابتی است، پس کافی است برد مخرج کسر محاسبه شود؛ سپس برد تابع  $y$  را بدست می‌آوریم:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

حال داریم:

x		0		1	
f'	-		-		+
f	↘		↘		↗
				min	

کمترین مقدار تابع  $f$  به‌ازای  $x=1$  به‌دست می‌آید، بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(1) = 2$$

$$f(x) \geq 2 \xrightarrow[\text{می‌کنیم.}]{\text{معکوس}} 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 5} 0 < \frac{5}{3x^4 - 4x^3 + 3} \leq \frac{5}{2}$$

$$y \text{ برد تابع } \left(0, \frac{5}{2}\right]$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