سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هندسه ۲ ، استدلال در هندسه

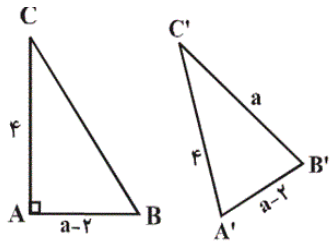
۱۳۱- در مثلث ABC ، $AB = AC = ۵$ و $BC = ۸$ است، اگر G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، آنگاه طول AG کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۳۲- چند قطر یک ۲۰ ضلعی محدب از رأس مشخصی از آن نمی‌گذرد؟

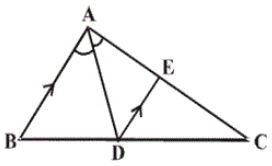
۱) ۱۵۲ ۲) ۱۵۳ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۵۵

۱۳۳- در مثلث $A'B'C'$ که زاویهٔ A' حاده است، مقدار a در کدام فاصله تغییر می‌کند؟



۱) $۳ < a < ۴$
۲) $۲ < a < ۴$
۳) $۲ < a < ۵$
۴) $۳ < a < ۵$

۱۳۴- در شکل زیر AD نیمساز زاویهٔ A و $DE \parallel BA$ است. اگر $AC = AB = ۴$ باشد، آنگاه طول AE چقدر است؟



۱) ۲/۴
۲) ۲/۷
۳) ۳
۴) ۳/۲

۱۳۵- نقطه‌ای دلخواه درون مثلثی متساوی‌الاضلاع در نظر می‌گیریم. اگر مجموع فواصل این نقطه از سه ضلع مثلث برابر ۶ باشد، آنگاه مساحت مثلث کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۱۳۶- در مثلث ABC ، طول ضلع BC برابر ۶ و طول میانهٔ AM برابر ۵ است. حدود تغییرات طول ضلع AB کدام است؟

۱) $۳/۵ < AB < ۸/۵$ ۲) $۱ < AB < ۱۱$ ۳) $۳ < AB < ۹$ ۴) $۲ < AB < ۸$

۱۳۷- مساحت چهارضلعی‌ای که از برخورد نیمسازهای داخلی یک مستطیل به طول اضلاع $۳\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}$ پدید می‌آید، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) $\frac{۹}{۲}$

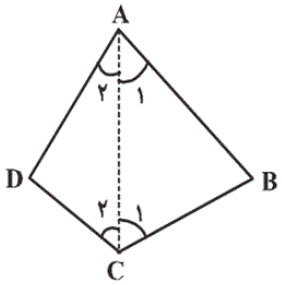
۱۳۸- چند مثلث غیر همنهشت ABC با مشخصات $AB = ۸$ ، $AC = ۵$ و $\hat{B} = ۴۵^\circ$ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۳۹- مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ با طول ساق ۴ مفروض است. از نقطهٔ M روی وتر BC عمودهایی بر دو ساق مثلث رسم می‌کنیم. اگر قدرمطلق تفاضل طول دو عمود رسم شده برابر ۲ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ M از رأس A کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۱۴۰- در چهارضلعی ABCD، AB بزرگ‌ترین و CD کوچک‌ترین ضلع است. اگر $AD = BC$، آنگاه کدام یک از نامساوی‌های زیر در حالت کلی برقرار نیست؟

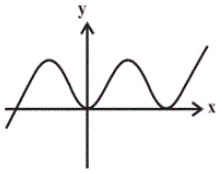


۱) $\hat{A}_۱ < \hat{C}_۱$ ۲) $\hat{A}_۲ < \hat{C}_۱$

۳) $\hat{A}_۱ < \hat{C}_۲$ ۴) $\hat{A}_۲ < \hat{C}_۲$

دیفرانسیل و انتگرال

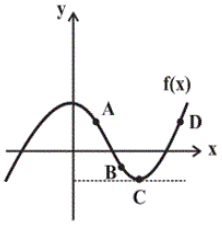
۸۱- در چند نقطه از نمودار زیر، خط مماس بر آن با محور x ها موازی خواهدشد؟



۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

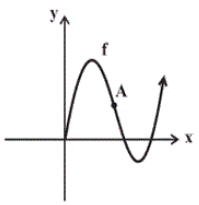
۸۲- در کدام‌یک از نقاط مشخص‌شده روی نمودار تابع f، مقدار $f(x)f'(x)$ عددی منفی است؟



۱) A ۲) B

۳) C ۴) D

۸۳- نمودار تابع f به شکل زیر مفروض است. کدام یک از خطوط داده شده می‌تواند معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A باشد؟



۱) $۲x + ۳y + ۱ = ۰$ ۲) $-۳x + ۴y + ۲ = ۰$

۳) $x + y - ۵ = ۰$ ۴) $x - ۲y - ۳ = ۰$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- اگر تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ به‌صورت $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}$ باشد، کدام گزینه برای ضابطهٔ تابع f و $x=a$ نمی‌تواند درست باشد؟

۱) $f(x)=x^2, a=2$

۲) $f(x)=(x-1)^2, a=3$

۳) $f(x)=\frac{1}{2}x^2, a=2\sqrt{2}$

۴) $f(x)=(x+1)^2, a=1$

۸۵- اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h}=\frac{1}{2}$ باشد و نمودار تابع پیوستهٔ f از نقطهٔ $A(2,0)$ بگذرد، معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A کدام است؟

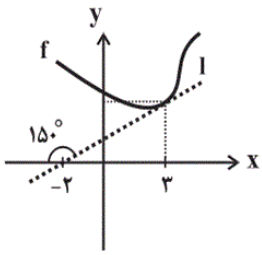
۱) $y=\frac{1}{2}(x-1)$

۲) $2y=x-2$

۳) $y=4-2x$

۴) $y=2x-4$

۸۶- با توجه به نمودار تابع f، حاصل $f'(3)+f(3)$ کدام است؟



۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۳) $2\sqrt{3}$

۴) $3\sqrt{3}$

۸۷- اگر $g(x)=|x^2-1|$ و $g'(a)=0$ باشد، مقدار a کدام است؟

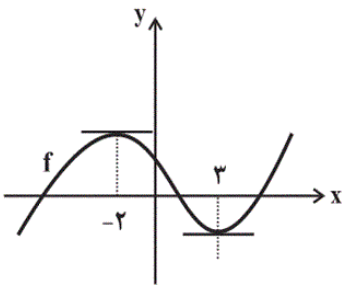
۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) ۲

۸۸- نمودار تابع f در شکل زیر داده شده‌است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ضابطهٔ تابع f' باشد؟



۱) $f'(x)=x^2-x+4$

۲) $f'(x)=x^2+2x-6$

۳) $f'(x)=2x^2-2x-12$

۴) $f'(x)=3x^2-2x+1$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۹- خط $y = ۳x - ۲$ در نقطهٔ $x_۰ = ۲$ بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \to ۲} \frac{f^۲(x) - ۲f(x) - ۸}{x^۲ - ۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۹۰- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x + k}$ در بازهٔ $[۱,۶]$ برابر $\frac{۱}{۵}$ است. $f(-۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۱- در تابعی با ضابطهٔ $f(t) = t - \sqrt{t}$، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $t = ۴$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر آن از $t = ۱$ تا $t = ۴$، بیشتر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۹۲- آهنگ تغییر مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول وتر a و زاویهٔ حادهٔ α در لحظه‌ای که $\alpha = ۲۲/۵^\circ$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a^۲$ ۲) $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}a^۲$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}a^۲$ ۴) $\frac{-\sqrt{۲}}{۴}a^۲$

