



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



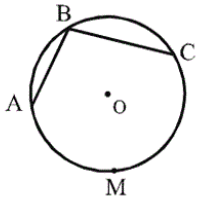
<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۱۳۱- در دایره شکل زیر به شعاع R داریم $AB = R$ و $BC = R\sqrt{2}$ ، اندازه کمان AMC کدام است؟



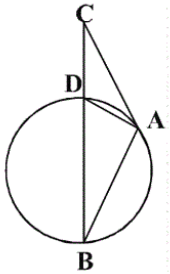
(۱) 210°

(۲) 225°

(۳) 240°

(۴) 180°

۱۳۲- از نقطه A روی دایره شکل زیر، وتر AB را مساوی با مماس AC رسم کرده‌ایم. اگر پاره خط BC دایره را در D قطع کند و



داشته باشیم $AC = 12$ و $BD = 10$ ، آنگاه طول پاره خط AD کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰

۱۳۳- از نقطه A به فاصله ۴ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۲، دو مماس بر آن دایره رسم شده است. زاویه بین دو مماس کدام است؟

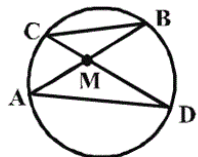
(۲) 90°

(۱) 45°

(۴) 60°

(۳) 30°

۱۳۴- در دایره زیر، دو وتر AB و CD طوری یکدیگر را قطع کرده‌اند که $AM = 3$ ، $BM = 4$ ، $CD = 8$ و $AD = 7/5$ ، طول BC



کدام است؟ ($CM < MD$)

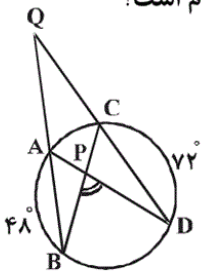
(۱) ۵

(۲) $4/5$

(۳) ۱۰

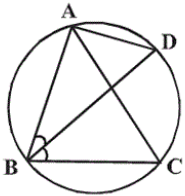
(۴) $8/5$

۱۳۵- در شکل زیر اندازه زاویه \widehat{BPD} ، ۳ برابر اندازه زاویه \widehat{Q} است. اگر $\widehat{AB} = 48^\circ$ و $\widehat{CD} = 72^\circ$ ، اندازه کمان \widehat{BD} کدام است؟



- (۱) 140°
- (۲) 148°
- (۳) 150°
- (۴) 160°

۱۳۶- نقاط A، B، C و D روی محیط یک دایره قرار دارند. اگر $\widehat{BAC} = 50^\circ$ و BD نیمساز زاویه ABC باشد، حاصل $\widehat{BAD} - \widehat{ABD}$ کدام است؟



- (۱) 40°
- (۲) 50°
- (۳) 55°
- (۴) 65°

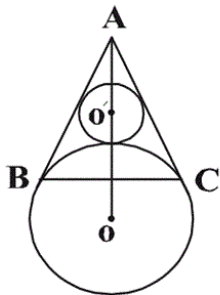
۱۳۷- پاره خط AB به طول ۲ واحد در یک صفحه قرار دارد. چند نقطه در این صفحه وجود دارد به طوری که از آن نقاط، پاره خط AB با زاویه 45° رؤیت شود و فاصله آنها از AB برابر $2\sqrt{2}$ باشد؟

- (۱) هیچ
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) بی شمار

۱۳۸- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', 4)$ که $R < 4$ ، برون یکدیگرند. اگر مماس مشترک داخلی این دو دایره، خط‌المركزین $OO' = 9$ را به نسبت ۲ به ۱ قطع کند، طول این مماس مشترک چقدر است؟

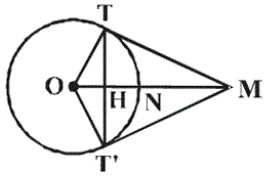
- (۱) $6\sqrt{3}$
- (۲) $4\sqrt{2}$
- (۳) $3\sqrt{5}$
- (۴) $2\sqrt{7}$

۱۳۹- از نقطه A دو مماس AB و AC بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع R (دایره بزرگ‌تر) رسم شده است. اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه اندازه شعاع دایره کوچک‌تر بر حسب R کدام است؟ (دایره کوچک‌تر بر دایره بزرگ‌تر و پاره خط‌های AB و AC مماس است.)



- (۱) $\frac{R}{2}$
- (۲) $\frac{R}{3}$
- (۳) $\frac{2R}{5}$
- (۴) $\frac{3R}{8}$

۱۴۰- دو خط MT و MT' در نقاط T و T' بر دایره $C(O, R)$ مماس‌اند. نقاط H و N به ترتیب نقاط برخورد OM با دایره و وتر TT' هستند. اگر H وسط پاره خط ON و $TH = 2\sqrt{3}$ باشد، شعاع دایره چقدر است؟



(۱) ۴

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) $3\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{3}$

دیفرانسیل و انتگرال - ۲۰ سوال

۸۱- معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = 3\sin x + 1$ در نقطه برخورد آن با محور عرض‌ها، کدام است؟

(۴) $y = \frac{1}{3}x + 1$

(۳) $y = -3x + 1$

(۲) $y = x + 3$

(۱) $y = 3x + 1$

۸۲- کدام تابع در $x = 0$ ، مشتق ناپذیر است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۴) $y = ||x||x$

(۳) $y = [x]x$

(۲) $y = [x^2]x$

(۱) $y = x|x|$

۸۳- تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; x < -1 \\ -x^2+bx-1 & ; x \geq -1 \end{cases}$ در $x = -1$ مشتق‌پذیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) -۱

(۱) صفر

۸۴- تابع $f(x) = (2x-1)\operatorname{sgn} x$ در $x = \frac{1}{4}$ چه وضعیتی دارد؟ (sgn ، تابع علامت است.)

(۲) بازگشت‌پذیر است.

(۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.

(۴) ناپیوسته است.

(۳) زاویه‌دار است.

