



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

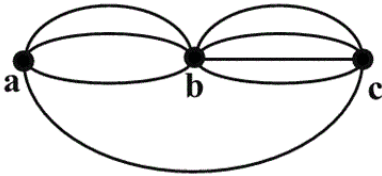
[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم، ترکیبیات (شمارش) - ۱۰ سوال

۱۲۱- در شکل زیر به چند طریق می توان از a به c رفت و سپس به a برگشت به طوری که مسیر رفت و برگشت دقیقاً یکسان نباشد؟



۱۴۴ (۱)

۱۵۶ (۲)

۱۶۸ (۳)

۱۸۲ (۴)

۱۲۲- در یک فروشگاه، هفت نوع خشکبار مختلف فروخته می شود. اگر در یک آجیل حداقل چهار نوع از این خشکبارها استفاده شود،

چند نوع آجیل مختلف در این فروشگاه می توان درست کرد؟

۶۴ (۴)

۶۳ (۳)

۵۶ (۲)

۳۵ (۱)

۱۲۳- با حروف عبارت «خلیج فارس»، چند کلمه شش حرفی می توان ساخت به گونه ای که حروف «س»، «ر» و «خ» در کنار هم باشند؟

۲۸۸۰ (۴)

۱۴۴۰ (۳)

۷۲۰ (۲)

۳۶۰ (۱)

۱۲۴- از هر یک از ۶ کلاس یک دبیرستان، ۵ نفر در اردویی شرکت کرده اند. به چند طریق می توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد به

طوری که هیچ دو نفر انتخاب شده از یک کلاس نباشند؟

۵۰۰۰ (۴)

۳۷۵۰ (۳)

۲۵۰۰ (۲)

۱۲۵۰ (۱)

۱۲۵- با حروف کلمه jellyroll، چند کلمه ۹ حرفی می توان ساخت به طوری که با یک حرف صدادار شروع و به حرف صدادار دیگری ختم شود؟

۲۱۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

۴۲۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۱۲۶- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۳, ۳, ۶, ۷ ، چند عدد هفت رقمی می توان ساخت به طوری که بین ارقام زوج دقیقاً دو رقم فاصله وجود داشته باشد؟

- (۱) ۸۰
 (۲) ۱۶۰
 (۳) ۳۶۰
 (۴) ۴۰۰

۱۲۷- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۸, ۸, ۸, ۹ ، چند عدد هشت رقمی زوج می توان ساخت؟

- (۱) ۱۲۶۰
 (۲) ۱۷۴۰
 (۳) ۲۱۰۰
 (۴) ۲۴۶۰

۱۲۸- اگر $P(n-2, 1) + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 22$ باشد، حاصل $P(n, \frac{n}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
 (۲) ۳۰
 (۳) ۷۲
 (۴) ۱۲۰

۱۲۹- از بین ۵ مدرس ریاضی، ۴ مدرس فیزیک و ۳ مدرس شیمی، به چند طریق می توان ۳ نفر را انتخاب کرد به گونه ای که در افراد انتخابی حداقل مدرسین دو درس حضور داشته باشند؟

- (۱) ۲۱۵
 (۲) ۲۱۰
 (۳) ۲۰۵
 (۴) ۲۰۰

۱۳۰- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ و حروف a, b, c, d، چند رمز شامل ۵ کاراکتر می توان تشکیل داد به گونه ای که شامل ۳ رقم و ۲ حرف بوده و در آن هیچ دو رقمی کنار هم قرار نداشته باشند؟

- (۱) ۷۲۰
 (۲) ۱۲۰۰
 (۳) ۱۴۴۰
 (۴) ۲۴۰۰

۱۳۶- مشخصه‌ای عددی که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است، ... نام دارد و به هریک از افراد یا اشیا که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود، ... گفته می‌شود.

- (۱) پارامتر - واحد آماری
(۲) آماره - جامعه آماری
(۳) پارامتر - جامعه آماری
(۴) آماره - واحد آماری

۱۳۷- مدیر یک مدرسه قصد دارد میزان رضایت دانش‌آموزان از امکانات موجود در مدرسه را بررسی کند. به همین جهت ۶ نفر از دانش‌آموزان هر کلاس را به تصادف انتخاب می‌کند. از کدام روش نمونه‌گیری برای این منظور استفاده شده است؟

- (۱) تصادفی ساده (۲) طبقه‌ای (۳) خوشه‌ای (۴) سیستماتیک

۱۳۸- روش گردآوری داده‌ها در کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) وضعیت آلودگی هوا (۲) تعداد دستگاه‌های عابر بانک موجود در یک خیابان
(۳) رضایت مردم تهران از وسایل نقلیه عمومی (۴) وضعیت آب گرفتگی معابر

۱۳۹- قرار است یک نمونه ۱۵ تایی از بین ۲۷۰ سرباز برای انتقال به یک پادگان دیگر به روش سیستماتیک انتخاب شود. اگر پنجمین سرباز عضو نمونه باشد، سربازی با کدام شماره عضو نمونه نیست؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۹۵ (۳) ۱۲۹ (۴) ۱۶۷

۱۴۰- در کدام گزینه هر چهار نوع متغیر کمی پیوسته، کمی گسسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی وجود دارد؟

- (۱) تعداد فرزندان خانواده، قد افراد، گروه خونی، میزان لذت بردن از آشپزی
(۲) تعداد مسافران یک قطار، اقوام ایرانی، قد افراد، جنسیت افراد
(۳) انواع هواپیما، مدت زمان رسیدن از خانه به مدرسه، رنگ چشم، میزان بارندگی بر حسب سانتی‌متر
(۴) مراحل رشد یک انسان، نوع بارندگی، میزان دمای هوا، شدت بارندگی

حسابان دوازدهم ، مشتق -

۸۱- شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = x^2 + \sqrt{x}$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۸۲- معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = 3 \sin x + 1$ در نقطه برخورد آن با محور عرض‌ها، کدام است؟

$y = \frac{1}{3}x + 1$ (۴)

$y = -3x + 1$ (۳)

$y = x + 3$ (۲)

$y = 3x + 1$ (۱)

۸۳- اگر $f(4) = 4$ ، $f'(4) = -5$ و $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ باشد، $g'(4)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)

۸۴- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = a\sqrt{x} + b$ در نقطه $(4, 1)$ واقع بر آن، از مبدأ مختصات نیز می‌گذرد. مقدار b کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

۸۵- اگر $f(x) = \frac{\sin x}{\left[\frac{\pi}{x}\right]^x}$ باشد، $f'_x(\pi)$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$-\frac{1}{\pi}$ (۴)

۱ (۳)

$-\pi$ (۲)

صفر (۱)

۸۶- مشتق تابع $f(x) = \frac{1 \cdot x}{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}$ در $x = 0$ کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۴)

۵ (۳)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲)

$\sqrt{10}$ (۱)

۸۷- کدام تابع در $x = 0$ ، مشتق ناپذیر است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$y = \lfloor x \rfloor x$ (۴)

$y = [x]x$ (۳)

$y = [x^2]x$ (۲)

$y = x|x|$ (۱)

۸۸- تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x < -1 \\ -x^2 + bx - 1 & ; x \geq -1 \end{cases}$ در $x = -1$ مشتق‌پذیر است. حاصل $a + b$ کدام است؟