۹۳- اگر هر کالا ۱۰۰ تومان فروخته و سود حاصل برای فروش x کالا برحسب تومان از تابع $P(x) = ۱۰x - ۲۱۰۰ + x^۲$ محاسبه شود، هزینه تقریبی تولید یازدهمین کالا چند تومان است؟ (هزینه – درآمد = سود)

۱) ۷۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۳۰

۹۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & ; x \geq ۱ \\ x^۳ - ۱ & ; x < ۱ \end{cases}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $f'_+(۱) = ۲$ ۲) $\lim_{x \to ۱^+} f'(x) = ۲$ ۳) $f'_-(۱) = ۳$ ۴) $\lim_{x \to ۱^-} f'(x) = ۳$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- اگر نیم‌مماس‌های راست و نیم‌مماس چپ تابع $f(x)=|ax^2-4a|$ در $x=2$ بر هم عمود باشند، مقدار a کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) $\pm\frac{1}{4}$ ۳) ± 2 ۴) ± 4

دیفرانسیل و انتگرال ، کاربرد مشتق -

۹۶- زاویهٔ حادهٔ بین مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3} & ; \quad x\le 1\\ \frac{-1}{6}x^2 & ; \quad x>1\end{cases}$ در نزدیکی $x=1$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۹۷- دامنهٔ تابع مشتق تابع $f(x)=\begin{cases}x+[x] & ;|x|<1\\ 2x^2+|x| & ;|x|\ge 1\end{cases}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$ ۲) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1\}$

۳) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ۴) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

۹۸- اگر $f(x)=1-|x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۹- اگر $f(x)=|x^2-x|$ و $g(x)=|x^2+x|$ باشد، توابع $f+g$ و $f-g$ در نقطهٔ $x=0$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام وضع زیر را دارند؟

۱) مشتق‌پذیر- مشتق‌پذیر ۲) مشتق‌پذیر- مشتق‌ناپذیر

۳) مشتق‌ناپذیر- مشتق‌پذیر ۴) مشتق‌ناپذیر- مشتق‌ناپذیر

۱۰۰- تابع $f(x)=(1-\cos 2\pi x)[x]$ روی بازهٔ $(0,4)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) در تمام نقاط مشتق‌پذیر است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ $x^۲ - ۲\sqrt{۳}xy - y^۲ = ۳$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) دو خط متقاطع ۲) هذلولی ۳) تنها یک نقطه ۴) بیضی

۱۱۲- فاصلهٔ کانونی هذلولی به معادلهٔ $y^۲ = ۴x^۲ + ۱۶x + ۲y + ۱۹$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۱۳- $A = (-۱,۱)$ یکی از رئوس یک هذلولی است که کانون‌های آن روی خطی موازی محور x ها قرار دارند. اگر $x + ۲y = ۳$ یکی از مجانب‌های این هذلولی باشد، معادلهٔ مجانب دیگر کدام است؟

۱) $x = ۲y - ۳$ ۲) $x = ۲y + ۳$

۳) $x = ۲y - ۱$ ۴) $x = -۲y + ۱$

۱۱۴- در هذلولی به معادلهٔ $-۹x^۲ + ۱۶y^۲ - ۷۲x - ۹۶y - ۱۴۴ = ۰$، عرض نزدیک‌ترین کانون به محور x ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۸ ۴) -۸

۱۱۵- کانونی از هذلولی به معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۱$ که طول مثبت دارد، مرکز دایره‌ای است که بر مجانب‌های این هذلولی مماس است. معادلهٔ دایره کدام است؟

۱) $(x - \sqrt{۲})^۲ + y^۲ = ۲$ ۲) $x^۲ + (y - \sqrt{۲})^۲ = ۲$

۳) $(x - \sqrt{۲})^۲ + y^۲ = ۱$ ۴) $x^۲ + (y - \sqrt{۲})^۲ = ۱$

۱۱۶- با انتقال مبدأ مختصات از نقطهٔ $O = (۰,۰)$ به نقطهٔ O'، سهمی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ - ۸x$ به سهمی به معادلهٔ $y = ۲x^۲$ تبدیل می‌شود. نقطهٔ O' در کدام یک از نواحی مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۱۷- اگر محورهای مختصات را حول مبدأ به اندازهٔ مناسب دوران دهیم تا سهمی $x^۲ + ۲xy + y^۲ + ۸x + ۴y = ۱$ استاندارد شود، رأس سهمی به نقطهٔ $\left(\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲}, \frac{-۵\sqrt{۲}}{۲}\right)$ منتقل می‌شود. رأس سهمی قبل از دوران، کدام نقطه بوده است؟

۱) $(۱,-۴)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(-۱,-۴)$ ۴) $(۱,۴)$

۱۱۸- فاصلهٔ کانونی مقطع مخروطی $۳y = \frac{۲}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۹- اگر $A=(1,2)$ و $A'=(-3,2)$ رأس‌های یک هذلولی و فاصلهٔ بین دو کانون آن برابر $2\sqrt{6}$ باشد، شیب خطوط مجانب‌های هذلولی کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$ ۳) ± 2 ۴) $\pm\sqrt{2}$

۱۲۰- معادلهٔ یک هذلولی پس از دوران محورهای مختصات به اندازهٔ 45° و در جهت مثلثاتی به‌صورت $x'^2-2y'^2=1$ است. معادلهٔ این هذلولی قبل از دوران کدام بوده است؟

۱) $x^2+2y^2-4xy=2$ ۲) $x^2+y^2-6xy=-2$

۳) $2x^2+y^2-4xy=2$ ۴) $x^2+y^2+2xy=-2$

ریاضیات گسسته ، نظریه ي اعداد

۱۲۱- کدام‌یک از معادلات زیر در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد؟

۱) $2x\overset{4}{\equiv}3$ ۲) $3x\overset{2}{\equiv}4$ ۳) $4x\overset{2}{\equiv}3$ ۴) $6x\overset{3}{\equiv}1$

۱۲۲- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادلهٔ $5x\overset{12}{\equiv}3$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۱۲۳- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۳۹ به ترتیب برابر ۸ و ۱۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2a+3b$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۲۴- کدام گزاره در حالت کلی صحیح نیست؟ $(m,n,k\in N \text{ و } a,b\in Z)$

۱) $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow (a,m)=(b,m)$ ۲) $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow ak\overset{mk}{\equiv}bk$

۳) $a\overset{n}{\equiv}b \text{ و } a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a\overset{mn}{\equiv}b$ ۴) $a\overset{m}{\equiv}b \text{ و } n\mid m \Rightarrow a\overset{n}{\equiv}b$

۱۲۵- اگر بخواهیم ۷۵ کیلوگرم برنج را در کیسه‌های ۷ و ۴ کیلوگرمی بسته‌بندی کنیم، حداقل تعداد کیسه‌های لازم کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۱۲۶- اگر دو عدد ۱۲۳ و ۳۹ متعلق به یک دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m باشند و $(m,6)=1$، آنگاه عدد ۱۳۸۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m تعلق خواهد داشت؟ $(m>1)$

۱) [۱] ۲) [۲] ۳) [۵] ۴) [۶]