۸۵- اگر $f(4) = 4$ ، $f'(4) = -5$ و $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ باشد، $g'(4)$ کدام است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۱) $-\frac{2}{3}$

۸۶- اگر $f(x) = \frac{1-\sin x}{x \cos x}$ و $g(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{x \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(x) + g'(x)$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) -۴

(۲) ۲

(۱) -۲

۸۷- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $f'(a) = f''(a)$ باشد، مقدار a کدام است؟

(۴) -۴

(۳) -۳

(۲) -۲

(۱) صفر

۸۸- مشتق مرتبه n ام تابع $f(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{i}\right)^{ni}$ ، در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر آن کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) 2^n (۳) صفر (۴) ۱

۸۹- اگر $f(a) = 2f'(a) = 8$ باشد، مشتق تابع $y = \sqrt[3]{f(x)}$ در $x = a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۹۰- اگر f و g توابع مشتق‌پذیر، $f(\sqrt{x}) = \sqrt{g(x)}$ و $f'(1) = 2g'(1)$ باشد، f(1) کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۹۱- مشتق تابع $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin x}$ در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۹۲- مشتق تابع $f(x) = \cos x(3 - 4\cos^2 x)\sin^2 x$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

۹۳- زاویه بین مماس چپ و راست برای تابع $f(x) = \begin{cases} \tan x & ; x \geq 0 \\ \frac{x \cos x}{\sqrt{3}} & ; x < 0 \end{cases}$ در مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\frac{11\pi}{12}$ (۲) $\frac{5\pi}{12}$ (۳) $\frac{7\pi}{12}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۹۴- اگر $y^3 + y = x$ باشد، مقدار y'' در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{16}$ (۲) $-\frac{3}{32}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۹۵- اگر $x + y^2 = y + x^2$ باشد، $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه (1,1) کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{15}$ (۴) $\frac{10}{9}$

۹۶- تابع معکوس تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < -1 \\ x^3+1 & ; x \geq -1 \end{cases}$ در دو نقطه مشتق‌پذیر نیست. فاصله آن دو نقطه کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۹۷- اگر $f(x) = \begin{cases} -2\sin x - 1, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 9x^2 - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، در این صورت مقدار $(f^{-1})'(3)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۹۸- مشتق تابع وارون تابع $f(x) = x + \frac{4}{\pi} \tan^{-1} x$ در نقطه $A(2, 1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi+2}{\pi}$ (۲) $\frac{-\pi}{\pi+2}$ (۳) $\frac{\pi}{\pi+2}$ (۴) $\frac{5\pi+4}{5\pi}$

۹۹- خط مماس بر نمودار تابع $y = (2x-3)^x$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

- (۱) $\frac{63}{8}$ (۲) $\frac{63}{4}$ (۳) $\frac{49}{4}$ (۴) $\frac{49}{8}$

۱۰۰- تابع $y = e^{ax} \sin x$ در معادله دیفرانسیل $y'' = 2ay' - 2y$ صدق می‌کند. مقادیر a کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) $\pm \frac{1}{2}$ (۴) $\pm \frac{1}{4}$

هندسه‌ی تحلیلی - ۱۰ سو

۱۱۱- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} i-j, & i < j \\ i+j, & i = j \\ i-2j, & i > j \end{cases}$ و ماتریس $B = [i^2 - 2j]_{3 \times 2}$ مفروض هستند. مجموع درایه‌های ماتریس AB کدام است؟

- (۱) -۳۸ (۲) ۳۸ (۳) ۲۷ (۴) -۲۷

۱۱۲- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $C = A^2 + B^2 + AB$ کدام است؟

- (۱) I (۲) ۳I (۳) ۹I (۴) ۱۰I

۱۱۳- اگر تبدیل یافته‌ی نقطه (x, y) تحت ماتریس‌های A و B به ترتیب نقاط (y, x) و $(-x, y)$ باشند، تبدیل یافته‌ی نقطه $(-1, 2)$ تحت ماتریس $A+B$ کدام است؟

- (۱) $(3, 3)$ (۲) $(1, 3)$ (۳) $(3, 1)$ (۴) $(1, 1)$

۱۱۴- اگر ماتریس A متقارن و ماتریس‌های B و AB پادمتقارن باشند، آنگاه حاصل $(AB^t - 2BA^t)^t$ همواره کدام است؟ (A و B ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه)

- (۱) $-AB$ (۲) AB (۳) ۳AB (۴) $-3AB$

۱۱۵- اگر برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+1 & a \\ b^2-3 & 0 \end{bmatrix}$ رابطه $A + A^t = 0$ برقرار باشد، حاصل عبارت $a^4 + b^4$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۷

۱۱۶- با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $(A - I)A(A + I)$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۴ (۳) -۸ (۴) -۴

۱۱۷- تبدیل یافتهٔ دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، یک بیضی است که ...

- (۱) محور کانونی آن موازی محور y ها بوده و فاصلهٔ کانونی آن $\frac{\sqrt{15}}{2}$ است.
 (۲) محور کانونی آن موازی محور x ها بوده و فاصلهٔ کانونی آن $\frac{\sqrt{15}}{2}$ است.
 (۳) محور کانونی آن موازی محور x ها بوده و فاصلهٔ کانونی آن $\sqrt{15}$ است.
 (۴) محور کانونی آن موازی محور y ها بوده و فاصلهٔ کانونی آن $\sqrt{15}$ است.

۱۱۸- اگر $A_n = \begin{bmatrix} \cos \frac{n\pi}{2} & -\sin \frac{n\pi}{2} \\ \sin \frac{n\pi}{2} & \cos \frac{n\pi}{2} \end{bmatrix}$ ، کوچک‌ترین عدد طبیعی n که به ازای آن داشته باشیم $A_1 A_2 \dots A_n = I$ ، کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۱۹- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته‌ایم. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس متقارن کدام است؟

- (۱) $\frac{-3}{2}$ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{-5}{2}$

۱۲۰- حاصل $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^6 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^5$ کدام ماتریس است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ریاضیات گسسته - ۱۰ سوال

۱۲۱- اگر $A \subseteq (B \cap C)$ باشد، حاصل $(A \times C) \cap (B \times A)$ همواره کدام است؟

(۱) \emptyset (۲) A^2 (۳) $B \times C$ (۴) $C \times B$

۱۲۲- روی مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، رابطهٔ R به‌گونه‌ای تعریف شده است که بازتابی و تقارنی بوده ولی ترابیی نیست. رابطهٔ R حداقل چند عضو دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۲۳- چند نقطه با مختصات صحیح در صفحهٔ مختصات وجود دارد، به‌گونه‌ای که در رابطهٔ $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x, y \geq -x\}$ صدق نماید؟