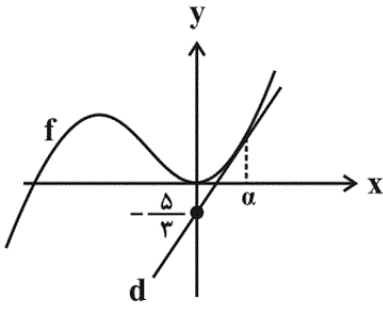
۲ (۴)

۳ (۳)

-۱ (۲)

صفر (۱)

۸۹- در شکل زیر، خط d در $x = \alpha$ بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ مماس است. حاصل $f(\alpha) + f'(\alpha)$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{10}{3}$

(۴) $\frac{13}{3}$

۹۰- نمودارهای توابع $f(x) = \frac{x}{x+k}$ و f' ، هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

(۴) ۴

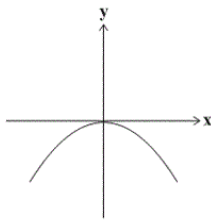
(۳) ۳

(۲) ۲

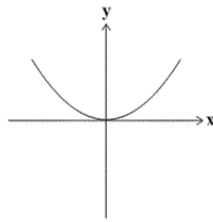
(۱) ۱

هندسه ۳- دوازدهم، **آشنایی با مقاطع مخروطی** - ۱۰ سوال

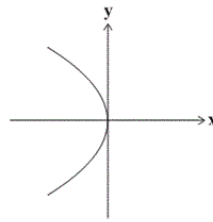
۱۱۱- نمودار مربوط به معادلهٔ $y^2 + 4x = 0$ کدام است؟



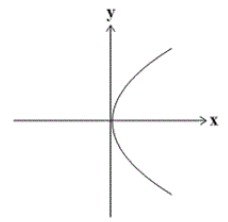
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۱۱۲- هر نقطهٔ واقع بر یک سهمی، مرکز یک دایره است که از سهمی گذشته و بر آن مماس است.

(۲) کانون - خط هادی

(۱) رأس - خط هادی

(۴) کانون - محور تقارن

(۳) رأس - محور تقارن

۱۱۳- کدام یک از معادلات زیر مربوط به یک سهمی به رأس $A(2,1)$ و خط هادی منطبق بر محور y ها است؟

(۲) $(y-1)^2 = 4(x-2)$

(۱) $(x-2)^2 = 4(y-1)$

(۴) $(y-1)^2 = 8(x-2)$

(۳) $(x-2)^2 = 8(y-1)$

۱۱۴- کدام یک از نقاط زیر، کانون سهمی به معادله $y = x^2 - 3x + 5$ است؟

(۱) $(-\frac{3}{2}, 3)$

(۲) $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

(۳) $(\frac{3}{2}, 3)$

(۴) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

۱۱۵- معادله مکان هندسی کانون سهمی‌هایی که خط $x = 1$ ، خط هادی آن‌ها و $M(3, 1)$ نقطه‌ای واقع بر آن‌ها باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

(۲) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

(۳) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

(۴) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$

۱۱۶- فاصله کانونی سهمی به معادله $(k^2 - 4)x^2 + (k + 2)y^2 + (k + 6)x + 4ky + 2k^2 = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

۱۱۷- یک سهمی محور y ها را در دو نقطه به عرض‌های ۳ و ۱- قطع می‌کند و رأس آن بر روی نیمساز ناحیه دوم است. معادله خط

هادی این سهمی کدام است؟

(۱) $x = 3$

(۲) $x = 2$

(۳) $x = -2$

(۴) $x = -3$

۱۱۸- به ازای کدام مقدار m ، کانون سهمی به معادله $y^2 + 8y - 4x = m$ روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم قرار دارد؟

(۱) ۴

(۲) ۱۲

(۳) -۴

(۴) -۱۲

۱۱۹- خطی که در کانون سهمی به معادله $y^2 - 2y + 4x + 5 = 0$ بر محور تقارن این سهمی عمود است، آن را در دو نقطه قطع می‌کند.

فاصله این دو نقطه از یکدیگر چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) ۱۶

۱۲۰- اگر فاصله کانون تا خط هادی سهمی به معادله $x^2 + 4x + my - 6 = 0$ برابر ۴ واحد و $m < 0$ باشد، آنگاه معادله خط هادی سهمی

کدام است؟

$$y = \frac{9}{4} \quad (2)$$

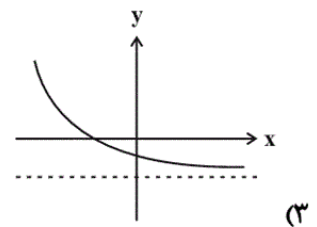
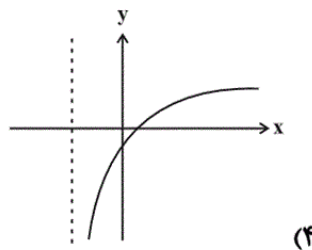
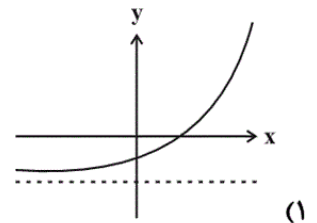
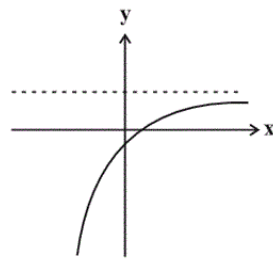
$$y = \frac{13}{4} \quad (1)$$

$$y = -\frac{13}{4} \quad (4)$$

$$y = -\frac{9}{4} \quad (3)$$

ریاضی پایه - دوازدهم، حد - ۱۰ سوال -

۱۰۱- نمودار تابع $f(x) = 2^{x+a} + b$ ، محور طول‌ها را در $x = 1$ و محور عرض‌ها را در $y = -\frac{1}{4}$ قطع می‌کند. نمودار آن کدام می‌تواند باشد؟



۱۰۲- معادله $2^{-|x|} = |x|$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۳- اگر نیم‌عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ ثانیه باشد، بعد از یک دقیقه تقریباً چند درصد این ماده به انرژی تبدیل می‌شود؟

۹۸ (۴)

۹۵ (۳)

۹۲ (۲)

۸۸ (۱)

۱۰۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $(\sqrt{2})^{2x-1} < (\sqrt[3]{4})^{x+3}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۰۵- جمعیت گونه خاصی از حشرات، سالانه ۱۰ درصد افزایش می‌یابد. پس از حداقل چند سال، جمعیت این گونه خاص بیش از

یازده برابر می‌شود؟ ($\log 11 \simeq 1/041$)

- ۲۴ (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴)

۱۰۶- نمودارهای دو تابع $f(x) = \log(1-x)$ و $g(x) = |x+1|$ چند نقطه مشترک دارند؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴)

۱۰۷- حاصل $\log_{\sqrt[3]{3}}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \log_{\sqrt{3}}(7 - 2\sqrt{10})$ کدام است؟

- ۴ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲)

- ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۱۰۸- اگر $\log_8(x^2 - 2) = \log_2 \sqrt[3]{-x}$ باشد، حاصل 2^x کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲)

- $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴)

۱۰۹- اگر $\log_3(2x^2 + 1) = \log_3(x + 2) + 1$ باشد، حاصل $\log_8(6x + 1)$ کدام است؟

- ۵ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲)

- $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴)

۱۱۰- جواب معادله $\log_x(x+1) + \log_x(x-\frac{1}{x}) = 2$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(3, \frac{3}{2})$ (۲) $(2, 3)$
(۳) $(\frac{3}{2}, 2)$ (۴) $(1, \frac{3}{2})$

هندسه ۲ یازدهم، تبدیل های هندسی و کاربردها - ۵ سوال -

۱۳۱- کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

- (۱) تجانس شیب خط را حفظ می کند.
(۲) تجانس اندازه زاویه را حفظ می کند.
(۳) دو شکل متشابه همواره متجانس هستند.
(۴) تجانس می تواند طولپا باشد.