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۷- تعداد جملات مجموع $\ldots+۹۹۹۹+۹۹۹+۹۹+۹$، حداقل چقدر باشد تا حاصل بر ۱۱ بخش‌پذیر شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۲۸- a عددی صحیح و زوج است. رقم یکان عدد $b = a^{۷} + a^{۲۷} + a^{۴۷} + a^{۶۷} + a^{۸۷}$ به ازای مقادیر مختلف a چند مقدار متمایز می‌تواند بپذیرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۲۹- عدد $a + (۱۳۹۱)^{۲۰۱۳}$ مضرب ۱۱ است. کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۰- اعداد صحیح x و y در معادلهٔ $۷۹x + ۲۴y = ۹$ صدق می‌کنند. باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۸ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۱

ریاضی پایه ، تابع

۱۰۱- اگر توابع f و g یک‌به‌یک باشند، کدام یک از توابع زیر همواره یک‌به‌یک است؟

۱) $f+g$ ۲) $f-g$ ۳) $f.g$ ۴) fog

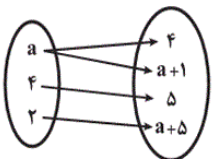
۱۰۲- به‌ازای چند مقدار m، تابع $f = \{(۱, m^{۳} - m), (m, ۴), (۱, ۴m^{۲} - ۴), (۵, m+۱), (۰, m^{۲} + ۲)\}$ وارون‌پذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۳- در تابع خطی f رابطهٔ $۴f(۲x) = f(۸x-۱) - ۵$ برقرار است. اگر $f^{-۱}(۳) = ۵$ باشد، مقدار m از تساوی $f^{-۱}(m) = ۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۴- نمودار پیکانی تابع f به‌صورت زیر و تابع g به صورت $g = \{(x, ۲x-۱) \mid x \in R_f\}$ است. خروجی تابع $f+g$ کدام است؟



۱) ۷
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۵

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۵- اگر $f=\{(۲,۳),(a,۴),(۱۲,۱)\}$، $g(x)=x+\sqrt{x}$ باشد و $fog=\{(۱,۳),(۴,۴),(b,۱)\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۵

۱۰۶- اگر $f(x)=۲-\sqrt{x}$ باشد، دامنهٔ تابع $fof(x)$ بازهٔ $[a,b]$ است. نقطهٔ میانی این بازه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۷- اگر $fof^{-۱}=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ و $f^{-۱}of=\{(d,d),(e,e),(f,f)\}$ باشند، آن‌گاه تابع $f^{-۱}$ به چند صورت مختلف می‌تواند نوشته شود؟

۱) ۳ ۲) ۲۷ ۳) ۶ ۴) ۱۸

۱۰۸- اگر $f=\{(-۱,۲),(۰,۳),(-۲,۲),(۱,-۱),(۵,۱)\}$ و $g=\{(۱,۰),(۵,-۱),(۳,۰),(۲,-۱),(-۲,۵)\}$ باشد، حاصل‌ضرب مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع $\frac{-f^{۲}-۱}{۲f.g}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) -۴ ۴) ۴

ریاضی پایه ، مثلثات

۱۰۹- حاصل $\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲}\tan\frac{۴\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

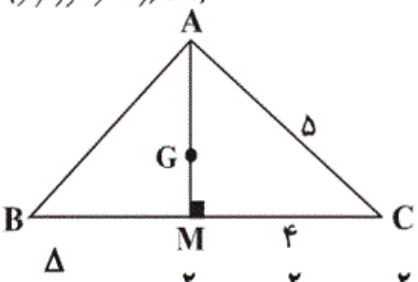
۱۱۰- مجموع اعداد صحیح دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(\cos^{-۱}(۱-\sqrt{x}))$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۳۱- (محمدرضا دلاورنژاد)



مطابق شکل، میانهٔ AM همان ارتفاع وارد بر BC است، بنابراین داریم:

$$\Delta AMC: AM^{۲} = AC^{۲} - MC^{۲} = ۵^{۲} - ۴^{۲} = ۹ \Rightarrow AM = ۳$$

می‌دانیم میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، پس اگر G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، آنگاه داریم:

$$AG = \frac{۲}{۳}AM = \frac{۲}{۳} \times ۳ = ۲$$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحهٔ ۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۲- (محسن فاطمی)

تعداد قطرهای n ضلعی محدب $= \frac{n(n-۳)}{۲}$

تعداد قطرهای گذرنده از هر رأس $= n - ۳$

باید تعداد قطرهای گذرنده از یک رأس را از کل تعداد قطرهای این ۲۰ ضلعی محدب کم کنیم.

از یک رأس مشخص، $۲۰ - ۳ = ۱۷$ قطر می‌گذرد، پس تعداد قطرهایی که از یک رأس مشخص نمی‌گذرند، برابر است با:

$$\frac{۲۰(۲۰-۳)}{۲} - ۱۷ = ۱۷۰ - ۱۷ = ۱۵۳$$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحه‌های ۹ و ۱۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۳- (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

طبق قضیهٔ لولا، چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ دو ضلع متساوی دارند $(AB = A'B', AC = A'C')$ و $\hat{A}' < \hat{A} = ۹۰^\circ$ است، باید داشته باشیم، $B'C' < BC$

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ فیثاغورس در } : BC^۲ = ۴^۲ + (a-۲)^۲$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{۱۶ + (a-۲)^۲}$$

$$B'C' < BC \Rightarrow a < \sqrt{۱۶ + (a-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow a^۲ < ۱۶ + (a-۲)^۲ \Rightarrow a < ۵ \quad (۱)$$

از طرفی $a - ۲ > ۰$، پس $a > ۲$. هم‌چنین طبق رابطهٔ نامساوی مثلث داریم:

$$(a-۲) + a > ۴ \Rightarrow a > ۳ \quad (۲)$$

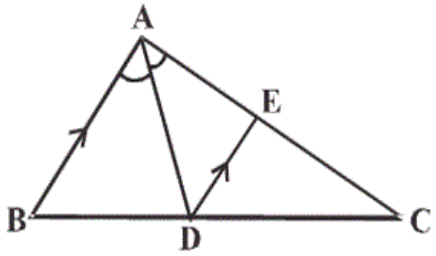
$$(۱), (۲) \Rightarrow ۳ < a < ۵$$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۴- (مهرداد ملوندی)

$$\frac{۲}{۳}AC = AB = ۴ \Rightarrow \begin{cases} AB = ۴ \\ AC = ۶ \end{cases}$$



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۴}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{BD}{BD + DC} = \frac{۲}{۲+۳} \Rightarrow BD = \frac{۲}{۵}BC$$

$$ED \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{AE}{۶} \Rightarrow AE = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحهٔ ۱۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۵- (رحمت عین‌علیان)

مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع (به ضلع a) از سه ضلع آن، با ارتفاع مثلث یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ برابر است. پس طبق فرض داریم:

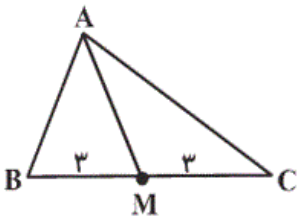
$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۶ \Rightarrow a = ۴\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث: $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times (۴\sqrt{۳})^۲ = ۱۲\sqrt{۳}$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحهٔ ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۶- (فرهاد وفایی)



AM میانه است، پس $BM = MC = \frac{BC}{۲} = ۳$.