۱۲۴- اگر $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه چند ماتریس مانند X وجود دارد که در رابطه $F \ll X \ll E$ صدق می‌کند؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۲۵- چند رابطه هم‌ارزی روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ می‌توان تعریف کرد به طوری که فقط شامل یکی از دو زوج مرتب (a, b) و (a, c) باشند؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۲۶- روی مجموعه $M = \{1, 2, 3, 4\}$ چند رابطه بازتابی می‌توان نوشت که از میان خواص تقارنی و پادتقارنی، فقط یکی را داشته باشند؟

(۱) ۷۹۱ (۲) ۷۲۹ (۳) ۷۹۳ (۴) ۷۲۷

۱۲۷- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و رابطه R روی A به صورت $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ تعریف شده است. اگر M ماتریس متناظر با رابطه R باشد، کدام رابطه درست نیست؟

(۱) $M^{(2)} \ll M$ (۲) $M \wedge M^T \ll I_4$ (۳) M^T ماتریس متناظر با R^{-1} است. (۴) $M^T = M$

۱۲۸- رابطه R روی مجموعه غیرتهی A هر دو خاصیت تقارنی و پادتقارنی را دارد. کدام مورد همواره درست است؟

(۱) R هم بازتابی و هم ترایی است. (۲) R ترایی است. (۳) R بازتابی است ولی ترایی نیست. (۴) R نه بازتابی و نه ترایی است.

۱۲۹- چند رابطه پادمتقارن روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ می‌توان تعریف کرد به گونه‌ای که دارای حداکثر تعداد عضو ممکن باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۳۰- چند رابطه پادمتقارن روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ قابل تعریف است به طوری که شامل زوج مرتب $(1, 2)$ باشد ولی زوج مرتب $(1, 3)$ را نداشته باشد؟

(۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲

ریاضی پایه - ۱۰ سوال

۱۰۱- تابع متناوب f با دامنه \mathbb{R} و دوره تناوب ۴، در فاصله $[1, 5]$ به صورت

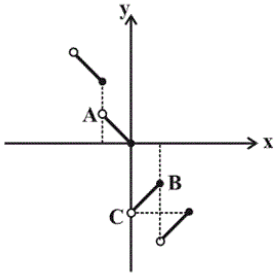
$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{2} x & ; 1 \leq x < 3 \\ -2x + 4 & ; 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

تعریف شده است. مقدار $f(102/5)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

- ۱۰۲- اگر $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = 5$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $[-x]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)
- (۱) -۱۳ (۲) -۱۵ (۳) -۲۴ (۴) -۱۷

۱۰۳- قسمتی از نمودار تابع $y = |x| + [-2x]$ به صورت زیر می‌باشد. مساحت مثلث ABC کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{2}{4}$
(۴) $\frac{5}{4}$

۱۰۴- کدام یک، جوابی برای معادله $\cos 5x = 2 \cos^2 x - 1$ است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{7}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{7}$ (۴) $\frac{4\pi}{7}$

۱۰۵- جواب کلی معادله $\frac{3}{2} \cos x - \sin^2 x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

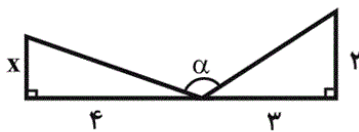
۱۰۶- معادله $\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{1}{12}$ در فاصله $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۷- معادله $\tan 2x = 3 \tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۹

۱۰۸- در شکل زیر اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ باشد، مقدار x کدام است؟



- (۱) $\frac{24}{17}$ (۲) $\frac{27}{13}$ (۳) $\frac{21}{17}$ (۴) $\frac{19}{13}$

۱۰۹- معادله $x^2 - \cos x = 2x$ چند جواب مثبت دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۰- اگر x' و x'' ، دو جواب متمایز برای معادله $a \tan x + b \cot x = c$ باشند به طوری که $x' + x'' = \frac{\pi}{4}$ باشد، کدام یک از

تساوی‌های زیر درست است؟ (a، b و c مخالف صفراند)

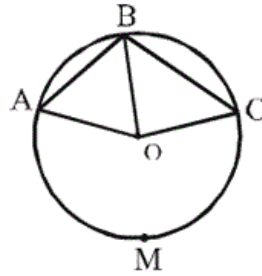
- (۱) $a = b + c$ (۲) $b = a + c$ (۳) $c = a + b$ (۴) $a + b + c = 0$

(مهم علی جعفری)

مثلث OAB متساوی الاضلاع است، زیرا $OA = OB = AB = R$.

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} = 60^\circ$$

بنابراین:



در مثلث OBC ، $BC = R\sqrt{2}$ و $OB = OC = R$ است، پس داریم:

$$(R\sqrt{2})^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیه فیثاغورس}} \widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 90^\circ$$

$$\widehat{AMC} = 36^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 21^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره، صفحه ۴۷)

۴

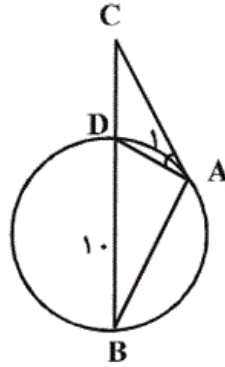
۳

۲

۱

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} \\ \text{زاویه محاطی: } \hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \text{زاویه ظلّی: } \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C} \Rightarrow AD = DC \quad (1)$$



از طرفی داریم:

$$CA^2 = CD \cdot CB \Rightarrow 12^2 = CD \cdot (CD + 10)$$

$$\Rightarrow CD^2 + 10 \cdot CD - 144 = 0$$

$$\Rightarrow CD = 8 \xrightarrow{(1)} AD = 8$$

(هندسه ۲-دایره - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰ و ۷۴ تا ۷۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$OT = 2, OA = 4 \Rightarrow OT = \frac{OA}{2} \quad (*)$$