۱۳۲- دایره $C(O, 3)$ را نسبت به خطی که از مرکز این دایره ۵ واحد فاصله دارد، بازتاب می دهیم. اگر حاصل این بازتاب، دایره C' باشد، آنگاه طول مماس مشترک داخلی دو دایره C و C' کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۳۳- مثلث قائم الزاویه $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$ را که در آن طول اضلاع قائمه برابر ۲ و ۴ است، به مرکز C و به اندازه 90° در جهت حرکت عقربه های ساعت دوران می دهیم. اگر B' تصویر نقطه B در این دوران باشد، طول BB' کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{10}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) ۵

۱۳۴- مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۴ و ۳ واحد را با بردار انتقالی در راستای قطر DB و به اندازه ۳ واحد انتقال می دهیم تا مستطیل $A'B'C'D'$ حاصل شود. مساحت ناحیه مشترک بین این دو مستطیل کدام است؟

- (۱) $1/92$ (۲) $2/4$ (۳) $3/84$ (۴) $4/8$

۱۳۵- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد، نقاط M و N را به ترتیب روی اضلاع AB و AC و به فاصله‌های ۳ و ۴

واحد از رأس A انتخاب می‌کنیم. اگر نقطه دلخواهی روی ضلع BC باشد، کمترین مقدار $MP + NP$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ (۲) $3 + \sqrt{7}$ (۳) ۵ (۴) $\sqrt{31}$

حسابان دوازدهم - گواه، مشتق - ۱۰ سوال -

۹۱- در تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x+1) - f(1)}{x}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۲

۹۲- خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{c}{x}$ در نقطه‌ای به طول x_0 واقع بر آن، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $2x_0$ (۲) $\frac{3}{2}x_0$ (۳) $\frac{5}{2}x_0$ (۴) $5x_0$

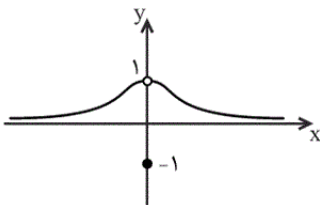
۹۳- اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۹۴- به ازای کدام مقدار a در تابع $f(x) = \begin{cases} x+a; & x \leq 1 \\ b\sqrt[3]{x}; & x > 1 \end{cases}$ ، $f'(1)$ موجود است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۵- شکل زیر نمودار تابع f را نشان می‌دهد. مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ در $x = 0$ کدام است؟



- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) وجود ندارد.

۹۶- خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sin x}$ با دامنه $(0, \pi)$ در نقطه‌ای به طول x_0 واقع بر آن، موازی خط $3y - 2x = 5$ است. مقدار x_0 کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

۹۷- نقاط A و B با طول‌های ۱ و ۴، روی نمودار تابع $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ واقع هستند. خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای با کدام طول

واقع بر آن، با پاره خط AB موازی است؟

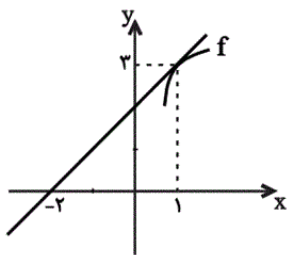
- (۱) $\sqrt[3]{9}$
 (۲) $\frac{3}{5}$
 (۳) $\sqrt[3]{\frac{9}{25}}$
 (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۹۸- اگر $f(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})^6$ و $g(x) = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})^5$ باشد، حاصل $f'g + g'f$ در $x=0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}-2}$
 (۲) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
 (۳) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$
 (۴) $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

۹۹- شکل زیر نمودار تابع f و خط مماس بر آن در $x=1$ را نشان می‌دهد. اگر $g(x) = \frac{x^2}{f(x)}$ باشد، شیب خط مماس بر تابع g در

$x=1$ کدام است؟



- (۱) ۱
 (۲) $\frac{8}{3}$
 (۳) $\frac{10}{9}$
 (۴) $\frac{8}{9}$

۱۰۰- مشتق تابع $f(x) = \sin x \tan x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) $\frac{5}{2}$
 (۴) ۲

(نیلوفر مهدوی)

تعداد مسیرهای موجود از a به c برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} a \xrightarrow{3} b \xrightarrow{4} c : 12 \text{ مسیر} \\ a \xrightarrow{1} c : 1 \text{ مسیر} \end{array} \right\} + \Rightarrow 13 \text{ مسیر}$$

برای رفتن از a به c ، ۱۳ مسیر وجود دارد، که یکی از این مسیرها برای رفت

طی می‌شود، پس برای برگشت از c به a ، ۱۲ مسیر موجود است و در نتیجه

طبق اصل ضرب، تعداد مسیرهای رفت و برگشت برابر است با:

$$13 \times 12 = 156$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

چون در هر آجیل، حداقل ۴ نوع خشکبار استفاده می‌شود، پس تعداد آجیل‌های مختلف که در این فروشگاه می‌توان درست کرد، برابر است با:

$$\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 35 + 21 + 7 + 1 = 64$$

نکته: می‌دانیم اگر $r + k = n$ باشد، آنگاه $\binom{n}{r} = \binom{n}{k}$ است، بنابراین

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3}, \dots, \binom{7}{7} = \binom{7}{0}$$

است و در نتیجه داریم:

$$\binom{7}{4} + \dots + \binom{7}{7} = \frac{\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{7}{7}}{2} = \frac{2^7}{2} = 2^6 = 64$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شماردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

کلمه شش حرفی مورد نظر لزوماً شامل حروف «س»، «ر» و «خ» می‌باشد، بنابراین از میان ۵ حرف دیگر موجود در عبارت «خلیج فارس» باید ۳ حرف را به دلخواه انتخاب کرد. حال در این کلمه ۶ حرفی، ۳ حرف «س»، «ر» و «خ» را به صورت یک بسته در نظر می‌گیریم که البته چون ترتیب قرار گرفتن این ۳ حرف مشخص نشده، پس خود دارای ۳! جایگشت هستند.