در مثلث ABM داریم:

$$|AM - BM| < AB < AM + BM \Rightarrow ۲ < AB < ۸$$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحه‌های ۲۵ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۷- (فرهاد وفایی)

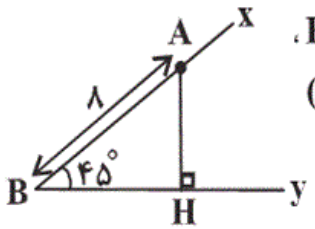
نکته: از برخورد نیمسازهای داخلی یک مستطیل به طول اضلاع a و b، مربعی با طول ضلع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}|b-a|$ و مساحت $\frac{(b-a)^۲}{۲}$ پدید می‌آید.

پس مساحت چهارضلعی مورد نظر برابر است با: $S = \frac{(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲})^۲}{۲} = ۴$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحهٔ ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۸- (مهرداد ملوندی)



زاویهٔ $x\hat{B}y = ۴۵^\circ$ را رسم و روی نیم‌خط Bx، رأس A را مشخص می‌کنیم: $(AB = ۸)$

فاصلهٔ نقطهٔ A از نیم‌خط By برابر است با:

$$AH = AB.\sin ۴۵^\circ = ۸(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = ۴\sqrt{۲} \xrightarrow{\sqrt{۲} \simeq ۱/۴} AH \simeq ۵/۶$$

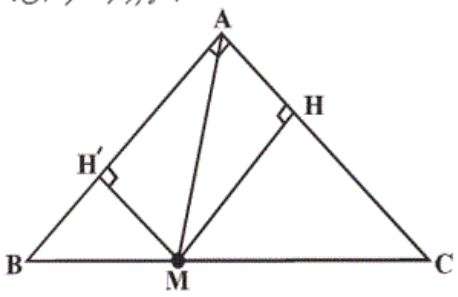
چون $AC < AH$ است، پس چنین مثلثی وجود نخواهد داشت.

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹- (مهرداد ملوندی)



با توجه به شکل، فرض می‌کنیم $MH > MH'$ که طبق فرض داریم: $MH - MH' = ۲$ (۱)

از طرفی اگر از نقطه‌ای روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین، دو خط عمود بر دو ساق رسم کنیم تا آن‌ها را قطع کند، آنگاه مجموع طول پاره‌خط‌های ایجاد شده برابر طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث است، پس:

$$MH + MH' = ۴ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} MH = ۳, MH' = ۱$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM داریم:

$$\begin{cases} AM^۲ = AH^۲ + MH^۲ \\ AH = MH' = ۱ \end{cases} \Rightarrow AM^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰ \Rightarrow AM = \sqrt{۱۰}$$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحهٔ ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۰- (امیرحسین ابومحبوب)

$$\overset{\Delta}{ABC} : BC < AB \Rightarrow \hat{A}_۱ < \hat{C}_۱$$

$$\overset{\Delta}{ADC} : CD < AD \Rightarrow \hat{A}_۲ < \hat{C}_۲$$

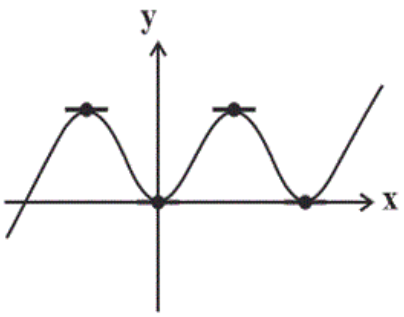
$$\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADC} : \begin{cases} AD = BC \\ AC = AC \\ DC < AB \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ لولا}} \hat{A}_۲ < \hat{C}_۱$$

اما نامساوی گزینهٔ «۳» در حالت کلی برقرار نیست.

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۱- (عزیزاله علی‌اصغری)



با توجه به شکل، در ۴ نقطه خط مماس بر نمودار، موازی محور x ها است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۴)

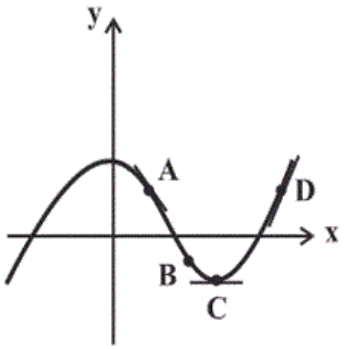
۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۲- (علی شهرابی)

اگر نقطه‌ای بالای محور x ها باشد، مقدار تابع در آن نقطه مثبت و اگر نقطه‌ای پایین محور x ها باشد، مقدار تابع در آن نقطه منفی است. پس:

$$f(x_A)>0, f(x_B)<0, f(x_C)<0, f(x_D)>0$$



مقدار f' در هر نقطه، برابر با شیب خط مماس بر تابع f در آن نقطه است. با توجه به نمودار داریم:

$$f'(x_A)<0, f'(x_B)<0, f'(x_C)=0, f'(x_D)>0$$

پس:

$$f(x_A)f'(x_A)<0, f(x_B)f'(x_B)>0$$

$$f(x_C)f'(x_C)=0, f(x_D)f'(x_D)>0$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۳- (یاسین سپهر)

با توجه به شکل رسم‌شده، شیب خط مماس در نقطهٔ A منفی است. هم‌چنین این خط، محورهای مختصات را در نقاط با مؤلفه‌های مثبت قطع می‌کند؛ یعنی عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط مماس مثبت است. از بین معادلات داده شده فقط معادلهٔ $x+y-5=0$ دارای ویژگی‌های مورد نظر است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۴)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- (قاسم کتابچی)

گزینهٔ «۱»:

$$\begin{cases} f(x)=x^{۲} \\ a=۲ \end{cases} \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^{۲}-۲^{۲}}{h}$$

گزینهٔ «۲»:

$$\begin{cases} f(x)=(x-۱)^{۲} \\ a=۳ \end{cases} \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{(۳+h-۱)^{۲}-۲^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲+h)^{۲}-۴}{h}$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۵- (حسن حاجیلو)

$$f(۲)=۰ \Rightarrow \text{شیب خط مماس}=f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)}{h}=\frac{۱}{۲}$$

$$y-۰=\frac{۱}{۲}(x-۲)\Rightarrow ۲y=x-۲$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۶- (عزیزاله علی‌اصغری)

$$m_l=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow f'(۳)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

معادلهٔ خط l را می‌نویسیم:

$$l \text{ معادلهٔ خط}: y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow f(۳)=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow f'(۳)+f(۳)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳}$$

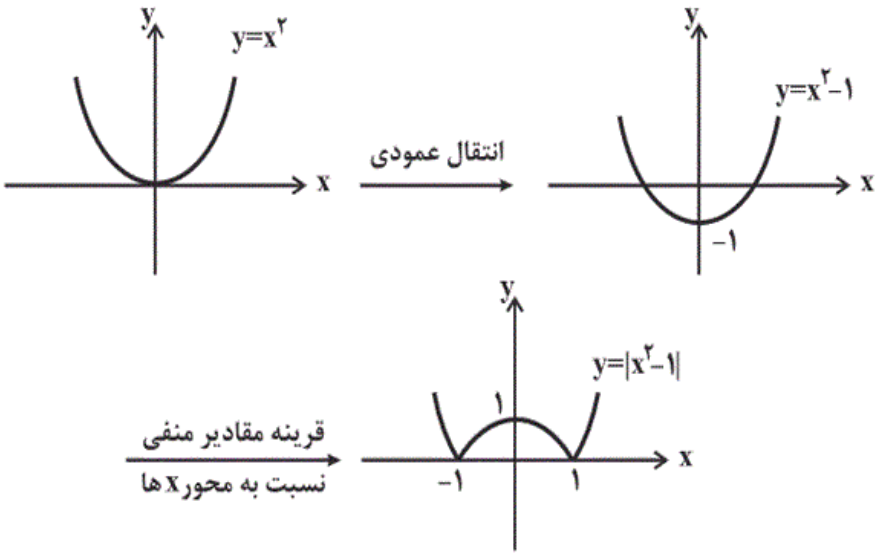
(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۷ (عرفان صادقی)

با توجه به اینکه $g'(a)$، شیب خط مماس در $x=a$ می‌باشد، بنابراین $x=a$ طولی است که در آن شیب خط مماس برابر صفر است.