از آن جا که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف وتر است، پس با توجه به (*) در مثلث قائم‌الزاویه ATO داریم:

$$\hat{OAT} = 30^\circ \Rightarrow \hat{TAT'} = 2\hat{OAT} = 60^\circ$$

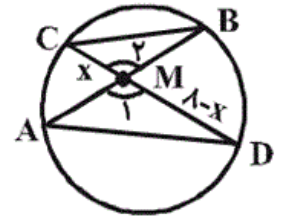
(هندسه ۲-دایره - صفحه‌های ۵۱ تا ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \Delta AMD \sim \Delta CMB$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} = \frac{AD}{BC} \quad (1)$$

$$CM = x \Rightarrow DM = \lambda - x \xrightarrow{(1)} \frac{3}{x} = \frac{\lambda - x}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - \lambda x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases} \text{ غ ق ق } \Rightarrow CM = 2$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{3}{2} = \frac{7/5}{BC} \Rightarrow BC = 5$$

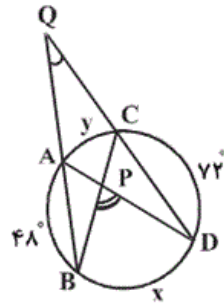
(هندسه ۲ - دایره - صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



با توجه به شکل داریم:

$$\widehat{BPD} = 3\widehat{Q} \Rightarrow \frac{1}{2}(x+y) = \frac{3}{2}(x-y) \Rightarrow x = 2y$$

از طرفی $x+y = 360^\circ - (48^\circ + 72^\circ) = 240^\circ$ پس:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 240^\circ \end{cases} \Rightarrow y = 80^\circ, x = 160^\circ$$

(هندسه ۲- دایره - صفحه‌های ۶۸ تا ۷۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$BD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DC}$ نیم‌ساز زاویه B است.

$$\begin{aligned} \widehat{BAD} - \widehat{ABD} &= \frac{\widehat{BCD}}{2} - \frac{\widehat{AD}}{2} \\ &= \left(\frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} \right) - \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 50^\circ \end{aligned}$$

توجه کنید که طبق فرض $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 50^\circ$ است.

(هندسه ۲- دایره - صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نقطه مورد نظر باید روی کمان درخور زاویه $\alpha = 45^\circ$ روبه رو به پاره خط $AB = a = 2$ باشد. برای دایره‌ای که این کمان درخور قسمتی از آن است، داریم:

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$OH = \frac{a}{2 |\tan \alpha|} = \frac{2}{2 \times 1} = 1$$

از آن جا که فاصله دورترین نقطه کمان درخور از پاره خط AB ، برابر $R + OH = 1 + \sqrt{2}$ است و $2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{2}$ ، پس روی کمان درخور این زاویه، هیچ نقطه‌ای به فاصله $2\sqrt{2}$ از پاره خط AB وجود ندارد.

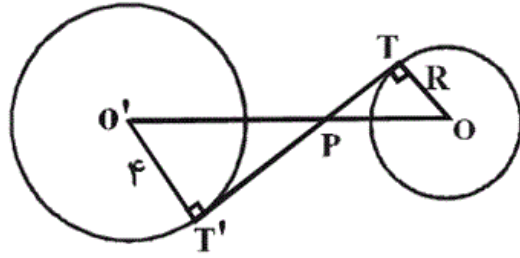
(هندسه ۲- دایره - صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

۴

۳

۲

۱ ✓



مطابق شکل داریم:

$$\Delta OPT \sim \Delta O'PT' \quad (\text{تساوی زاویه‌ها}) \Rightarrow \frac{O'P}{OP} = \frac{O'T'}{OT}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{4}{R} \Rightarrow R = 2$$

$$\text{مماس مشترک داخلی: } TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

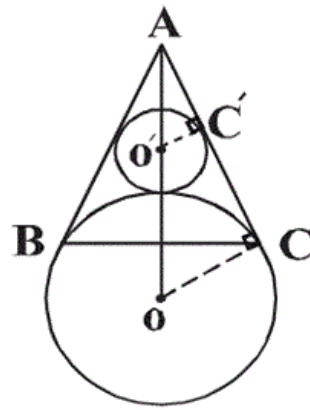
$$= \sqrt{9^2 - (2 + 4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

۴

۳ ✓

۲

۱



در مثلث قائم‌الزاویه AOC ($\hat{C} = 90^\circ$) داریم $\hat{A} = 30^\circ$ ، بنابراین:

$$OC = \frac{1}{2}AO \Rightarrow AO = 2R$$

$$AO' = AO - OO' = 2R - (R + R') = R - R'$$

$$O'C' \parallel OC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{O'C'}{OC} = \frac{AO'}{AO}$$

$$\Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{R - R'}{2R}$$

$$\Rightarrow 2R' = R - R' \Rightarrow R' = \frac{R}{3}$$

(هندسه ۲ - دایره - صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

طبق فرض مسئله داریم:

$$OH = \frac{ON}{2} = \frac{R}{2}$$

از طرفی $OT = OT'$ و $MT = MT'$ است، پس OM عمود منصفپاره خط TT' و در نتیجه بر آن عمود است. داریم:

$$\Delta OHT: OT^2 = OH^2 + HT^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + 12$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}R^2 = 12 \Rightarrow R = 4$$

(هندسه ۲ - دایره - صفحه ۵۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کاظم اجلالی)

محل برخورد نمودار تابع با محور عرض‌ها نقطه $(0, 1)$ است. شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر مشتق تابع به ازای $x = 0$ است. داریم:

$$f'(x) = 3 \cos x$$

$$\Rightarrow m = f'(0) = 3$$

بنابراین معادله خط مورد نظر $y = 3x + 1$ است.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

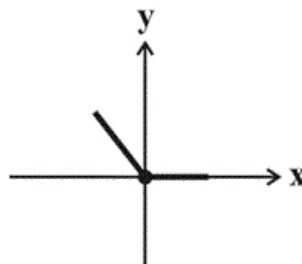
به دلیل حضور عبارت x در ضابطه توابع، هر ۴ تابع در $x = 0$ پیوسته هستند. در یک همسایگی $x = 0$ ، مقادیر $||x||$ و $[x^2]$ برابر صفر هستند، بنابراین توابع $y = [x^2]x$ و $y = ||x||x$ در این همسایگی تابع ثابت صفر و در نتیجه مشتق‌پذیر هستند.