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

برای اینکه هیچ دو نفر انتخاب شده از یک کلاس نباشند، کافی است ابتدا از ۶ کلاس مدرسه، ۳ کلاس را به دلخواه انتخاب کنیم و سپس از ۵ دانش‌آموز شرکت کننده در اردو از هر یک از این سه کلاس، یک دانش‌آموز را به تصادف برگزینیم. در این صورت تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب این افراد برابر است با:

$$\binom{6}{3} \binom{5}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1} = 20 \times 5 \times 5 \times 5 = 2500$$

(ریاضی ۱- شمارش، برون شمردن: مشابه فعالیت صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

حروف e و o تنها حروف صدادار این کلمه هستند، پس در ابتدا و انتهای کلمه ۹ حرفی ساخته شده قرار می‌گیرند و ۲! جایگشت دارند. حرف l در میان حروف باقی‌مانده ۴ بار تکرار شده است، بنابراین تعداد جایگشت‌های حروف باقی‌مانده برابر $\frac{7!}{4!}$ است و در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است

$$2! \times \frac{7!}{4!} = 2 \times 210 = 420 \quad \text{با:}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

a b c d e f g

اگر هفت جایگاه در نظر گرفته و آنها را مطابق شکل فوق نام‌گذاری کنیم،

ارقام ۲ و ۶ می‌توانند در یکی از جایگاه‌های (a,d) ، (b,e) ، (c,f) و

(d,g) قرار گیرند، پس ۴ حالت وجود دارد.

۴

۳

۲ ✓

۱

رقم یکان عدد مورد نظر می‌تواند ۲ یا ۸ باشد، بنابراین دو حالت برای ساختن چنین عددی وجود دارد:

حالت اول: رقم یکان برابر ۲ باشد که در این صورت تعداد جایگشت‌های ارقام دیگر برابر است با:

$$\frac{7!}{3!} = 840$$

↓
تکرار رقم ۸

حالت دوم: رقم یکان برابر ۸ باشد که در این صورت تعداد جایگشت‌های ارقام دیگر برابر است با:

$$\frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$$

↓ ↓
تکرار رقم ۲ تکرار رقم ۸

در نتیجه تعداد کل اعداد هشت رقمی زوج ساخته شده با این ارقام برابر است با:

$$840 + 1260 = 2100$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + P(n-2, 1) = 22 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 22$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 22$$

$$\Rightarrow n(n+1) + (n-2) = 22 \Rightarrow n^2 + 2n - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (n+6)(n-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -6 & \text{غ ق ق} \\ n = 4 \end{cases}$$

$$P(n, \frac{n}{2}) = P(4, 2) = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرحسین ابومصوب)

۱۲۹ - آزمون

می‌توانیم سؤال را با کمک متمم حالت خواسته شده حل کنیم یعنی حالت‌هایی را که هر ۳ نفر انتخابی از مدرسین فقط یکی از درس‌های ریاضی، فیزیک یا شیمی باشند از کل حالت‌های انتخاب این ۳ نفر کم کنیم. داریم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{12}{3} - \left(\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} \right) = 220 - (10 + 4 + 1) = 205$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 ریاضی فیزیک شیمی

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

برای اینکه در رمزی شامل ۵ کاراکتر که از ۳ رقم و ۲ حرف تشکیل شده، هیچ دو رقمی کنار هم قرار نداشته باشند، کافی است حروف و ارقام به صورت یک در میان قرار گیرند.

$$\frac{\text{رقم}}{۳} \times \frac{\text{حرف}}{۲} \times \frac{\text{رقم}}{۲} \times \frac{\text{حرف}}{۱} \times \frac{\text{رقم}}{۱}$$

بنابراین تعداد کل کاراکترهای ساخته شده برابر است با:

$$\binom{۵}{۳} \times \binom{۴}{۲} \times \underbrace{۳! \times ۲!}_{\downarrow} = ۱۰ \times ۶ \times ۶ \times ۲ = ۷۲۰$$

جایگشت حروف و ارقام انتخاب حروف انتخاب ارقام

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: مشابه مثال صفحه ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

واحد آماری: به هریک از افراد یا اشیا می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در بررسی آماری گردآوری می‌شود.

جامعه آماری: به مجموعه کل واحدهای آماری، جامعه آماری گفته می‌شود. پارامتر یا پارامتر جامعه: مشخصه‌ای عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورت در اختیار بودن داده‌های کل جامعه قابل محاسبه است.

آمار یا آماره نمونه: مشخصه‌ای عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۰۴ و ۱۱۵)

۴

۳

۲

۱

(علیرضا شریف‌نظیری)

اگر مدرسه را یک جامعه و هر کلاس را یک طبقه از آن جامعه در نظر بگیریم، مدیر مدرسه از هر طبقه ۶ نفر را به تصادف انتخاب کرده است، یعنی از روش نمونه‌گیری طبقه‌ای استفاده نموده است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۴

۳

۲

۱

برای بررسی رضایت مردم تهران از وسایل نقلیه عمومی از روش مصاحبه استفاده می‌کنیم اما گردآوری داده‌ها در سایر گزینه‌ها با روش مشاهده امکان‌پذیر است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

شماره سربازان انتخابی به صورت $۱۸k + ۵$ ($k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq ۱۴$)

است. داریم:

$$k = ۲ \Rightarrow ۱۸ \times ۲ + ۵ = ۴۱$$

$$k = ۵ \Rightarrow ۱۸ \times ۵ + ۵ = ۹۵$$

$$k = ۹ \Rightarrow ۱۸ \times ۹ + ۵ = ۱۶۷$$

ولی عدد ۱۲۹ را نمی‌توان به صورت $۱۸k + ۵$ نوشت، پس سرباز شماره

۱۲۹ عضو نمونه انتخابی نیست.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

در گزینه «۱»: تعداد فرزندان متغیر کمی گسسته، قد افراد متغیر کمی پیوسته، گروه خونی متغیر کیفی اسمی و میزان لذت بردن از آشپزی متغیر کیفی ترتیبی است.

در گزینه «۲»: اقوام ایرانی و جنسیت افراد هر دو متغیر کیفی اسمی هستند. در گزینه «۳»: انواع هواپیما و رنگ چشم هر دو متغیر کیفی اسمی و مدت زمان رسیدن از خانه به مدرسه و میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر هر دو متغیر کمی پیوسته هستند.

در گزینه «۴»: مراحل رشد یک انسان و شدت بارندگی هر دو متغیر کیفی ترتیبی هستند.

(ریاضی ۱ - آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عادل مسینی)

شیب خط مماس بر نمودار تابع، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

$$y' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(مسایان ۲ - صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

محل برخورد نمودار تابع با محور عرض‌ها نقطه $(0, 1)$ است. شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر مشتق تابع به ازای $x = 0$ است. داریم:

$$f'(x) = 3 \cos x$$

$$\Rightarrow m = f'(0) = 3$$

بنابراین معادله خط مورد نظر $y = 3x + 1$ است.

(مسایان ۲- صفحه ۹۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید علم‌پور)

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x=4} g'(4) = \frac{4f'(4) - f(4)}{16} = \frac{4(-5) - 4}{16} = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2}$$

(مسایان ۲- صفحه ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نقطه $(۴, ۱)$ روی نمودار قرار دارد:

$$\Rightarrow f(۴) = ۱ \Rightarrow ۲a + b = ۱ \quad (*)$$

خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $(۴, ۱)$ از مبدأ می‌گذرد، یعنی معادله آن $y = \frac{۱}{۴}x$

و شیب آن برابر $\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین مشتق تابع f در $x = ۴$ برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

$$f'(x) = \frac{a}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{a}{۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = ۱$$

$$\xrightarrow{*} b = -۱$$

(مسایان ۲- صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

در همسایگی چپ $x = \pi$ ، می توان ضابطه تابع را به صورت زیر نوشت:

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

زیرا $\frac{\pi}{x}$ مقداری بزرگ تر از ۱ دارد.