با توجه به نمودار $g(x)=|x^2-1|$، شیب خط مماس فقط در $x=0$، برابر صفر است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۸۸ (یاسین سپهر)

با توجه به گزینه‌های داده شده ضابطهٔ f' یک تابع درجهٔ دوم به‌صورت $f'(x)=ax^2+bx+c$ می‌باشد. از طرفی با توجه به نمودار f، خطوط مماس بر نمودار تابع f در نقاط ۲- و ۳ افقی هستند، بنابراین $f'(-2)=f'(3)=0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$f'(x)=a(x+2)(x-3)=a(x^2-x-6)$$

با قرار دادن $a=2$، ضابطهٔ تابع گزینهٔ «۳» به‌دست می‌آید.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۹- (حبیب شفیعی)

$$y = ۳x - ۲ \Rightarrow m = ۳ \Rightarrow f'(۲) = ۳$$

$$x = ۲ \xrightarrow{y=۳x-۲} y = ۴ \Rightarrow f(۲) = ۴$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{f^۲(x) - ۲f(x) - ۸}{x^۲ - ۴} = \lim_{x\to ۲} \frac{(f(x)-۴)(f(x)+۲)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$= \frac{f(۲)+۲}{۲+۲} \times \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-۴}{x-۲} = \frac{۴+۲}{۴} \times f'(۲) = \frac{۶}{۴} \times ۳ = \frac{۱۸}{۴} = \frac{۹}{۲}$$

دقت کنید که در عبارت فوق از $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-۴}{x-۲} = f'(۲)$ استفاده کرده‌ایم.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۰- (کاظم اجلالی)

آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ $[۱,۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۶)-f(۱)}{۶-۱} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow f(۶) - f(۱) = ۱ \Rightarrow \sqrt{۶+k} - \sqrt{۱+k} = ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{۶+k} = ۱ + \sqrt{۱+k} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۶+k = ۱+۱+k+۲\sqrt{۱+k}$$

$$\Rightarrow ۲ = \sqrt{۱+k} \Rightarrow ۱+k = ۴ \Rightarrow k = ۳$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x+۳} \Rightarrow f(-۲) = \sqrt{-۲+۳} = ۱$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۱- (عرفان صادقی)

ابتدا آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f را در $t=۴$ به‌دست می‌آوریم که همان $f'(۴)$ است.

$$f(t)=t-\sqrt{t} \Rightarrow f'(t)=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{t}} \Rightarrow f'(۴)=\frac{۳}{۴}$$

از طرفی برای آهنگ متوسط تغییر نیز داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ } [۱,۴] = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{۲-۰}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

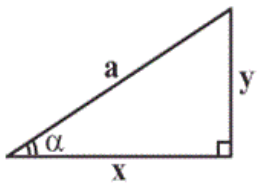
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۱۲}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۲- (حمیدرضا کلاته‌جاری)

$$S=\frac{x.y}{۲}=\frac{(a.\cos(\alpha)).(a.\sin(\alpha))}{۲}=\frac{a^۲.\sin(۲\alpha)}{۴}$$



$$\Rightarrow S(\alpha)=\frac{۱}{۴}a^۲.\sin(۲\alpha)$$

$$\Rightarrow S'(\alpha)=\frac{۱}{۴}a^۲\times ۲\cos(۲\alpha)$$

$$\Rightarrow S'(۲۲/۵^\circ)=\frac{۱}{۴}a^۲\times ۲\underbrace{\cos(۴۵^\circ)}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}a^۲$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۳ (مرتضی روزبهانی)

تابع درآمد : $R(x)=۱۰۰x$

تابع هزینه : $C(x)=R(x)-P(x)=۱۰۰x-(۱۰x-۲۱۰۰+x^۲)$

$\Rightarrow C(x)=۲۱۰۰+۹۰x-x^۲ \Rightarrow C'(x)=۹۰-۲x$

$\underbrace{C(۱۱)-C(۱۰)}_{\text{هزینهٔ تولید یازدهمین کالا}} \simeq C'(۱۰)=۷۰$ تومان

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۹۴ (کاظم اجلالی)

تابع f در $x=۱$ پیوستگی چپ و در نتیجه مشتق چپ ندارد. بنابراین عبارت $f'_-(۱)=۳$ نادرست است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۵ (علی شهرابی)

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|ax^۲-۴a|-۰}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|a||x-۲||x+۲|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|a|(x-۲)(۴)}{x-۲}=۴|a|$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|a||x-۲||x+۲|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|a|(-x+۲)(۴)}{x-۲}=-۴|a|$$

چون قرار است دو نیم‌مماس بر هم عمود باشند، پس باید شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم باشد:

$$\Rightarrow f'_+(۲)f'_-(۲)=-۱\Rightarrow(۴|a|)(-۴|a|)=-۱\Rightarrow ۱۶|a|^۲=۱$$

$$\Rightarrow |a|=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۴}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۶

مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x^{۲} & ; \quad x<۱\\ \frac{-۱}{۳}x & ; \quad x>۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{۱}=\lim_{x\to ۱^{-}} f'(x)=\frac{۱}{۲},\ m_{۲}=\lim_{x\to ۱^{+}} f'(x)=\frac{-۱}{۳}$$

حال اگر زاویهٔ بین دو نیم مماس را θ بنامیم، داریم:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_{۱}-m_{۲}}{۱+m_{۱}m_{۲}}\right|=\left|\frac{\frac{۱}{۲}-(\frac{-۱}{۳})}{۱+\frac{۱}{۲}\times(\frac{-۱}{۳})}\right|=۱\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۷- (کیا مقدس‌نیاک)

ضابطهٔ بالایی، به دلیل حضور $[x]$، به ازای مقادیر صحیح x مشتق‌ناپذیر است.

$$f(x)=\begin{cases}۲x^۲-x & ; x\le -۱\\ x+[x] & ; -۱<x<۱\\ ۲x^۲+x & ; x\ge ۱\end{cases}$$

پس تاکنون این تابع در $x=۰$ مشتق ناپذیر است و در نقاط $x=-۱$ و $x=۱$

تابع دارای ناپیوستگی است، در نتیجه در این نقاط نیز تابع f مشتق‌ناپذیر است.