تابع $y = x|x|$ را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = x|x| = \begin{cases} -x^2 & ; x < 0 \\ x^2 & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2x & ; x < 0 \\ 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

واضح است که این تابع نیز در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

اما نمودار تابع $y = [x]x$ ، در همسایگی $x = 0$ به صورت زیر است:



این تابع در $x = 0$ ، مشتق چپ و راست نابرابر دارد، بنابراین در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۳۷)

۴

۳

۲

۱

شرط اولیه برای مشتق پذیری، پیوستگی است، بنابراین تابع f در $x = -1$ باید پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-x^2 + bx - 1) = -b - 2 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{پیوستگی}} -a + b = -b - 2 \Rightarrow a - 2b = 2 \quad (1)$

برای مشتق تابع f نیز داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} a & ; x < -1 \\ -2x + b & ; x \geq -1 \end{cases}$$

حال باید مشتق چپ و راست تابع در $x = -1$ برابر باشند:

$$\begin{cases} f'_-(-1) = a \\ f'_+(-1) = 2 + b \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق پذیری}} a = b + 2 \Rightarrow a - b = 2 \quad (2)$$

$\xrightarrow{(1),(2)} a = 2, b = 0 \Rightarrow a + b = 2$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۳۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0 \times \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)} \frac{(2x-1)\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}\right) - 0}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = 2$$

بنابراین f در $x = \frac{1}{2}$ پیوسته و مشتق پذیر است

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۳۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سعید علم‌پور)

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x=4} g'(4) = \frac{4f'(4) - f(4)}{16} = \frac{4(-5) - 4}{16} = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2}$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی شهبازی)

را $(f+g)(x)$ ابتدا $(f+g)'(x)$ همان $f'(x)+g'(x)$ است، پس ابتدا

تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1 - \sin x}{x \cos x} + \frac{\sin x + \cos x - 1}{x \cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{x \cos x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow (f+g)'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \stackrel{x=\frac{1}{2}}{=} \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$f'(x) = \frac{r}{(x+1)^r} = r(x+1)^{-r}$$

$$\Rightarrow f''(x) = r(-r) \times (x+1)^{-r-1} = -r^2(x+1)^{-r-1}$$

$$f'(a) = f''(a) \Rightarrow \frac{r}{(a+1)^r} = \frac{-r^2}{(a+1)^{r+1}} \xrightarrow{a \neq -1} r = \frac{-r^2}{a+1}$$

$$\Rightarrow ra + r = -r^2 \Rightarrow a = -r$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عادل حسینی)

-۸۸

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{i}\right)^{ri} = e^{rx}$$

$$f'(x) = r e^{rx}, f''(x) = r^2 e^{rx} \Rightarrow f^{(n)}(x) = r^n e^{rx}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = r^n e^0 = r^n$$

(دیفرانسیل، صفحه‌های ۱۴۵، ۱۴۶ و ۱۴۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عرفان صادقی)

-۸۹

$$f(a) = rf'(a) = 8 \Rightarrow \begin{cases} f(a) = 8 \\ f'(a) = 4 \end{cases}$$

$$y = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{(f(x))^2}} \xrightarrow{x=a} y' = \frac{f'(a)}{3\sqrt[3]{(f(a))^2}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{3}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(ممد رضا شوکتی بیرق)

با مشتق گیری از طرفین تساوی صورت سؤال خواهیم داشت:

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{g(x)} \xrightarrow{\text{توان } 2} (f(\sqrt{x}))^2 = g(x)$$

$$\Rightarrow 2f(\sqrt{x})f'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = g'(x)$$

اما تساوی فوق به ازای $x = 1$ به صورت زیر است:

$$2f(1)f'(1) \times \frac{1}{2} = g'(1) \Rightarrow f(1)f'(1) = g'(1) \Rightarrow f(1) = \frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴

۳

۲

۱

(میلاد سجادی لاریبانی)

$$f(x) = \frac{2 \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{2(1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} = \frac{2(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(1 - \sin x); x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

۴

۳

۲

۱

با استفاده از رابطه $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ داریم:

$$f(x) = \cos x (3 - 4 \cos^2 x) \sin^2 x = -(4 \cos^3 x - 3 \cos x) \sin^2 x$$

$$= -\cos 3x \sin^2 x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \sin 3x \sin^2 x - \cos 3x \sin 2x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3(1)\left(\frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{3}{4}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۴۰، ۱۴۱ و ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(معمد؛ اربع‌کار)

$$m_1 = f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\tan x - 0}{x - 0}$$

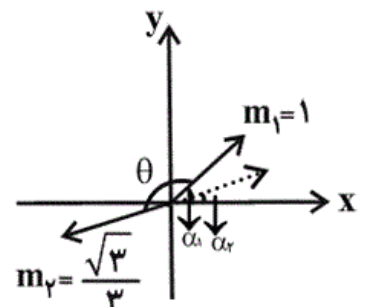
$$= \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1 = \tan \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$m_2 = f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\frac{x \cos x}{\sqrt{3}} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\cos x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$



(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۳۸، ۱۴۰ و ۱۴۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عادل حسینی)

نقطهٔ تماس: $A(2,1)$ $y^3 + y = x \xrightarrow{x=2} y^3 + y = 2 \Rightarrow y = 1$

$$y^3 + y - x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-1}{3y^2 + 1} \Big|_{y=1} = \frac{1}{4}$$

۴

۳

۲

۱

(هادی پلور)

از طرفین رابطهٔ داده شده مشتق می‌گیریم:

$$1 + 4y^3y' = y' + 2x \quad (I)$$

با قراردادن $x = 1$ و $y = 1$ در تساوی اخیر داریم:

$$1 + 4y' = y' + 2 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}$$

حال از طرفین رابطهٔ (I) مشتق می‌گیریم:

$$0 + 4(3y^2y'^2 + y^3y'') = y'' + 2$$

با قرار دادن $x = y = 1$ و $y' = \frac{1}{3}$ در رابطهٔ اخیر داریم:

$$4(3 \times \frac{1}{9} + y'') = y'' + 2 \Rightarrow \frac{4}{3} + 4y'' = y'' + 2 \Rightarrow y'' = \frac{2}{9}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۴

۳

۲

۱

ابتدا ضابطه f^{-1} را به دست می آوریم.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & ; x < 0 \\ \sqrt[3]{x-1} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{(x-1)^2}} & ; x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

همان طور که ملاحظه می کنیم، تابع f^{-1} در دو نقطه به طول های $x=0$ و $x=1$ مشتق پذیر نیست.

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}(0) = -1 &\Rightarrow A = (0, -1) \in f^{-1} \\ f^{-1}(1) = 0 &\Rightarrow B = (1, 0) \in f^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$

(دیفرانسیل: صفحه های ۱۵۷ و ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهم در مصطفی ابراهیمی)

اگر نقطه $(3, a)$ عضو f^{-1} باشد، نقطه $(a, 3)$ عضو f خواهد بود.

$$f(a) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ.ق.ق} & -2 \sin a - 1 = 3 \Rightarrow \sin a = -2 \\ \text{ا.ق.ق} & 9a^2 - 1 = 3 \Rightarrow 9a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \xrightarrow{a \leq 0} a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

اگر $(a, b) \in f$ باشد، $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ است.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مشتق تابع f را در نقطه $A'(1, 2)$ محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = 1 + \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = 1 + \frac{2}{\pi} \Rightarrow f'(1) = \frac{\pi+2}{\pi}$$

می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ است. پس داریم:

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{\pi}{\pi+2}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۴

۳✓

۲

۱

$$x = 2 \Rightarrow y = 1^2 = 1 \Rightarrow (2, 1)$$

$$\text{Lny} = \text{Ln}(2x - 3)^x \Rightarrow \text{Lny} = x \text{Ln}(2x - 3)$$

$$\text{از طرفین مشتق می‌گیریم: } \frac{y'}{y} = (1) \text{Ln}(2x - 3) + \frac{2}{2x - 3} x$$

$$\Rightarrow y' = y(\text{Ln}(2x - 3) + \frac{2x}{2x - 3}) = (2x - 3)^x (\text{Ln}(2x - 3) + \frac{2x}{2x - 3})$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(2) = 1(\text{Ln}1 + \frac{4}{1}) = 0 + 4 = 4$$

$$\text{معادله خط مماس: } y - 1 = 4(x - 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y - 1 = -8 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow B(0, -7) \\ y = 0 \Rightarrow -1 = 4(x - 2) \Rightarrow x = \frac{7}{4} \Rightarrow A(\frac{7}{4}, 0) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \left| \frac{7}{4} \times 7 \right| = \frac{49}{8}$$

(دیفرانسیل، مشتق: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

۴✓

۳

۲

۱

مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y = e^{ax} \sin x \Rightarrow y' = ae^{ax} \sin x + e^{ax} \cos x$$

$$y'' = a^2 e^{ax} \sin x + ae^{ax} \cos x + ae^{ax} \cos x - e^{ax} \sin x$$

$$y'' = (a^2 - 1)e^{ax} \sin x + 2ae^{ax} \cos x$$

$$\Rightarrow y'' = 2ay' - 2y \Rightarrow (a^2 - 1)e^{ax} \sin x + 2ae^{ax} \cos x$$

$$= 2a^2 e^{ax} \sin x + 2ae^{ax} \cos x - 2e^{ax} \sin x$$

$$\Rightarrow (a^2 - 1 - 2a^2 + 2)e^{ax} \sin x = 0 \Rightarrow 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۶۰ و ۱۶۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(تفسیر مصبی نژاد)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -16 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $\rightarrow -18 - 16 + 1 - 5 = -38$

(هندسهٔ تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\begin{cases} C = A^2 + B^2 + AB = (A+B)^2 - BA \\ A+B = 2I, BA = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = (2I)^2 - I = 4I - I = 3I$$

(هندسهٔ تفلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۵)

۴

۳

۲✓

۱

ماتریس تقارن نسبت به خط $y = x$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$: $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

ماتریس تقارن نسبت به محور y ها: $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$: $B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(هندسهٔ تفلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۲)

۴

۳✓

۲

۱

توجه کنید که چون A متقارن و B پادمتقارن است، پس $A^t = A$ و $B^t = -B$.

همچنین چون AB پادمتقارن است، پس:

$$(AB)^t = -(AB) \Rightarrow B^t A^t = -AB \Rightarrow (-B)(A) = -AB$$

$$\Rightarrow -BA = -AB \Rightarrow AB = BA$$

$$(AB^t - 2BA^t)^t = (AB^t)^t - 2(BA^t)^t = BA^t - 2AB^t$$

$$= B(A) - 2A(-B) = BA + 2AB = AB + 2AB = 3AB$$

(هندسهٔ تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

پادمتقارن است $\Rightarrow A^t = -A \Rightarrow A + A^t = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ b^2 - 3 = -a \Rightarrow b^2 - 3 = 1 \Rightarrow b^2 = 4 \end{cases}$$

$$a^4 + b^4 = (-1)^4 + 4^2 = 1 + 16 = 17$$

(هندسهٔ تحلیلی - ماتریس و دترمینان - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $(A - I)A(A + I)$ به صورت زیر

به دست می‌آید:

$[A - I]$ [ستون سوم ماتریس $A + I$] $\times A \times$ [سطر دوم ماتریس $A - I$]

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x' \\ -\frac{1}{2}y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{2} \\ y = -2y' \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{4} + 4y'^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{\frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow \text{محور کانونی بیضی، موازی محور X هاست.}$$

$$a^2 = 4, b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow |FF'| = 2c = \sqrt{15}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه ۱۰۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

A_n ماتریس دوران حول مبدأ و تحت زاویه $\frac{n\pi}{2}$ است، پس:

$$A_1 A_2 \dots A_n = R_{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \dots + \frac{n\pi}{2}} = R_{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

طبق فرض باید $R_{\frac{n(n+1)\pi}{2}} = R_{2k\pi}$ باشد، بنابراین: $n(n+1) = 4k$ که

در آن k عددی صحیح است.