روش اول:

$$g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \Rightarrow f'_-(\pi) = g'(\pi) = -\frac{1}{\pi}$$

روش دوم:

اگر $u(x_0) = 0$ و $v(x_0) \neq 0$ باشد، با فرض مشتق پذیری تابع u در $x = x_0$

، برای مشتق تابع $h = u \cdot v$ در $x = x_0$ می توانیم بنویسیم:

$$h'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0)$$

یعنی کافی است از عامل صفر کننده مشتق بگیریم.

حال در این سؤال، $\sin x$ عامل صفر کننده تابع g است. بنابراین داریم:

$$g'(\pi) = \left. \frac{\cos x}{x} \right|_{x=\pi} = \frac{-1}{\pi}$$

(مسئله ۲- صفحه های ۱۷، ۹۴ و ۹۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا ضابطه تابع را ساده تر می کنیم:

$$f(x) = \frac{1 \cdot x}{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}} \left(\frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}} \right)$$

$$= \frac{1 \cdot x(\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x})}{2x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 5(\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x})$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5 \left(\frac{1}{2\sqrt{5+x}} + \frac{1}{2\sqrt{5-x}} \right)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 5 \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

روش دوم: با توجه به نکته گفته شده در روش دوم پاسخ سؤال قبل، در اینجا

$$f'(0) = \frac{1 \cdot 0}{\sqrt{5+0} + \sqrt{5-0}} = \frac{1 \cdot 0}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \text{نیز می توانیم بنویسیم:}$$

(مسابقه ۲ - صفحه ۹۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عادل حسینی)

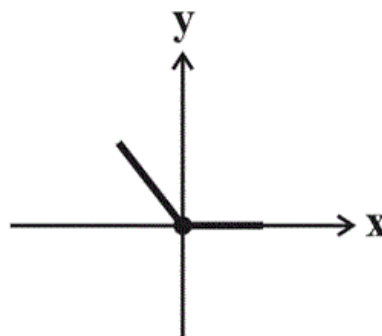
به دلیل حضور عبارت x در ضابطه توابع، هر ۴ تابع در $x = 0$ پیوسته هستند. در یک همسایگی $x = 0$ ، مقادیر $\|x\|$ و $[x^2]$ برابر صفر هستند، بنابراین توابع $y = [x^2]x$ و $y = \|x\|x$ در این همسایگی تابع ثابت صفر و در نتیجه مشتق پذیر هستند.

تابع $y = x|x|$ را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = x|x| = \begin{cases} -x^2 & ; x < 0 \\ x^2 & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2x & ; x < 0 \\ 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

واضح است که این تابع نیز در $x = 0$ مشتق پذیر است.

اما نمودار تابع $y = [x]x$ ، در همسایگی $x = 0$ به صورت زیر است:



این تابع در $x = 0$ ، مشتق چپ و راست نابرابر دارد، بنابراین در این نقطه مشتق ناپذیر است.

(مسئله ۲- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

شرط اولیه برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است، بنابراین تابع f در $x = -1$ باید پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-x^2 + bx - 1) = -b - 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{پیوستگی}} -a + b = -b - 2 \Rightarrow a - 2b = 2 \quad (1)$$

برای مشتق تابع f نیز داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} a & ; x < -1 \\ -2x + b & ; x \geq -1 \end{cases}$$

حال باید مشتق چپ و راست تابع در $x = -1$ برابر باشند.

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

مختصات نقطهٔ تماس به صورت $(\alpha, f(\alpha))$ می‌باشد. شیب خط گذرا از

این نقطه و نقطهٔ $(0, -\frac{5}{3})$ برابر است با:

$$\frac{f(\alpha) - (-\frac{5}{3})}{\alpha - 0} = \frac{f(\alpha) + \frac{5}{3}}{\alpha} = \frac{\frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha^2 + \frac{5}{3}}{\alpha}$$

این شیب همان مشتق تابع f در $x = \alpha$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha^2 + \frac{5}{3}}{\alpha} = f'(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha^2 + \frac{5}{3} = \alpha^3 + 2\alpha^2 \Rightarrow 2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 5 = 0$$

$\alpha = 1$ ، یک جواب معادلهٔ فوق است، یعنی $\alpha - 1$ یک عامل

$$2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 5 \text{ است.}$$

با تقسیم عبارت بر $\alpha - 1$ داریم:

$$2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 5 = (\alpha - 1)(2\alpha^2 + 5\alpha + 5) = 0$$

معادلهٔ $2\alpha^2 + 5\alpha + 5 = 0$ جواب حقیقی ندارد (زیرا $\Delta < 0$ است).

بنابراین داریم:

$$\alpha = 1: \begin{cases} f(\alpha) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \\ f'(\alpha) = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) + f'(\alpha) = \frac{13}{3}$$

(مسایان ۲ - صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\frac{x}{x+k} = \frac{k}{(x+k)^2}$$

$$\xrightarrow{x \neq -k} x(x+k)^2 - k(x+k) = 0 \Rightarrow (x+k)(x^2 + kx - k) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + kx - k = 0$$

برای اینکه شرط مسئله برقرار باشد، یعنی معادله فوق نباید جواب داشته باشد،

کافی است Δ ی معادله فوق منفی باشد یا $x = -k$ جواب مضاعف آن باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = k^2 + 4k < 0 \Rightarrow -4 < k < 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -k : k^2 - k^2 - k = -k = 0 \Rightarrow k = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} k \in (-4, 0]$$

پس به ازای اعداد صحیح $-3, -2, -1$ و صفر، نمودارهای f و f' نقطه برخورد نخواهند داشت.

(مسئله ۲ - صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمر فندان)

۱۱۱ - گزینه صحیح

معادله $y^2 = -4x$ ، معادله یک سهمی افقی با دهانه رو به چپ است که محور تقارن

آن محور x ها می‌باشد. نمودار مربوط به این معادله متناظر با نمودار گزینه «۲» است.

(هندسه ۳ - آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه مثال صفحه ۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از کانون سهمی گذشته و بر خط هادی سهمی مماس است و برعکس، مرکز هر دایره که از کانون سهمی بگذرد و بر خط هادی آن مماس باشد، روی سهمی است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

۴

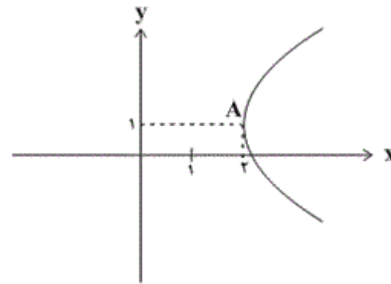
۳

۲ ✓

۱

(مماس شدن)

خط هادی سهمی خطی قائم است، پس سهمی افقی است. از طرفی دهانه سهمی به سمتی باز می‌شود که خط هادی خود را قطع نکند. همچنین فاصله کانونی سهمی برابر فاصله رأس تا خط هادی سهمی است، پس $a = 2$ بوده و در نتیجه معادله سهمی به صورت $(y-1)^2 = 8(x-2)$ می‌باشد.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه مثال صفحه ۵۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عادل حسینی)

$$y = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = y - 5 + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = y - \frac{11}{4}$$

سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا است.