$$f'(x)=\begin{cases}۴x-۱ & ; x<-۱\\ ۱ & ; -۱<x<۱\\ ۴x+۱ & ; x>۱\end{cases}$$

نقاطی که تابع f در آن‌ها مشتق ناپذیر است، در دامنهٔ f' وجود نخواهندداشت. پس:

$$D_{f'}=\mathbb{R}-\{-۱,۰,۱\}$$

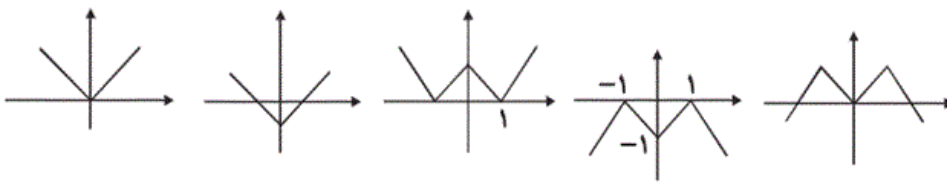
(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۸- (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

$$f(f(x))=۱-|۱-|x||=۱-||x|-۱|$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. داریم:



$y=|x|$ $y=|x|-۱$ $y=||x|-۱|$ $y=-||x|-۱|$ $y=۱-||x|-۱|$

بنابراین تابع در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۹- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$(f \pm g)(x) = |x^2 - x| \pm |x^2 + x| = |x|(|x-1| \pm |x+1|)$$

$$(f-g)'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|(|x-1| - |x+1|) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|(-2x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (-2|x|) = 0$$

بنابراین $f - g$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

$$(f+g)'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|(|x-1| + |x+1|) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2|x|}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2|x|}{x} = 2 \\ (f+g)'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2|x|}{x} = -2 \end{cases}$$

بنابراین $f + g$ در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۰۰ (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

راه حل اول: در نقاط ناصحیح، تابع f پیوسته و مشتق‌پذیر است. در نقاط صحیح تابع $y=[x]$ ناپیوسته است. پیوستگی f را در نقاط صحیح k بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to k} f(x)=(1-\cos 2k\pi)[k^{\pm}]=0\times \text{عدد}=0 \quad \text{و} \quad f(k)=0$$

f در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

با توجه به این که $(1-\cos 2\pi x)'=2\pi\sin 2\pi x$ داریم:

$$f'_{+}(k)=[k^{+}](2\pi)\sin 2\pi k=0$$

$$f'_{-}(k)=[k^{-}]2\pi\sin 2\pi k=0$$

تابع در نقاط صحیح و در نتیجه در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

راه حل دوم:

نکته: اگر تابع $y=[g(x)]$ در $x=a$ ناپیوسته باشد، تابع $y=h(x)[g(x)]$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است، به شرط این که $h(a)=h'(a)=0$ باشد.

یعنی $x=a$ ریشهٔ مضاعف $h(x)$ باشد.

چون نقاط صحیح ریشهٔ مضاعف $\cos 2\pi x-1$ است، پس تابع داده‌شده در هر نقطه‌ای مشتق‌پذیر است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- (محمدرضا دلاورنژاد)

هذلولی یا دو خط متقاطع است. $b^2 - 4ac = 12 - 4(1)(-1) = 16 > 0 \Rightarrow$

$$f(x,y) = x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - 3 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{مقطع مخروطی}]{\text{مختصات مرکز}} \begin{cases} f'_x = 2x - 2\sqrt{3}y = 0 \\ f'_y = -2y - 2\sqrt{3}x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \ , \ y = 0$$

چون مختصات نقطهٔ $O = (0,0)$ در معادلهٔ فوق صدق نمی کند، پس منحنی مورد نظر هذلولی است. به عنوان تمرین، معادلهٔ فوق را استاندارد کنید و نشان دهید مربوط به یک هذلولی است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۲- (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

$$y^2 - 2y - 4x^2 - 16x = 19$$

$$\Rightarrow \ y^2 - 2y + 1 - (4x^2 + 16x + 16) = 4$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 - 4(x^2 + 4x + 4) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{1} = 1$$

$$a^2 = 4, b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ فاصلهٔ کانونی: $|FF'| = 2c = 2\sqrt{5}$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۳- (محمدرضا دلاورنژاد)

چون این هذلولی افقی و نقطهٔ $(-1,1)$ یکی از رأس‌های آن است، پس خط به معادلهٔ $y = 1$ محور کانونی آن است. از طرفی می‌دانیم که محور کانونی، مجانب هذلولی را در مرکز هذلولی قطع می‌کند.

مرکز هذلولی : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \ , \ y = 1 \Rightarrow O' = (\alpha,\beta) = (1,1)$

شیب خط مجانب داده شده برابر $m = -\frac{1}{2}$ است، پس شیب خط مجانب دیگر این هذلولی برابر $m' = \frac{1}{2}$ خواهد بود. مجانب‌های هر هذلولی در مرکز هذلولی یکدیگر را قطع می‌کنند، پس

معادلهٔ مجانب دیگر عبارت است از: $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow x = 2y - 1$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۴- (محسن رجبی)

$$-۹x^۲+۱۶y^۲-۷۲x-۹۶y-۱۴۴=۰$$

$$\Rightarrow -۹(x^۲+۸x)+۱۶(y^۲-۶y)-۱۴۴=۰$$

$$\Rightarrow -۹(x+۴)^۲+۱۶(y-۳)^۲=۱۴۴\Rightarrow \frac{(y-۳)^۲}{۹}-\frac{(x+۴)^۲}{۱۶}=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O'=(\alpha,\beta)=(-۴,۳) \\ a^۲=۹, b^۲=۱۶\Rightarrow c=\sqrt{a^۲+b^۲}=۵ \end{cases}$$

با توجه به معادله، چون هذلولی قائم است پس مختصات دو کانون آن عبارتست از:

$$F=(\alpha,\beta+c)=(-۴,۳+۵)=(-۴,۸)$$

$$F'=(\alpha,\beta-c)=(-۴,۳-۵)=(-۴,-۲)$$

F' دو واحد و F هشت واحد از محور x ها فاصله دارند، بنابراین عرض نزدیک‌ترین کانون نسبت به محور x ها، برابر $x_{F'}=-۲$ است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۵- (داریوش ناظمی)

$$x^۲-y^۲=۱\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O=(\alpha,\beta)=(۰,۰) \\ a^۲=b^۲=۱\Rightarrow c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۲} \end{cases}$$

چون هذلولی افقی است، پس مختصات کانونی از آن با طول مثبت به‌صورت $F=(\alpha+c,\beta)=(\sqrt{۲},۰)$ است.

در هر هذلولی فاصلهٔ هر یک از کانون‌ها تا مجانب‌های هذلولی برابر است با b. پس شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $R=۱$ و در نتیجه معادلهٔ آن عبارت است از:

$$(x-\sqrt{۲})^۲+y^۲=۱$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۶- (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا معادلهٔ سهمی $y=۲x^۲-۸x$ را به صورت استاندارد در می‌آوریم:

$$y=۲(x^۲-۴x+۴)-۸\Rightarrow y+۸=۲(x-۲)^۲ \xrightarrow{\text{رأس سهمی}} S(۲,-۸)$$

حال اگر مبدأ مختصات را به نقطهٔ $O'=S=(۲,-۸)$ منتقل کنیم، داریم:

$$\begin{cases} x'=x-۲ \\ y'=y+۸ \end{cases}$$

یعنی معادلهٔ سهمی به صورت $y'=۲x'^۲$ در می‌آید. (x' و y' مختصات در دستگاه جدید هستند.) همان‌طور که مشاهده می‌شود نقطهٔ O' در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار دارد.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۶ تا ۷۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۷- (امیرحسین ابومحبوب)

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{2}{0} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