 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{مقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{پاد مقارن}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A + A^t) &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{جمع درایه‌های ستون دوم} = \frac{3}{2} + 1 + 2 = \frac{9}{2}$$

(هندسهٔ تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^6 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \\ & = (R_{30^\circ})^5 (R_{-45^\circ})^6 (R_{60^\circ})^2 \\ & = R_{150^\circ} \times R_{-270^\circ} \times R_{120^\circ} = R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

هندسهٔ تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲

۴

۳

۲

۱ ✓

(محمدرضا دلاورنژاد)

۱۲۱ -

$$\begin{aligned} & A \subseteq (B \cap C) \Rightarrow A \subseteq B \text{ و } A \subseteq C \\ & \underbrace{(A \times C)} \cap \underbrace{(B \times A)} = \underbrace{(A \cap B)}_A \times \underbrace{(C \cap A)}_A = A \times A = A^2 \end{aligned}$$

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(هومن نورائی)

۱۲۲ -

رابطهٔ R برای بازتابی بودن حداقل باید ۴ عضو داشته باشد که با همین ۴ عضو تقارنی نیز می‌شود و اگر ۲ عضو $(1,2)$ و $(2,3)$ را به آن اضافه کنیم فاقد خاصیت ترایایی می‌شود ولی متقارن بودن آن به هم می‌خورد. پس باید $(2,1)$ و $(3,2)$ را نیز به آن افزود:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3), (2,1), (3,2)\}$$

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

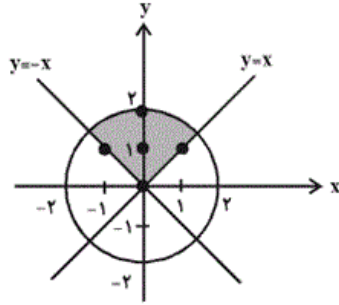
۴

۳ ✓

۲

۱

ناحیه رنگی، نمودار رابطه R است که شامل ۵ نقطه $(1,1)$ و $(-1,1)$ و $(0,2)$ و $(0,1)$ و $(0,0)$ با مختصات صحیح می‌باشد.



دقت کنید که نمودار $x^2 + y^2 \leq 4$ ، نقاط روی محیط و داخل دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است.

(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lll \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \lll \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = c = e = f = 1 \text{ و } g = i = 0$$

هر یک از درایه‌های b ، d و h می‌توانند ۰ یا ۱ باشند، بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر $2^3 = 8$ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

برای مجموعه A ، هر افراز متناظر با یک رابطه هم‌ارزی روی A است. بنابراین کافی است افرازهایی را مشخص کنیم که فقط یکی از دو عضو b یا c همراه با a به یک زیر مجموعه تعلق داشته باشند.

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, \{\{a, b, d\}, \{c\}\}$$

$$\{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}, \{\{a, c, d\}, \{b\}\}$$

پس ۶ رابطه هم‌ارزی می‌توان روی A تعریف کرد که فقط شامل یکی از دو زوج مرتب (a, b) و (a, c) باشد.

(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

تعداد روابط بازتابی و پادتقارنی روی مجموعه M برابر است

$$با: |A_r| = 3^{\frac{n^2-n}{2}} = 3^6 = 729.$$

همچنین فقط یک رابطه روی M می‌توان تعریف کرد که هر سه خاصیت بازتابی، تقارنی و پادتقارنی را داشته باشد. پس داریم:

$$|A_1 \Delta A_r| = |A_1| + |A_r| - 2|A_1 \cap A_r|$$

$$= 64 + 729 - 2(1) = 791$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۴

۳

۲

۱

(مهم‌علی نادرپور)

۱۲۷ - ترکیبیات

رابطه R خواص بازتابی، پادتقارنی و تراپایی را دارد.

(۱) چون R تراپایی دارد، پس رابطه $M^{(2)} \ll M$ درست است.

(۲) چون R پادمتقارن است پس رابطه $M \wedge M^T \ll I_F$ برقرار است.

(۳) می‌دانیم که ماتریس M^T همواره ماتریس متناظر با R^{-1} است.

(۴) چون R متقارن نیست، پس رابطه $M^T = M$ درست نیست.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۴

۳

۲

۱

(مهم‌علی نادرپور)

۱۲۸ - ترکیبیات

نکته: اگر رابطه‌ای هر دو خاصیت تقارنی و پادتقارنی را داشته باشد آنگاه حتماً تراپایی است زیرا تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی صفر بوده و درایه‌های روی قطر اصلی آن می‌توانند یک یا صفر باشند، که در آن صورت چنین رابطه‌ای حتماً تراپایی است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۴

۳

۲

۱

حداکثر تعداد اعضاء برای پادمتقارنی بودن روی یک مجموعه n عضوی از رابطه

به دست می‌آید که برای مجموعه سه عضوی A برابر است با ۶. در

این حالت درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس همگی برابر یک و در هر کدام از

زوج‌های مرتب (a_{12}, a_{21}) ، (a_{13}, a_{31}) و (a_{23}, a_{32}) یکی برابر صفر و

دیگری برابر ۱ است. پس تعداد رابطه‌های پادمتقارن روی مجموعه ۳ عضوی

A که حداکثر تعداد اعضاء را دارند برابر است با $2 \times 2 \times 2 = 8$.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

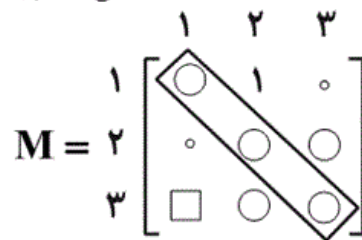
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممدعلی نادرپور)



ماتریس متناظر با رابطه مورد نظر به صورت ماتریس M است.

تعداد حالات برای انتخاب درایه‌های روی قطر اصلی برابر است با $2^3 = 8$.

۲ حالت برای انتخاب درایه واقع در سطر سوم و ستون اول (درایه متناظر با

زوج مرتب $(3,1)$) وجود دارد.

یک زوج درایه متقارن نسبت به قطراصلی باقی می‌ماند (m_{23}, m_{32}) ، که

برای این زوج درایه، ۳ حالت $(0,0)$ ، $(0,1)$ ، $(1,0)$ وجود دارد. پس تعداد

رابطه‌های مورد نظر برابر است با $2^3 \times 2 \times 3 = 48$.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

چون تابع f متناوب است، داریم:

$$f(x+nT) = f(x), n \in \mathbb{Z}$$

$$f(102/5) = f(2/5 + 25 \times 4) = f(2/5) = f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

(مسابان - تابع: صفحه ۹۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کازم ابلالی)

$$\left[\frac{2x+1}{3}\right] = 5 \Rightarrow 5 \leq \frac{2x+1}{3} < 6 \Rightarrow 15 \leq 2x+1 < 18$$

$$\Rightarrow 14 \leq 2x < 17 \Rightarrow 7 \leq x < \frac{17}{2} \Rightarrow -\frac{17}{2} < -x \leq -7$$

بنابراین $[-x]$ می‌تواند مقادیر ۹-، ۸- و ۷- را داشته باشد که

مجموع آن‌ها برابر ۲۴- است.