۴

۳

۲

۱

(علیرضا شریف‌ظیبی)

هر نقطه واقع بر یک سهمی از کانون و خط هادی آن سهمی به یک فاصله است، بنابراین اگر $F(x, y)$ کانون یکی از این سهمی‌ها باشد، آنگاه با توجه به اینکه فاصله نقطه M از خط هادی سهمی برابر ۲ است، داریم:

$$MF = 2 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱

در معادله سهمی تنها یکی از جملات x^2 یا y^2 موجود است. بنابراین یکی از ضرایب x^2 یا y^2 برابر صفر است:

$$x^2 \text{ ضریب} = 0 \Rightarrow k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$y^2 \text{ ضریب} = 0 \Rightarrow k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2$$

در صورتی که $k = -2$ باشد، جملات شامل x^2 و y^2 هر دو از معادله حذف می‌شوند و معادله به معادله یک خط راست تبدیل می‌شود، پس $k = 2$ است و در نتیجه داریم:

$$4y^2 + 8x + 8y + 8 = 0 \xrightarrow{\div 4} y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = -2x - 1 \Rightarrow (y + 1)^2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین فاصله کانونی سهمی برابر $\frac{1}{2}$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳

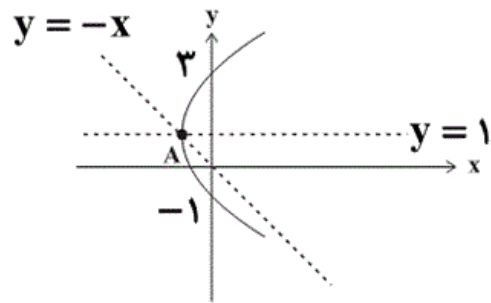
۲

۱ ✓

مطابق شکل محور تقارن سهمی، خط $y = 1$ است و در نتیجه نقطه تقاطع

آن با نیمساز ناحیه دوم یعنی نقطه $A(-1, 1)$ رأس سهمی است و دهانه

سهمی رو به راست باز می‌شود. داریم:



$$\text{معادله سهمی: } (y-1)^2 = 4a(x+1) \xrightarrow{(0,3)} (3-1)^2 = 4a(0+1)$$

$$\Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow a = 1$$

$$\text{معادله خط هادی سهمی: } x = -a + h = -1 - 1 = -2$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$y^2 + 8y - 4x = m \Rightarrow y^2 + 8y + 16 = 4x + m + 16$$

$$\Rightarrow (y + 4)^2 = 4\left(x + \frac{m}{4} + 4\right)$$

سهمی افقی و دهانه آن رو به راست است. از طرفی $A\left(-\frac{m}{4} - 4, -4\right)$

رأس سهمی و $a = 1$ فاصله کانونی سهمی است، بنابراین داریم:

$$\text{کانون سهمی : } F(a + h, k) = \left(-\frac{m}{4} - 4, -4\right) \xrightarrow{y=x} -4 = -\frac{m}{4} - 4$$

$$\Rightarrow \frac{m}{4} = 0 \Rightarrow m = 0$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

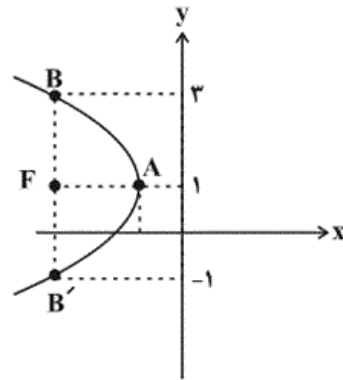
$$y^2 - 2y + 4x + 5 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -4x - 4$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -4(x+1) \Rightarrow 4a = 4$$

اگر خط عمود بر محور تقارن سهمی در کانون آن، سهمی را در نقاط B و B'

قطع نماید، آنگاه هر یک از نقاط B و B' به فاصله $2a$ از F (کانون سهمی)

قرار دارند، بنابراین فاصله نقاط B و B' از یکدیگر برابر $4a = 4$ است.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$x^2 + 4x + my - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = -my + 10$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = -m\left(y - \frac{10}{m}\right)$$

فاصله کانون تا خط هادی سهمی، دو برابر فاصله کانونی سهمی است، بنابراین

$$4a = -m \Rightarrow -m = 8 \Rightarrow m = -8 \quad a = 2 \text{ و در نتیجه داریم:}$$

$$(x+2)^2 = 8\left(y + \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \text{رأس سهمی: } A\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$$

سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا است، بنابراین داریم:

$$\text{معادله خط هادی سهمی: } y = -a + k \Rightarrow y = -2 - \frac{5}{4} = -\frac{13}{4}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

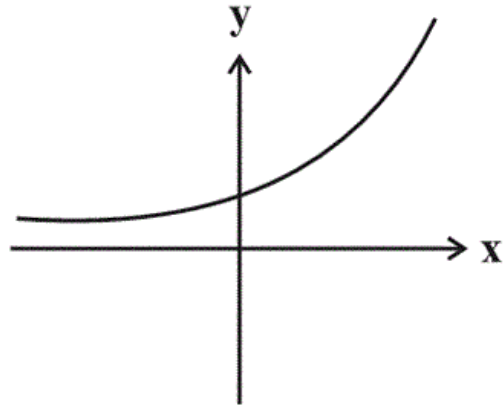
 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

نمودار تابع $y = 2^x$ به صورت زیر است:



نمودار تابع f ، صرفاً از انتقال $y = 2^x$ حاصل می‌شود. بنابراین با توجه به محل تلاقی نمودار تابع f ، با محورهای مختصات، نمودار گزینه «۱» صحیح است.

(مسئله ۱ - صفحه‌های ۷۴ تا ۷۶)

 ۴

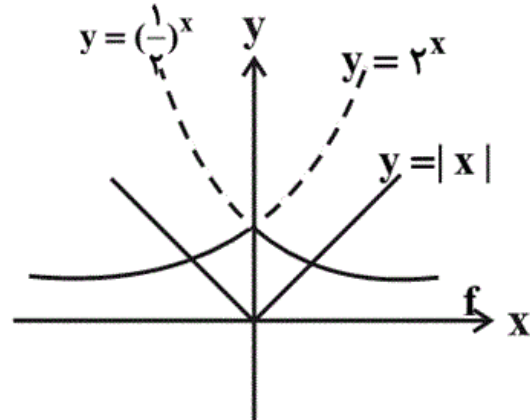
 ۳

 ۲

 ۱

نمودار تابع‌های $f(x) = 2^{-|x|}$ و $g(x) = |x|$ را رسم می‌کنیم و تعداد نقاط برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}; & x \geq 0 \\ 2^x; & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x; & x \geq 0 \\ 2^x; & x < 0 \end{cases}$$



نمودارها در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، بنابراین معادله $f(x) = g(x)$ دو جواب دارد.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷۴ تا ۷۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$m(t) = \frac{m_0}{t} \Rightarrow m(60) = \frac{m_0}{60} = \frac{m_0}{64}$$

جرم ماده باقی‌مانده $\frac{1}{64}$ جرم ماده اولیه است، یعنی جرم ماده‌ای که به

انرژی تبدیل شده است، $\frac{63}{64}$ جرم ماده اولیه است:

$$\Rightarrow m_{\text{باقی مانده}} = m_0 - \frac{m_0}{64} = \frac{63}{64} m_0 \simeq 0.98 m_0$$

(مسئله ۱- مشابه مثال صفحه ۷۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{22}\right)^{2x-1} < \left(\frac{2}{23}\right)^{x+3} &\Rightarrow 2^{\frac{x-1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}(x+2)} \\ \Rightarrow x - \frac{1}{2} < \frac{2}{3}x + 2 &\Rightarrow \frac{1}{3}x < \frac{5}{2} \Rightarrow x < \frac{15}{2} \end{aligned}$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله، بازه $(-\infty, \frac{15}{2})$ و شامل ۷ عدد طبیعی است.