پس زاویهٔ مناسب برای دوران برابر $\frac{\pi}{4}$ است. با توجه به رابطهٔ بین مختصات در دستگاه قدیم و جدید، داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-5\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۸- (سیدعادل رضا مرتضوی)

$$3xy = 2 \Rightarrow 0x^2 + 3xy + 0y^2 = 2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{b}{a-c} = \frac{3}{0} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

$$3xy = 2 \Rightarrow 3 \times \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 2$$

$$\Rightarrow 3x'^2 - 3y'^2 = 4 \Rightarrow \frac{x'^2}{\frac{4}{3}} - \frac{y'^2}{\frac{4}{3}} = 1 \Rightarrow \text{هذلولی است}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 2c = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۱۹- (ناصر پایافر)

$$\begin{cases} AA' = 2a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a = 2 \\ FF' = 2c \Rightarrow 2\sqrt{6} = 2c \Rightarrow c = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2}$$

در این هذلولی داریم:

هذلولی افقی است (چون $y_A = y_{A'}$)، پس داریم:

شیب خطوط مجانب‌های هذلولی افقی: $m = \pm\frac{b}{a} \Rightarrow m = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۰ (امید محمدطاهری)

اگر معادلهٔ $ax^۲+bxy+cy^۲+dx+ey+f=۰$، پس از دوران محورهای مختصات، به اندازهٔ دلخواه و در جهت مثلثاتی در دستگاه جدید به‌صورت $Ax'^۲+Bx'y'+Cy'^۲+Dx'+Ey'+F=۰$، بازنویسی شود، در صورتی‌که $|f|=|F|$ باشد، رابطهٔ روبه‌رو برقرار است: $B^۲-۴AC=b^۲-۴ac$

$$x'^۲-۲y'^۲=۱\Rightarrow B^۲-۴AC=۰-۴(۱)(-۲)=۸$$

در گزینهٔ «۲» داریم: $x^۲+y^۲-۶xy=-۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}y^۲-۳xy=-۱$

$$\Rightarrow b^۲-۴ac=۹-۴(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲})=۸$$

در سایر گزینه‌ها رابطهٔ مورد نظر برقرار نیست.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحهٔ ۹۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۲۱ (حسام سمیعی)

معادلهٔ $ax\overset{m}{\equiv}b$ در مجموعهٔ اعداد صحیح موقعی دارای جواب است که داشته باشیم $(a,m)\mid b$.

در بین گزینه‌ها، تنها معادلهٔ $۳x\overset{۲}{\equiv}۴$ در Z دارای جواب است، زیرا:

$$(۳,۲)=۱\quad ,\quad ۱\mid ۴$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۲۲ (علیرضا رسولی‌پور)

$$۵x\overset{۱۲}{\equiv}۳\overset{۱۲}{\equiv}۱۵\xrightarrow[(۵,۱۲)=۱]{\div ۵}x\overset{۱۲}{\equiv}۳\Rightarrow x=۱۲k+۳,k\in Z$$

$$x=۱۲k+۳\geq ۱۰۰\Rightarrow ۱۲k\geq ۹۷\Rightarrow k\geq \frac{۹۷}{۱۲}\Rightarrow k\geq ۹$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x به ازای $k=۹$ به دست می‌آید:

$$x=۱۲\times ۹+۳=۱۱۱$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۳- (محمدعلی نادرپور)

$$a\overset{۳۹}{\equiv}۸\ ,\ b\overset{۳۹}{\equiv}۱۲ \Rightarrow ۲a+۳b\overset{۳۹}{\equiv}۵۲\overset{۳۹}{\equiv}۱۳ \xrightarrow{۱۳\mid۳۹} ۲a+۳b\overset{۱۳}{\equiv}۱۳\overset{۱۳}{\equiv}۰$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۴- (علیرضا شریف‌خطیبی)

مثال نقض برای گزینهٔ ۳: $۳۲\overset{۸}{\equiv}۸\ ,\ ۳۲\overset{۱۲}{\equiv}۸\ ,\ ۳۲\overset{۸\times۱۲}{\not\equiv}۸$

تمرین: درستی گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) را خودتان بررسی کنید.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۲۵- (امیرحسین ابومحبوب)

x و y را به ترتیب تعداد کیسه‌های ۷ و ۴ کیلوگرمی در نظر می‌گیریم. داریم:

$$۷x+۴y=۷۵ \Rightarrow ۷x\overset{۴}{\equiv}۷۵$$

$$\Rightarrow ۳x\overset{۴}{\equiv}۳ \xrightarrow[(۳,۴)=۱]{\div ۳} x\overset{۴}{\equiv}۱ \Rightarrow x=۴k+۱, k\in Z$$

$$۷(۴k+۱)+۴y=۷۵$$

$$\Rightarrow ۴y=۶۸-۲۸k \Rightarrow y=۱۷-۷k$$

با توجه به اینکه x و y اعدادی صحیح و نامنفی هستند، پس مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از $۰,۱,۲$، داریم:

$$k=۰ \Rightarrow x=۱, y=۱۷ \Rightarrow x+y=۱۸$$

$$k=۱ \Rightarrow x=۵, y=۱۰ \Rightarrow x+y=۱۵$$

$$k=۲ \Rightarrow x=۹, y=۳ \Rightarrow x+y=۱۲$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۶- (مهرداد ملوندی)

$$(m,۶)=۱ \xrightarrow{۱۲=۶\times۲} (m,۱۲)=۱$$

$$۱۲۳ \overset{m}{\equiv} ۳۹ \Rightarrow m \mid ۱۲۳-۳۹ \Rightarrow m \mid ۸۴$$

$$\Rightarrow m \mid ۱۲\times ۷ \xrightarrow{(m,۱۲)=۱} m \mid ۷ \xrightarrow{m>۱} m=۷$$

پس باید باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۱۳۸۸ را بر ۷ پیدا کنیم:

$$۱۳۸۸ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۱۳۸۸ \in [۲]_۷$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۷- (امیرحسین ابومحبوب)

$$۹۹۹...۹ \overset{۱۱}{\equiv} \begin{cases} ۰ & \text{تعداد ارقام زوج باشد.} \\ ۹ & \text{تعداد ارقام فرد باشد.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۹+۹۹+۹۹۹+۹۹۹۹+...\overset{۱۱}{\equiv} ۹+۰+۹+۰+...$$

برای این که مجموع عبارت به پیمانهٔ ۱۱ هم‌نهشت با صفر شود، حداقل ۱۱ جمله با تعداد ارقام فرد نیاز داریم. برای دسترسی به این هدف، جمع مورد نظر حداقل باید ۲۱ جمله داشته باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۸- (بهزاد نظام‌هاشمی)

$$b=a^۷+a^{۲۷}+a^{۴۷}+a^{۶۷}+a^{۸۷}$$

$$\overset{۱۰}{\equiv} a^۳+a^۳+a^۳+a^۳+a^۳=۵\underbrace{a^۳}_{\text{عدد زوج}}=۵(۲k)\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

یعنی به ازای مقادیر مختلف a، رقم یکان عدد b همواره برابر صفر است.