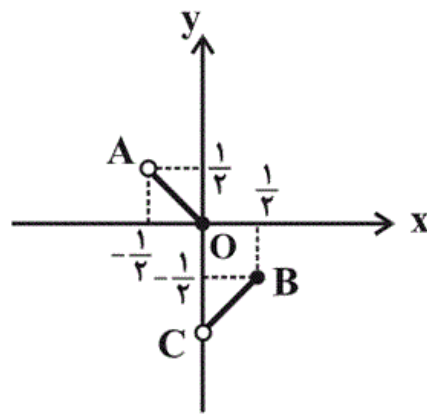
(مسابان - تابع، صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$S_{\triangle OAC} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} = \frac{1}{4}, \quad S_{\triangle OBC} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(مسئله‌ها - تابع، صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سید عادل حسینی)

۱۰۴ - ۱۳۹۷

$$\cos 5x = 2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi \pm 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} & ; k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه «۴» یعنی $\frac{4\pi}{3}$ ، در فرم جواب کلی

معادله است.

(مسئله‌ها - مثلثات، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سید عادل حسینی)

$$\frac{3}{2} \cos x - \sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 & \text{غقق} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(مسابان - مثلثات، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

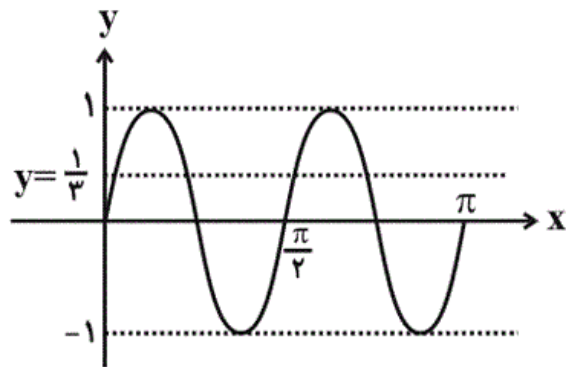
$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

پس معادله به فرم $\sin 4x = \frac{1}{3}$ در می‌آید. نمودار $y = \sin 4x$ از

انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ با ضریب ۴ به دست می‌آید. در

این صورت مطابق شکل زیر، نمودارهای $y = \sin 4x$ و $y = \frac{1}{3}$ در ۴

نقطه تلاقی دارند، پس معادله دارای ۴ ریشه است.



(مسابان- مثلثات، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(مرضیه کورزی)

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x$$

$$\Rightarrow \tan x \left(\frac{2}{1 - \tan^2 x} - 3 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \text{یا} \\ 1 - \tan^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan x = 0 \xrightarrow{\text{دربازه } (0, \frac{\Delta\pi}{2})} x = \pi, 2\pi \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{دربازه } (0, \frac{\Delta\pi}{2})} x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{دربازه } (0, \frac{\Delta\pi}{2})} x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{array} \right.$$

(مسابان - مثلثات، صفحه‌های 119 تا 123)

4

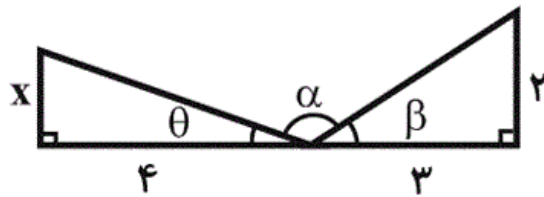
3

2 ✓

1

$$\tan \alpha = \tan(180^\circ - (\beta + \theta)) \Rightarrow \tan \alpha = -\tan(\beta + \theta)$$

$$-\frac{4}{3} = -\frac{\tan \beta + \tan \theta}{1 - \tan \beta \tan \theta}$$



از طرف دیگر با توجه به شکل $\tan \theta = \frac{x}{4}$ و $\tan \beta = \frac{2}{3}$ است.

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} = -\frac{\frac{2}{3} + \frac{x}{4}}{1 - (\frac{2}{3})(\frac{x}{4})} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{8 + 3x}{12 - 2x} \Rightarrow x = \frac{24}{17}$$

(مسابان - مثلثات، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

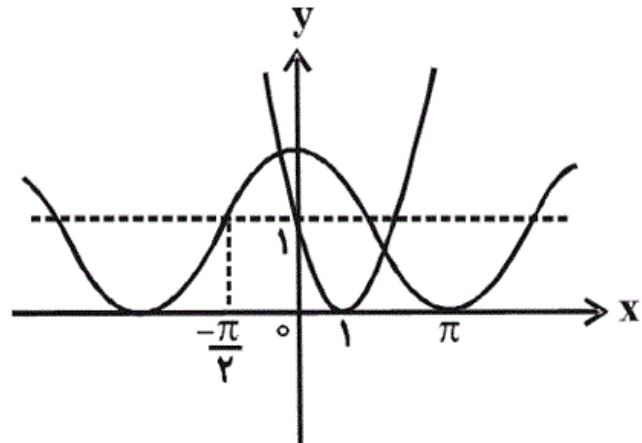
 ۱ ✓

$$x^2 - \cos x = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 = \cos x \Rightarrow (x-1)^2 = 1 + \cos x$$

با رسم نمودارهای دو تابع با معادله‌های $y_2 = (x-1)^2$ ، $y_1 = 1 + \cos x$

یک دستگاه مختصات داریم:



بنابراین معادله، یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

(مسابان - مثلثات، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱

(محمدرضا شوکتی بیرق)

$$a \tan x + b \cot x = c \xrightarrow{\times(\tan x \neq 0)} a \tan^2 x - c \tan x + b = 0$$

$$x' + x'' = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan x' + \tan x''}{1 - \tan x' \tan x''} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{c}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = 1 \Rightarrow a = b + c$$

(مسابان - مثلثات، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