(مسایان ۱- مکمل تمرین ۴ صفحه ۷۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فرض کنیم جمعیت اولیه این گونه خاص p_0 و جمعیت آن پس از n سال $p(n)$ باشد؛ داریم:

$$p(n) = p_0 \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^n$$

$$\text{فرض: } p(n) > 11p_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{11}\right)^n > 11 \Rightarrow \underbrace{n \log \frac{1}{11}}_{\log 11 - 1} > \log 11$$

$$\Rightarrow n > \frac{\log 11}{\log 11 - 1}$$

با جای‌گذاری مقدار تقریبی $\log 11$ و محاسبه کسر فوق داریم:

$$n > 25/39 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 26$$

یعنی پس از حداقل گذشت ۲۶ سال، مطمئنیم جمعیت این گونه خاص از حشرات بیش از ۱۱ برابر می‌شود.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷۳، ۷۴، ۸۶ و ۸۷)

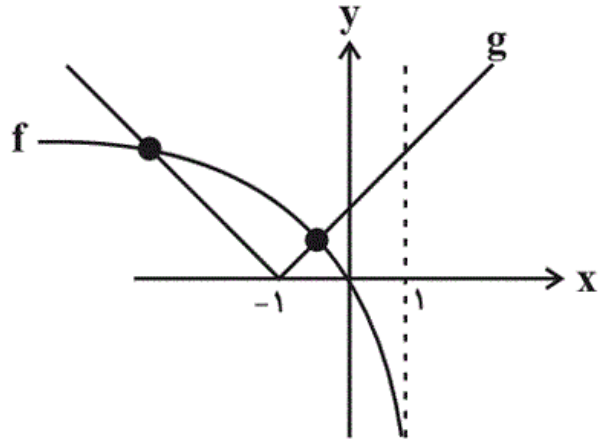
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نمودارهای دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع f ، کافی است نمودار $y = \log x$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه کنیم. مطابق شکل زیر، واضح است که دو نمودار، در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



(مسایبان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned}
& \log_{\sqrt[4]{3}}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \log_{\sqrt{3}}(7 - 2\sqrt{10}) \\
&= \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}}(7 - 2\sqrt{10}) \\
&= 4 \log_3(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + 2 \log_3(7 - 2\sqrt{10}) \\
&= 2[\log_3(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 + \log_3(7 - 2\sqrt{10})] \\
&= 2[\log_3(7 + 2\sqrt{10}) + \log_3(7 - 2\sqrt{10})] \\
&= 2[\log_3(7 + 2\sqrt{10})(7 - 2\sqrt{10})] = 2 \log_3 9 = 2 \times 2 = 4
\end{aligned}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

(نوید داوودونی)

$$\begin{aligned}
\log_8(x^2 - 2) &= \log_{\sqrt[3]{8}}(x^2 - 2) = \frac{1}{3} \log_2(x^2 - 2) \\
&= \log_2 \sqrt[3]{x^2 - 2} = \log_2 \sqrt[3]{-x} \\
\Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - 2} &= \sqrt[3]{-x} \Rightarrow x^2 - 2 = -x \\
\Rightarrow x^2 + x - 2 &= (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = 1
\end{aligned}$$

جواب‌های به دست آمده باید در دامنه معادله اصلی قرار داشته باشند،

بنابراین جواب $x = 1$ قابل قبول نیست.

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

$$\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1 \Rightarrow \log_3 \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 3^1 = 3 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 6 + 3x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

با توجه به اینکه عبارت $\log_8(6x + 1)$ به ازای $x > -\frac{1}{6}$ تعریف

شده است، $x = -1$ غیر قابل قبول است.

$$\Rightarrow \log_8(6x + 1) \Big|_{x=\frac{5}{2}} = \log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\log_x(x+1) + \log_x\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \log_x \frac{(x+1)(x^2-1)}{x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x^2-1)}{x} = x^2 \Rightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = x^3$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{غرق، زیرا باید } x > 1 \text{ باشد}) \\ \text{یا} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{قابل قبول} \end{array} \right.$$

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ تقریباً برابر $1/6$ و در بازه $(\frac{3}{2}, 2)$ قرار دارد.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(یاسین سپهر)

۱۳۱ - ۱۳۰

تجانس شیب خط و اندازه زاویه را حفظ می‌کند و می‌تواند در حالت خاص $|k| = 1$ تبدیلی طولی نیز باشد، ولی دو شکل متشابه الزاماً متجانس نیستند.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

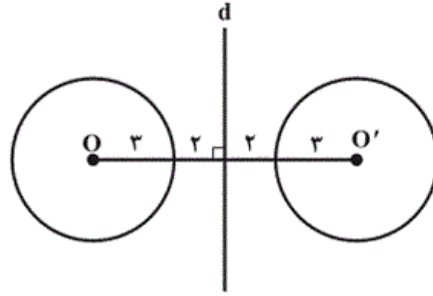
۴

۳ ✓

۲

۱

بازتاب تبدیلی طولیا است، پس شعاع دایره C' نیز برابر ۳ است. از طرفی مطابق شکل طول خط‌المركزین دو دایره برابر 10 است، در نتیجه داریم:



$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (3 + 3)^2} = \sqrt{64} = 8$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۴

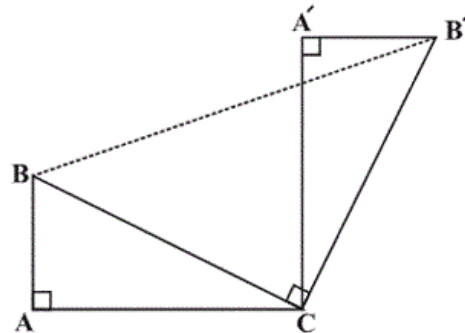
۳✓

۲

۱

(معصومه اکبری صمدت)

فرض کنید $AB = 2$ و $AC = 4$ باشد. در این صورت داریم:



$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$$

دوران تبدیلی طولیا است، پس $B'C = 2\sqrt{5}$ است. از طرفی در دوران، زاویه بین هر پاره‌خط و تصویر آن، برابر با زاویه دوران است، پس

$\widehat{BCB'} = 90^\circ$ و در نتیجه مثلث BCB' قائم‌الزاویه است. داریم:

$$\triangle BCB' : BB'^2 = BC^2 + B'C^2 = 20 + 20 = 40 \Rightarrow BB' = 2\sqrt{10}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲✓

۱

مستطیل $MBND'$ (ناحیه مشترک) با مستطیل $ABCD$ متشابه

$$k = \frac{BD'}{BD} = \frac{2}{5}$$

بوده و نسبت تشابه برابر است با:

در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{MBND'}}{S_{ABCD}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{MBND'}}{12} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{MBND'} = 12 \times \frac{4}{25} = \frac{48}{25} = 1/92$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴

۳

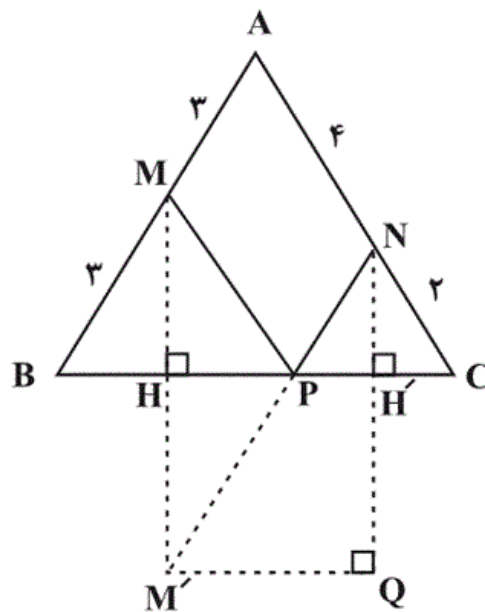
۲

۱

(فرشاد فرامرزی)

۱۳۵- هندسه ۱۱

هریک از زوایای مثلث متساوی‌الاضلاع برابر 60° است، بنابراین داریم:



$$\Delta MHB : MH = MB \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Delta MHB : BH = MB \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\Delta NH'C : NH' = NC \times \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta NH'C : CH' = NC \times \cos 60^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

برای یافتن کمترین مقدار $MP + NP$ (طبق مسئله هرون)، ابتدا بازتاب

نقطه M نسبت به ضلع BC را به دست می‌آوریم (نقطه M') و سپس این

دائلود از سایت ریاضی سرا

نقطه را به نقطه N وصل می‌کنیم. محل تلاقی پاره‌خط M'N و ضلع BC ، همان نقطه مورد نظر (نقطه P) است. مطابق شکل داریم:

$$NQ = NH' + QH' = NH' + MH = \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$M'Q = HH' = BC - (BH + CH') = 6 - \left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{7}{2}$$

$$\triangle NQM' : M'N^2 = NQ^2 + M'Q^2 = \frac{75}{4} + \frac{49}{4} = \frac{124}{4} = 31$$

$$\Rightarrow M'N = \sqrt{31}$$

$$MP + NP = M'P + NP = M'N = \sqrt{31}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه ۵۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

با توجه به تعریف مشتق چپ و راست، حد اول مشتق راست تابع در $x = 1$

و حد دوم، مشتق چپ تابع در $x = 1$ است. ابتدا ضابطه تابع را به صورت

زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

$$= \begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ -(x-1) & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-0}{x-1} = 1 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)-0}{x-1} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(1) + f'_-(1) = 1 + (-1) = 0$$

(مسائل ۲- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$y' = \frac{-c}{x^2} \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{c}{x_0^2}$$

بنابراین معادله خط مماس در A برابر است با:

$$y - \frac{c}{x_0} = -\frac{c}{x_0^2}(x - x_0)$$

در نقطه تلاقی این خط با محور X ها، عرض صفر است:

$$\Rightarrow 0 - \frac{c}{x_0} = -\frac{c}{x_0^2}(x - x_0) \Rightarrow x = 2x_0$$

(مسئله ۲- صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی ریاضیات کنکور)

۹۳- ۱۱۱۱۱۱۱۱

حد $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ تعریف مشتق راست تابع f در نقطه $x = 3$

(در صورت وجود) است. در همسایگی راست $x = 3$ ، ضابطه تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$x > 3 : y = \frac{3x^2}{x-1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6x(x-1) - (1)(3x^2)}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=3} f'_+(3) = \frac{3 \times 3^2 - 6 \times 3}{(3-1)^2} = \frac{9}{4}$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

شرایط مشتق پذیری در $x = 1$ را اعمال می کنیم:

(۱) تابع در $x = 1$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + a = b \Rightarrow b - a = 1 \quad (1)$$

(۲) $f'_-(1) = f'_+(1)$ باشد:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 1 \\ \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} & ; x > 1 \end{cases}$$

۴

۳

۲

۱

تابع y در $x = 0$ پیوسته است، بنابراین تعریف مشتق را در $x = 0$ می نویسیم:

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

(مسئله ۲ - صفحه ۹۴)

۴

۳

۲

۱

باید شیب خط مماس بر نمودار، برابر شیب خط $5 = 2x - 3y$ یعنی

$$m = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \text{ باشد،}$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{0 - \cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{\cos x_0}{\sin^2 x_0}$$

$$-\frac{\cos x_0}{\sin^2 x_0} = \frac{2}{3}$$

با جای گذاری مقادیر گزینه‌ها، خواهیم دید که $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ پاسخ صحیح است.

(مسئله ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۹۴ و ۹۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$A(1, 2), B(4, \frac{9}{2})$$

$$\Rightarrow \text{شیب پاره خط } AB = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{9}{2} - 2}{4 - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

حال مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = 1 - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

به دنبال نقطه‌ای از نمودار تابع f هستیم که در آن شیب خط مماس برابر $\frac{5}{6}$ است:

$$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow 2x\sqrt{x} = 6 \Rightarrow x\sqrt{x} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt[3]{9}$ واقع بر نمودار تابع f ، شیب خط مماس برابر

$\frac{5}{6}$ است و خط مماس موازی پاره خط AB خواهد بود.

(مسایان ۲- صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

عبارت خواسته شده، مشتق تابع fg است:

$$\Rightarrow (fg)(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})^6 (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})^5$$

$$= ((\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2)^5 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$$

$$= 1(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$$

$$\Rightarrow (fg)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

(مسئله ۲- صفحه های ۹۳ و ۹۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

شیب خط مماس بر نمودار تابع g در $x=1$ ، همان مشتق تابع g در

$x=1$ است:

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} g'(1) = \frac{3f(1) - f'(1)}{(f(1))^2} \quad (*)$$

با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = m \end{cases} \text{ شیب خط مماس:}$$

خط مماس از دو نقطه $(1, 3)$ و $(-2, 0)$ عبور می کند، بنابراین:

$$m = \frac{3-0}{1-(-2)} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$\xrightarrow{(*)} g'(1) = \frac{3 \times 3 - 1}{3^2} = \frac{8}{9}$$

(مسئله ۲- صفحه های ۹۳ و ۹۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کتاب آبی ریاضیات کنکور)

$$f(x) = \sin x \tan x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' \tan x + (\tan x)' \sin x \\ &= \cos x \tan x + (1 + \tan^2 x) \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + (1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 + (1 + 1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

(مسئله ۲ - صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۴

۳

۲ ✓

۱