نکته: اگر a عددی صحیح و n عددی طبیعی باشد (به طوری که $n=۴q+r$ ، $۰\le r<۴$) ، آنگاه داریم:

$$\xrightarrow{r=۰} a^n \overset{۱۰}{\equiv} a^۴$$

$$\xrightarrow{r=۱,۲,۳} a^n \overset{۱۰}{\equiv} a^r$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۹- (امیرحسین ابومحبوب)

$$۱۳۹۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۱ - ۹ + ۳ - ۱ \overset{۱۱}{\equiv} -۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$$

پس کافی است هم‌نهشتی $۵^{۲۰۱۳}$ را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم. داریم:

$$۵^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به‌توان ۲۰۱}} ۵^{۲۰۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵^۳} ۵^{۲۰۱۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۵^۳ = ۱۲۵ \quad \text{(قضیهٔ فرما)}$$

$$\Rightarrow ۵^{۲۰۱۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۱۳۹۱^{۲۰۱۳} + a \overset{۱۱}{\equiv} ۴ + a$$

بنابراین $۴ + a$ باید مضرب ۱۱ باشد و در نتیجه کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر است با $۱۱ - ۴ = ۷$.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۰- (کاظم باقرزاده‌چهره)

$$۷۹x \overset{۲۴}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۷x \overset{۲۴}{\equiv} ۹ \xrightarrow{۸|۲۴} ۷x \overset{۸}{\equiv} ۹$$

$$\Rightarrow -x \overset{۸}{\equiv} ۱ \Rightarrow x \overset{۸}{\equiv} -۱ \overset{۸}{\equiv} ۷$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۱- (محمدرضا شوکتی بیرق)

$$(fog)(x_۱) = (fog)(x_۲)$$

$$\Rightarrow f(g(x_۱)) = f(g(x_۲))$$

$$\xrightarrow{f \text{ یک به یک}} g(x_۱) = g(x_۲)$$

$$\xrightarrow{g \text{ یک به یک}} x_۱ = x_۲ \Rightarrow fog \text{ یک‌به‌یک است.}$$

توجه کنیم که $f + g$ الزاماً یک‌به‌یک نیست، زیرا کافی است فرض شود $f(x) = x$ و $g(x) = -x$.

هم چنین $f - g$ و $f.g$ الزاماً یک به یک نیستند، زیرا کافی است فرض شود $f(x) = g(x) = x$.

(ریاضیات ۲ - تابع: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- (عادل حسینی)

در ابتدا، مجموعهٔ داده‌شده باید تابع باشد؛ بنابراین:

$$m^۳ - m = ۴m^۲ - ۴ \Rightarrow (m-۴)(m^۲-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow m = ۴ \text{ یا } m = ۱ \text{ یا } m = -۱$$

$$\begin{cases} m = ۱ \Rightarrow (۱,۰),(۱,۴) \in f \Rightarrow & \text{مجموعهٔ مورد نظر تابع نیست.} \\ m = -۱ \Rightarrow (۱,۰),(۵,۰) \in f \Rightarrow & \text{تابع } f \text{، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.} \\ m = ۴ \Rightarrow & \text{تابع } f \text{، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.} \end{cases}$$

در نتیجه فقط برای $m = ۴$ است که تابع f وارون‌پذیر است.

(ریاضیات ۲ - تابع: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۳- (امیرهوشنگ خمسه)

تابع f را به‌صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:

$$۴(a(۲x)+b) = a(۸x-۱)+b-۵ \Rightarrow a + ۳b = -۵ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(۳) = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۳ \Rightarrow ۵a + b = ۳ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a = ۱, b = -۲ \Rightarrow f(x) = x - ۲$$

$$\xrightarrow{f(۲)=m} m = ۲ - ۲ = ۰$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۸۹ تا ۹۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۴- (رضا زندکانی)

$$\left.\begin{matrix} f(a) = ۴ \\ f(a) = a + ۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۴ = a + ۱ \Rightarrow a = ۳$$

واضح است که $g(x) = ۲x - ۱$ و دامنهٔ آن اعضای مجموعهٔ برد تابع f است.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = D_f \cap R_f \Rightarrow D_{f+g} = \{۴\}$$

$$\left.\begin{matrix} f(۴) = ۵ \\ g(۴) = ۲(۴) - ۱ = ۷ \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(۴) + g(۴) = ۱۲$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۵- (میلاد سجادی لاریجانی)

$$(۴,۴)\in fog \Rightarrow f\big(g(۴)\big)=۴ \Rightarrow \big(g(۴),۴\big)\in f$$

$$\Rightarrow a=g(۴)=۶$$

$$(b,۱)\in fog \Rightarrow f\big(g(b)\big)=۱ \Rightarrow \big(g(b),۱\big)\in f \Rightarrow g(b)=۱۲$$

$$\Rightarrow b+\sqrt{b}=۱۲ \xrightarrow{\sqrt{b}=t,t\geq ۰} t^{۲}+t-۱۲=۰$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۶- (امیرهوشنگ خمسه)

کافی است تابع fof را تشکیل دهیم.

$$f(x)=۲-\sqrt{x} \xrightarrow{x\geq ۰\ (۱)} fof(x)=۲-\sqrt{۲-\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{باید}} ۲-\sqrt{x}\geq ۰ \Rightarrow ۲\geq \sqrt{x} \Rightarrow x\leq ۴ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow [a,b]=[۰,۴] \xrightarrow{\text{نقطهٔ میانی}} \frac{۰+۴}{۲}=۲$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۷- (سعید مدیرخراسانی)

$$fof^{-۱}(x)=x \xrightarrow{x\in D_{f^{-۱}}} D_{f^{-۱}}=\{a,b,c\}$$

$$f^{-۱}of(x)=x \xrightarrow{x\in D_f} D_f=R_{f^{-۱}}=\{d,e,f\}$$

چون $f^{-۱}$ باید تابع یک به یک باشد، در نتیجه خانه‌های خالی در تابع زیر به $۳\times ۲\times ۱=۶$ حالت مختلف می‌توانند پُر شوند.

$$f^{-۱}=\{(a,\boxed{۳}),(b,\boxed{۲}),(c,\boxed{۱})\}$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳ و ۸۹ تا ۹۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- (سعید مدیر خراسانی)

$$D_f \cap D_g = \{1, 5, -2\}$$

$$x = 1 : \frac{-f^2 - 1}{2fg} = \frac{-(-1)^2 - 1}{2(-1)(0)} = \frac{-2}{0} \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$x = 5 : \frac{-f^2 - 1}{2fg} = \frac{-(1)^2 - 1}{2(+1)(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x = -2 : \frac{-f^2 - 1}{2fg} = \frac{-(2)^2 - 1}{2(2)(5)} = \frac{-5}{20} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 \times (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۹- (عادل حسینی)

$$\tan(\frac{4\pi}{3}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(\frac{1}{2}\tan\frac{4\pi}{3}) = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۱۰- (عادل حسینی)

$$y_1 = \cos^{-1}(1 - \sqrt{x}) \Rightarrow \text{دامنه} : -1 \le 1 - \sqrt{x} \le 1$$

$$\Rightarrow -1 \le \sqrt{x} - 1 \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{x} \le 2 \Rightarrow D_{y_1} = [0, 4]$$

مقادیری از D_{y_1} قابل قبول هستند که به ازای آن‌ها مقدار y_1 برابر $\frac{\pi}{2}$ نباشد، زیرا

مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نمی‌توانند جزو دامنهٔ تابع $\tan$ باشند.

$$\Rightarrow \cos^{-1}(1 - \sqrt{x}) \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\Rightarrow D_f = [0, 4) - \{1\}$$

اعداد صحیح این بازه صفر، ۲، ۳ و ۴ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۹ است.

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا