



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم ، آشنایی با نظریه اعداد - ۱ سوال -

۱۵۱- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه گزاره $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز نیست؟

$$2(a+b)^2 + (a-b)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$(a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{3a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 \geq 0 \quad (4)$$

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \quad (3)$$

ریاضیات گسسته دوازدهم ، همنهشتی - ۴ سوال -

۱۵۲- در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت برابر ۱۹ و باقی‌مانده برابر ۵ است. مجموع ارقام کوچکترین عدد a

کدام است؟

۸ (۲)

۴ (۱)

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۱۵۳- باقی‌مانده تقسیم عدد $8 \times 3^{15} + 3 \times 2^{17}$ بر عدد ۱۳ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۵ (۴)

صفر (۳)

۱۵۴- اگر اعداد $a+2$ ، $b+7$ و $(1391)^{1391}$ در یک دسته همنهشتی به پیمانه ۱۱ قرار داشته باشند، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $a+b$

بر ۱۱ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۱۵۵- اگر معادله $117x + 221y = 2m + 5$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد، رقم یکان کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی

m کدام است؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

ریاضیات گسسته دوازدهم ، گراف و مدل سازی - ۵ سوال -

۱۵۶- حاصل ضرب درجات رئوس یک گراف مرتبه ۶، برابر ۹۶ است. اندازه این گراف کدام است؟

۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

۱۵۷- گراف K_4 با رأس‌های a, b, c, d چند زیرگراف مانند G دارد که در آنها تعداد یال‌های G از \bar{G} کمتر باشد؟

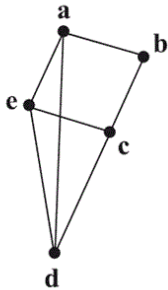
۲۲ (۱)

۲۸ (۲)

۳۸ (۳)

۴۴ (۴)

۱۵۸- در گراف مقابل چند مسیر از رأس a به b وجود دارد؟



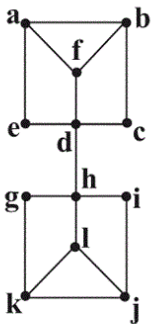
۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

۱۵۹- در گراف مقابل چند دور به طول ۵ وجود دارد؟



۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

۱۶۰- حداقل اندازه یک گراف ۴-منتظم ناهمبند کدام است؟

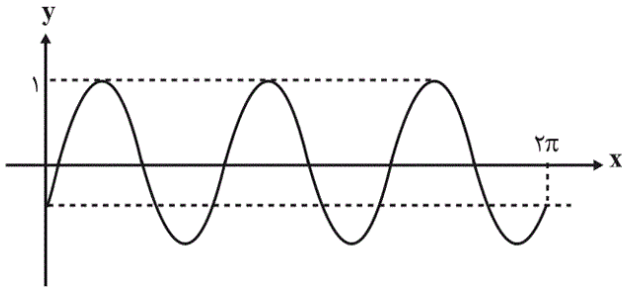
۱۶ (۱)

۲۰ (۲)

۱۰ (۳)

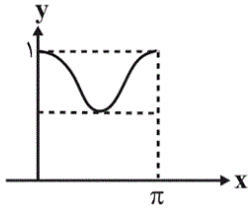
۲۸ (۴)

۱۱۰- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx + \frac{\pi}{6})$ به صورت زیر باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟



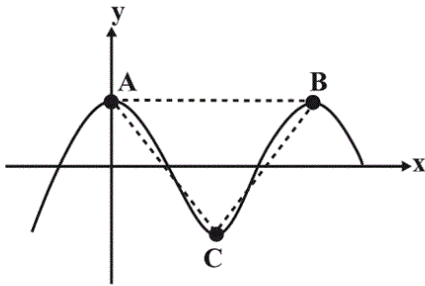
- (۱) -۲
- (۲) ۲
- (۳) -۴
- (۴) -۱

۱۱۱- اگر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - \frac{1}{4} \sin^2 bx$ به صورت زیر باشد، حاصل $a + b$ کدام می تواند باشد؟



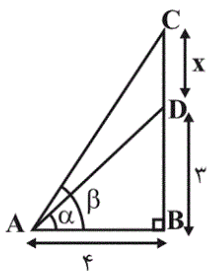
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۱۲- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = a^x \cos ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با 8π واحد مربع باشد، مقدار مثبت a کدام است؟



- (۱) ۲
- (۲) $2\sqrt{2}$
- (۳) ۴
- (۴) $4\sqrt{2}$

۱۱۳- در مثلث قائم الزاویه مقابل، اگر $\tan(\alpha + \beta) = 12$ باشد، مقدار x کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) ۱/۵
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $\sqrt{3}$

۱۱۴- اگر α و β دو جواب معادله $\tan^2 x - 2(k+2)\tan x + k+2 = 0$ باشند، به طوری که $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) $-\frac{3}{2}$
- (۳) -۵
- (۴) -۳

۱۱۵- تابع $f(x) = 3 - 2 \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ روی کدام یک از بازه‌های زیر یکنواست؟

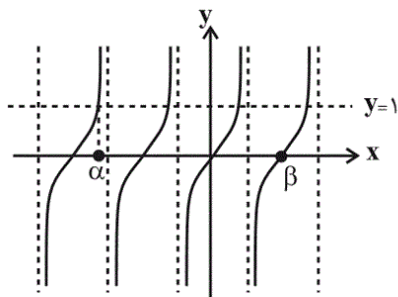
(۴) $\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$

(۳) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(۲) $\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$

(۱) $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right)$

۱۱۶- شکل مقابل مربوط به تابع $y = \tan 2x$ است. حاصل $\beta - \alpha$ کدام است؟



(۱) $\frac{11\pi}{8}$

(۲) $\frac{13\pi}{8}$

(۳) $\frac{9\pi}{8}$

(۴) $\frac{5\pi}{4}$

۱۱۷- مجموع جواب‌های معادله $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

(۲) π

(۱) $\frac{7\pi}{6}$

(۴) 2π

(۳) $\frac{13\pi}{6}$

۱۱۸- معادله $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

(۲) ۵

(۱) صفر

(۴) ۱

(۳) ۲

۱۱۹- جواب کلی معادله $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin x = -\frac{1}{4}$ (که $k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(۴) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

(۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$

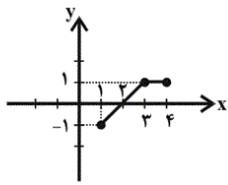
۱۲۰- معادله $\frac{5}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x = \cos 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۲) ۶

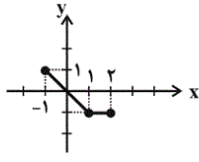
(۱) ۸

(۴) ۲

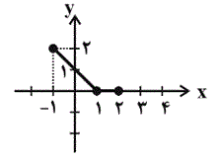
(۳) ۴



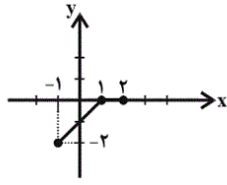
۱۰۱- شکل مقابل نمودار تابع f را نشان می‌دهد. نمودار تابع $y = -f(x+2)$ کدام است؟



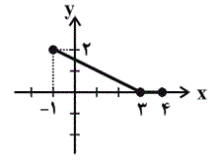
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

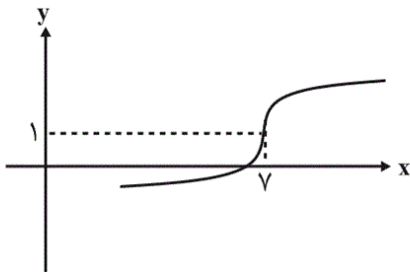
۱۰۲- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را ابتدا نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، سپس ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. نمودار جدید محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)



۱۰۳- اگر نمودار تابع $f(x) = b - \sqrt[3]{a-x}$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

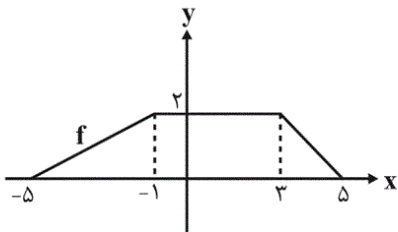
$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

-۲ (۴)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

۱۰۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودارهای دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(2x+a)$ حداقل در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟



$[-15, 15]$ (۲)

$[-20, 15]$ (۱)

$[-15, 20]$ (۴)

$[-10, 20]$ (۳)

۱۰۵- اگر $f(x) = |x|$ ، $g(x) = \begin{cases} f(x-1) & ; x \leq k \\ -f(x)+1 & ; x > k \end{cases}$ و تابع g اکیداً نزولی باشد، حدود k کدام است؟

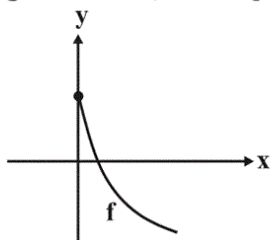
$k \geq 0$ (۴)

$k < 0$ (۳)

$0 \leq k \leq 1$ (۲)

$k \geq 1$ (۱)

۱۰۶- نمودار تابع یکنوای f در شکل زیر رسم شده است. اگر مجموعه جواب نامعادله $f(x-1) < f(5-x)$ بازه (a, b) باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۲ (۲)

۶ (۱)

۵ (۴)

۸ (۳)

۱۰۷- اگر برای دو تابع f و g ، $D_f = D_g$ ، تابع $f - 2g$ اکیداً صعودی و تابع $f - 3g$ اکیداً نزولی باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۲) f اکیداً نزولی و g اکیداً صعودی است.

(۱) f اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی است.

(۴) f و g هر دو اکیداً نزولی‌اند.

(۳) f و g هر دو اکیداً صعودی‌اند.

۱۰۸- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $2x^2 - 2$ برابر با $5x + 2$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 1$ کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۱۰

۱۰۹- اگر خارج قسمت تقسیم $f(x) = x^6 - 2x^3 + 5x + 4$ بر $2x - 2$ برابر $q(x)$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)q(x)$ بر $2x + 2$ کدام

است؟

(۲) ۲

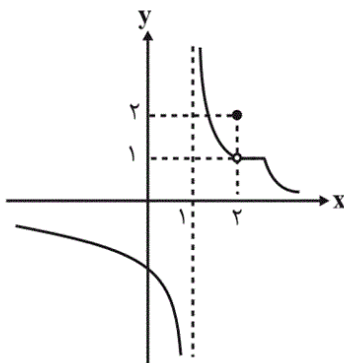
(۱) ۶

(۴) ۴

(۳) ۳

حسابان دوازدهم، حد های نامتناهی - حد در بی نهایت - سوال ۱۰ -

۱۲۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - f(2f(x))}$ کدام است؟



(۱) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) صفر

۱۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} \frac{x-1}{1 + \sqrt{2} \cos x}$ کدام است؟

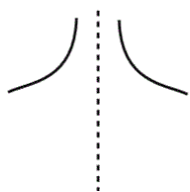
(۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۳) $+\infty$

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $-\infty$

۱۲۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + bx + 4}$ در اطراف مجانب قائمش به صورت مقابل است. مقدار b کدام است؟



(۲) ± 4

(۱) ۴

(۴) ± 2

(۳) -۴

۱۲۴- برای تابع $f(x) = \frac{x(ax^2 + bx + 2)}{2x^2 + (a-1)x + c}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟

$-\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۱۲۵- اگر $f(x) = \frac{-1}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

صفر (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۱۲۶- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + 2ax^2 - x^2 - bx^2 + 1}{ax + b} = 0$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

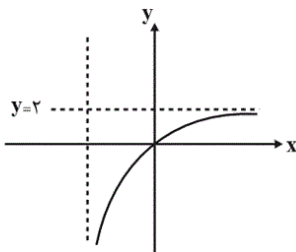
$\frac{1}{3}$ (۴)

۳ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

۱۲۷- نمودار تابع $y = \frac{bx}{x + |x - a| + 3}$ به صورت روبه‌رو است. زوج مرتب (a, b) کدام است؟



(۳, ۲) (۱)

(-۳, ۲) (۲)

(۳, ۴) (۳)

(-۳, ۴) (۴)

۱۲۸- اگر محل تلاقی نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3a}{x^2 + (a+1)x + 2}$ با مجانب افقی اش نقطه‌ای به طول ۴ باشد، فاصله مجانب‌های قائم این تابع از یکدیگر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۲۹- مجانب‌های نمودار تابع $f(x) = \frac{ax|x| - 1}{x^2 - 3x}$ یکدیگر را قطع می‌کنند و شکلی به مساحت ۱۲ می‌سازند. مقدار مثبت a کدام است؟

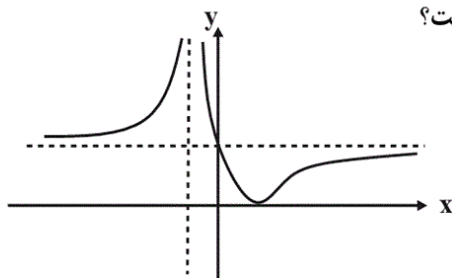
۸ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

۱۳۰- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x + a}{x^2 + bx + 1}$ را نمایش می‌دهد. حاصل a + b کدام است؟



صفر (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

-۱ (۴)

۱۳۵- صفحه‌ای بر محور یک سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند. فصل مشترک (مقطع) حاصل کدام است؟

- (۱) دایره
(۲) سهمی
(۳) بیضی
(۴) هذلولی

۱۳۶- مکان هندسی پای ارتفاع‌های وارد از مبدأ مختصات بر خطوطی که از نقطه $M(2,3)$ می‌گذرند، کدام است؟

- (۱) خطی به معادله $2x - 3y = 1$
(۲) دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$
(۳) خطی به معادله $3x - 2y = 1$
(۴) دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$

۱۳۷- دایره‌ای به مرکز $O(2,1)$ که از خط $4x + 3y + 4 = 0$ و تری به طول ۸ واحد جدا می‌کند، محور xها را در نقاط M و N قطع کرده است. طول پاره‌خط MN کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{6}$
(۲) $2\sqrt{3}$
(۳) $4\sqrt{6}$
(۴) $4\sqrt{3}$

۱۳۸- بیشترین فاصله نقاط دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) $3\sqrt{2}$
(۴) $4\sqrt{2}$

۱۳۹- به‌ازای کدام مقدار m ، دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2(m-1)x + 2my + 4m - 3 = 0$ بر محور yها مماس است؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) -۱
(۴) ۲

۱۴۰- به‌ازای کدام مقادیر a ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + ax + 8y - 11 = 0$ مماس داخل هستند؟

- (۱) ± 2
(۲) ± 4
(۳) ± 6
(۴) ± 12

هندسه ۳- دوازدهم، ماتریس، و کاربردها - ۴ سوال -

۱۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^5 + A^4 + A^3$ کدام است؟

- (۱) $3A$
(۲) A
(۳) $3I$
(۴) I

۱۳۲- دترمینان های دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ c & 4 \end{bmatrix}$ و A^{-1} با هم برابر است. حاصل ضرب درایه های سطر اول A^{-1} کدام است؟ (A^{-1} ، وارون

ماتریس A است.)

- (۱) ۴
(۲) -۴
(۳) ۸
(۴) -۸

۱۳۳- اگر دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} (k+1)x - y = 1 \\ 4x + (k-3)y = 3 \end{cases}$ فاقد جواب باشد، وضعیت دو خط $-x + (k+2)y = 1$ و $2kx - 6y = -(k+1)$

نسبت به هم چگونه است؟

- (۱) متقاطع
(۲) موازی و غیرمنطبق
(۳) منطبق
(۴) غیرمشخص

۱۳۴- اگر $3A + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $4A^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۹
(۲) ۷۲
(۳) -۹
(۴) -۷۲

هندسه ۳ - دوازدهم - گواه، آشنایی با مقاطع مخروطی - سوال ۶ -

۱۴۵- نقاط A، B، C و خط d در صفحه مفروض اند. چند نقطه در صفحه می توان یافت به گونه ای که از این سه نقطه به یک فاصله و

از خط d به فاصله یک واحد باشد؟

- (۱) هیچ یا یک
(۲) یک یا بی شمار
(۳) همواره یک
(۴) هیچ یا بی شمار

۱۴۶- دایره ای از دو نقطه $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و خط $x - y = 2$ شامل قطری از آن است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) ۳

۱۴۷- مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فاصله های آنها از دو نقطه $A(2,0)$ و $B(1,1)$ برابر ۱۰ باشد، یک دایره به شعاع

R است. R کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) $2\sqrt{3}$
(۳) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
(۴) $2\sqrt{5}$

۱۴۸- خط مماس بر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 5$ در نقطه $A(1, 2)$ ، از کدام نقطه زیر عبور می‌کند؟

- (۱) $(9, 7)$ (۲) $(10, 5)$ (۳) $(4, -1)$ (۴) $(-11, 3)$

۱۴۹- دو دایره C و C' در نقطه $(0, 1)$ مماس خارج هستند. اگر قائم‌های بر دایره C ، همواره از نقطه $(2, -3)$ بگذرند، مرکز دایره C' با

شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(1, -2)$ (۴) $(1, -1)$

۱۵۰- وتر مشترک دایره به معادله $x^2 + y^2 = 17$ ، با دایره C گذرا بر نقطه $(6, -1)$ ، بر خط به معادله $2x - y = 3$ منطبق است. شعاع

دایره C کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۴

هندسه ۳ - دوازدهم - گواه ، ماتریس، و کاربردها - ۴ سوال -

۱۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

۱۴۲- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a+2 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & a+2 \\ a & -a \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس A وارون‌پذیر نباشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس

B^{-1} کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۴۳- از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A کدام است؟

- (۱) $[12 \quad -17]$ (۲) $[-21 \quad 30]$ (۳) $[-17 \quad 30]$ (۴) $[12 \quad -21]$

۱۴۴- اگر از هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2a & a+1 & a-1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ ، دو برابر شماره ستون آن کم شود، به مقدار دترمینان اولیه چقدر

افزوده می‌شود؟

- (۱) ۱۳۲ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۵۶

(امیرمسین / بومبوب)

گزینه «۱»:

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2ab) + a^2 + b^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

گزینه «۳»:

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

گزینه «۴»:

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + ab + b^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۷ و ۸)

۴

۳

۲

۱

با استفاده از قضیه تقسیم داریم:

$$a = b \times 19 + 5$$

با توجه به این که باقی‌مانده همواره کوچکتر از مقسوم‌علیه است، پس b باید

بزرگتر از ۵ باشد. در نتیجه داریم:

$$b_{\min} = 6 \Rightarrow a_{\min} = 6 \times 19 + 5 = 119$$

بنابراین مجموع ارقام کوچکترین عدد a ، برابر $11 = 1 + 1 + 9$ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عباس اسری امیرآبادی)

$$3^3 \equiv 27 \equiv 1 \xrightarrow{\text{به توان ۵}} 3^{15} \equiv 1 \quad (1)$$

$$2^6 \equiv 64 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2^{12} \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\times 2^5} 2^{17} \equiv 32 \equiv 6 \quad (2)$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$1391 \equiv 1 - 9 + 3 - 1 \equiv -6 \equiv 5$$

$$\left. \begin{array}{l} 5^2 \equiv 25 \equiv 3 \\ 5^3 \equiv 125 \equiv 4 \end{array} \right\} \times \rightarrow 5^5 \equiv 12 \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان 278}} 5^{1390} \equiv 1 \xrightarrow{\times 5} 5^{1391} \equiv 5 \Rightarrow 1391^{1391} \equiv 5$$

چون اعداد $a+2$ و $b+7$ در یک دسته همنهشتی یکسان با عدد

1391^{1391} در پیمانه ۱۱ قرار دارند، پس باقی‌مانده تقسیم هریک از این

دو عدد بر ۱۱، برابر ۵ است و در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a+2 \equiv 5 \Rightarrow a \equiv 3 \\ b+7 \equiv 5 \Rightarrow b \equiv -2 \end{array} \right\} \Rightarrow a+b \equiv 1$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

شرط وجود جواب برای معادله $ax + by = c$ در مجموعه اعداد صحیح آن است که $(a, b) | c$ ؛ بنابراین داریم:

$$(117, 221) = 13 \Rightarrow 13 | 2m + 5 \Rightarrow 2m + 5 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 2m \equiv -5 \equiv 8 \pmod{13}$$

$$\xrightarrow[\substack{\div 2 \\ (2, 13)=1}]{\substack{13 \\ m \equiv 4}} m \equiv 4 \pmod{13} \Rightarrow m = 13k + 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی m به‌ازای $k = 8$ حاصل می‌شود که برابر $13 \times 8 + 4 = 108$ و رقم یکان آن برابر ۸ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 4 + 3 + 3 \times 2 + 1 = 14$$

$$\Rightarrow 2q = 14 \Rightarrow q = 7$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی، صفحه‌های ۳۵، ۳۹ و ۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعداد یال‌های گراف K_4 برابر ۶ است، پس در صورتی که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۴ برابر صفر، ۱ یا ۲ باشد، آنگاه $q(G) < q(\overline{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۴ در این حالت برابر است با:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 1 + 6 + 15 = 22$$

دارای دو یال دارای یک یال بدون یال

تعداد یال‌های گراف K_3 برابر ۳ است، پس در صورتی که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۳ برابر صفر یا ۱ باشد، آنگاه $q(G) < q(\overline{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۳ در این حالت برابر است با:

$$\binom{4}{3} \times \left(\binom{3}{0} + \binom{3}{1} \right) = 4(1+3) = 16$$

دارای یک یال بدون یال انتخاب ۳ رأس از ۴ رأس

تعداد یال‌های گراف K_2 برابر ۱ است، پس در صورتی که تعداد یال‌های گراف G از مرتبه ۲ برابر صفر باشد، آنگاه $q(G) < q(\overline{G})$ است. تعداد زیرگراف‌های مرتبه ۲ در این حالت برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times \binom{2}{0} = 6 \times 1 = 6$$

بدون یال انتخاب ۲ رأس از ۴ رأس

بنابراین تعداد زیرگراف‌های مورد نظر برابر است با:

$$22 + 16 + 6 = 44$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی، صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۴

۳

۲

۱

مسیرهای به طول مختلف از a به b در گراف مفروض عبارت‌اند از:

- مسیر به طول ۱ $\rightarrow ab$
- مسیر به طول ۳ $\rightarrow adcb$
- مسیر به طول ۳ $\rightarrow aecb$
- مسیر به طول ۴ $\rightarrow adecb$
- مسیر به طول ۴ $\rightarrow aedcb$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی، صفحه ۳۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علیرضا شریف‌فطیپی)

۱۵۹ - ریاضیات گسسته

به مسیری که ابتدا و انتهای آن برهم منطبق باشند دور گفته می‌شود. دورهای

به طول ۵ در این گراف عبارت‌اند از:

$abcdea, abfdea, afdcba, ghljkg, hlkjih, gkjihg$

بنابراین ۶ دور به طول ۵ در این گراف وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی، صفحه ۳۸)

۴

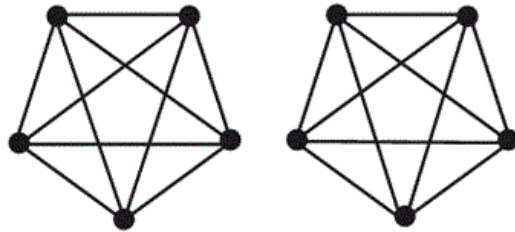
۳ ✓

۲

۱

یک گراف ۴-منتظم حداقل ۵ رأس دارد. برای این که گراف ناهمبند باشد باید حداقل از دو بخش جدا از هم تشکیل شده باشد، بنابراین یک گراف ۴-منتظم ناهمبند مطابق شکل زیر، باید حداقل شامل دو گراف K_5 باشد. در این صورت داریم:

$$q_{\min} = 2q(K_5) = 2\left(\frac{5 \times 4}{2}\right) = 20.$$



(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی، صفحه های ۳۸ و ۳۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

نکته: در تابع $y = a \sin(bx + x_0) + c$ ، دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و مقدار

ماکزیم برابر $|a| + c$ است. ابتدا مقدار و علامت a را تعیین می‌کنیم:

$$y_{\max} = |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$f(0) = a \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a < 0 \xrightarrow{a=\pm 1} a = -1$$

از طرفی نمودار تابع در بازه $[0, 2\pi]$ ، ۳ بار تکرار شده است. بنابراین

داریم:

$$3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

با توجه به شکل نمودار، تابع در همسایگی $x = 0$ صعودی است، بنابراین

$$\Rightarrow b = -3 \xrightarrow{a=-1} a + b = -4 \quad \text{و } a \text{ باید هم علامت باشند:}$$

دقت کنید که مقدار انتقال افقی در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ است، بنابراین بررسی کردن

یکنوایی آن در همسایگی $x = 0$ برای تعیین علامت‌های a و b کافی است.

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسئله مام‌قارری)

$$y = a - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 2bx}{2} \right) = \frac{1}{4} \cos 2bx + a - \frac{1}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{\max} = \frac{1}{4} + a - \frac{1}{4} = a = 1 \Rightarrow a = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{2\pi}{2|b|} = \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \text{ یا } 2$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

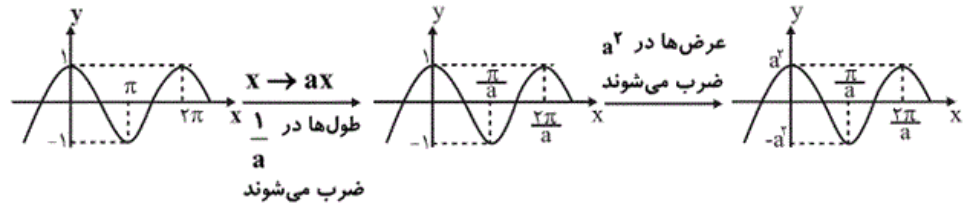
 ۴

 ۳

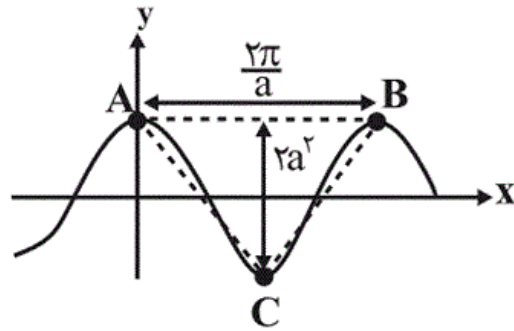
 ۲

 ۱

نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم می‌کنیم:



حال برای مساحت مثلث ABC داریم:



۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به شکل واضح است که:

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}, \quad \tan \beta = \frac{x+3}{4}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = 12 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{4} + \frac{x+3}{4}}{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{x+3}{4} \right)} = 12 \Rightarrow \frac{\frac{x+6}{4}}{\frac{16 - 3(x+3)}{16}} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{4x+24}{16-3x} = 12 \Rightarrow 4x+24 = 12(16-3x) \Rightarrow 40x = 60$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{4} = 1.5$$

(مسائل ۲- مثلثات، صفحه ۴۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

از آن‌جا که α و β جواب‌های معادله $\tan^2 x - 2(k+2)\tan x + k+2 = 0$ هستند، $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ جواب‌های معادله $x^2 - 2(k+2)x + k+2 = 0$ هستند، در نتیجه داریم:

$$\tan \alpha \tan \beta = k+2 \text{ و } \tan \alpha + \tan \beta = 2k+4$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow -1 = \frac{2k+4}{1 - (k+2)}$$

$$\Rightarrow k = -3$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه ۴۲)

۴

۳

۲

۱

تابع $y = \tan x$ روی بازه‌هایی به صورت $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ که $k \in \mathbb{Z}$ باشد، یکنواست (اکیداً صعودی است). پس تابع $y = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$ در صورتی یکنواست که داشته باشیم:

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} < 2x < k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \Rightarrow (4k-1)\frac{\pi}{8} < x < (4k+3)\frac{\pi}{8}$$

پس این تابع روی بازه‌های زیر یکنواست.

$$k=0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$k=1 \Rightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$k=-1 \Rightarrow x \in \left(-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right)$$

⋮

۴

۳

۲

۱

β ، اولین جواب مثبت معادله $\tan 2x = 0$ است: $(k \in \mathbb{Z})$

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{k=1} \beta = \frac{\pi}{2}$$

α ، دومین جواب منفی معادله $\tan 2x = 1$ است:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های منفی}} \frac{-3\pi}{8}, \frac{-7\pi}{8}, \dots \Rightarrow \alpha = \frac{-7\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \beta - \alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-7\pi}{8}\right) = \frac{11\pi}{8}$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲، ۴۱ و ۴۲)

۴

۳

۲

۱

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از: $\frac{\pi}{6}$ و $2\pi - \frac{\pi}{6}$ که مجموع آن‌ها

برابر است با 2π .

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۴

۳

۲

۱

(عادل حسینی)

$$\sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - \sin x \cos x = \sin x(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \end{cases}$$

معادله $\sin x = 0$ در بازه $(0, \pi)$ جواب ندارد و معادله $\tan x = 1$ در

این بازه فقط جواب $x = \frac{\pi}{4}$ را دارد.

(مسایان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(عمید مام‌قادر)

$$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -2 \sin x \cos^2 x + \cos x \sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z}$$

(مسایان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

(جهانبفش نیکنام)

$$5 \sin^2 x + \sin^2 2x = 4 \cos 2x$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + (1 - \cos^2 2x) = 4 \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 2x + 13 \cos 2x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos 2x - 1)(\cos 2x + 7) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از:

$$\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۴

۳ ✓

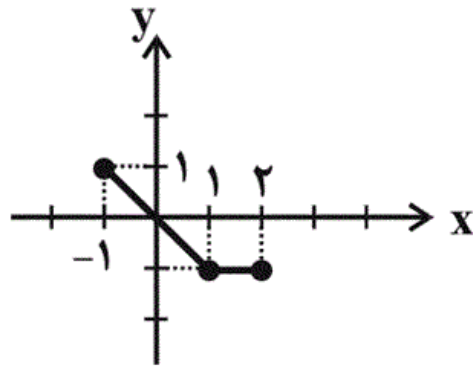
۲

۱

(سعید مدیر فراسانی)

-۱۰۱

برای پیدا کردن نمودار $y = -f(x+2)$ از روی نمودار تابع f ، ابتدا نمودار را دو واحد به طرف چپ و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل شکل زیر است:



(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$f(x) = \sqrt{x-1} \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x-1}$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-4} y = \sqrt{-(x-4)-1} = \sqrt{3-x} = g(x)$$

حال g را با محور طول‌ها تقاطع می‌دهیم:

$$g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3-x} = 0 \Rightarrow x = 3$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳

۲

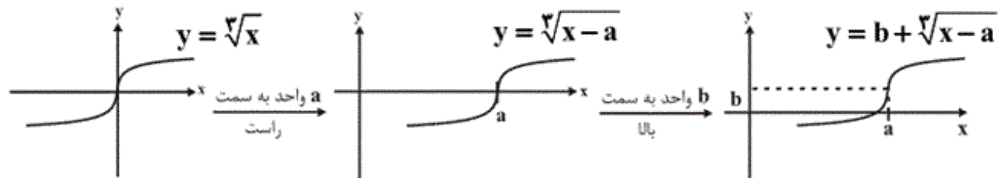
۱ ✓

(عبیب شفیعی)

برای رسم نمودار تابع $f(x) = b - \sqrt[3]{a-x} = b + \sqrt[3]{x-a}$ ، از نمودار

$y = \sqrt[3]{x}$ استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل داده شده، مقدار a مثبت

است. پس داریم:



بنابراین در تابع $f(x) = b + \sqrt[3]{x-a}$ ، $b = 1$ می‌باشد، از طرفی

$f(7) = 1$ است:

$$f(x) = 1 + \sqrt[3]{x-a} \xrightarrow{f(7)=1}$$

$$1 + \sqrt[3]{7-a} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{7-a} = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \sqrt[3]{x-7}$$

$$\Rightarrow f(-1) = 1 + \sqrt[3]{-8} = 1 - 2 = -1$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

نقاط $(۵, ۰)$ و $(-۵, ۰)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، به ترتیب به نقاط

$$y = f\left(\frac{a+۵}{۲}\right) \text{ و } y = f\left(\frac{a-۵}{۲}\right) \text{ روی نمودار تابع}$$

تبدیل می‌شوند. برای اینکه نمودار دو تابع حتماً برخورد داشته باشند، کافی

است حداقل یکی از نقاط تبدیل شده در بازه $[-۵, ۵]$ قرار داشته باشد.

بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -۵ \leq -\frac{a+۵}{۲} \leq ۵ \Rightarrow -۵ \leq \frac{a+۵}{۲} \leq ۵ \\ \Rightarrow -۱۰ \leq a+۵ \leq ۱۰ \Rightarrow -۱۵ \leq a \leq ۵ \quad (۱) \\ -۵ \leq -\frac{a-۵}{۲} \leq ۵ \Rightarrow -۵ \leq \frac{a-۵}{۲} \leq ۵ \\ \Rightarrow -۱۰ \leq a-۵ \leq ۱۰ \Rightarrow -۵ \leq a \leq ۱۵ \quad (۲) \end{array} \right.$$

اجتماع جواب‌های (۱) و (۲)، بازه $[-۱۵, ۱۵]$ است.

(مسابقه ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

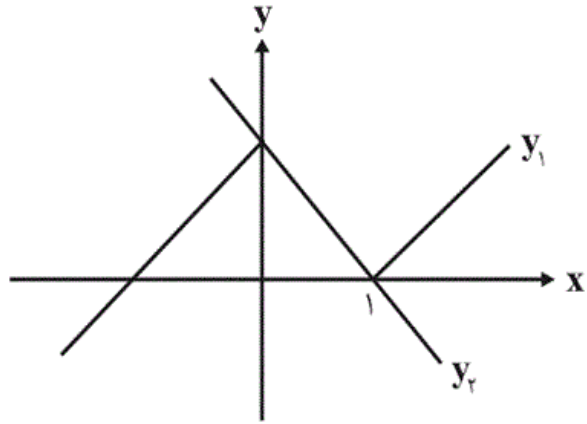
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

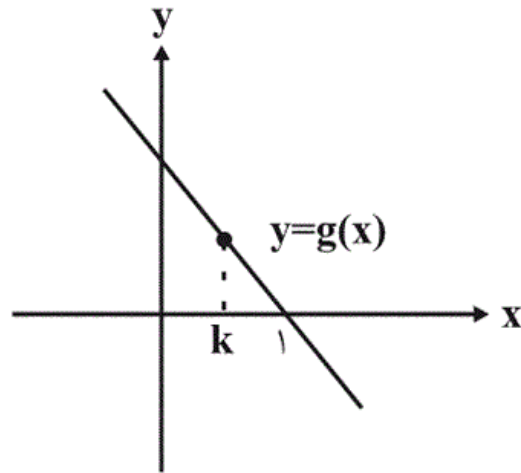
ابتدا، نمودار دو تابع $y_1 = f(x-1)$ و $y_2 = -f(x)+1$ را رسم می‌کنیم.



برای آن که تابع g اکیداً نزولی باشد، هر کدام از ضابطه‌های y_1 و y_2 در دامنهٔ محدودهٔ خود باید اکیداً نزولی باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y_1 : k \leq 1 \\ y_2 : k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \in [0, 1]$$

در این صورت نمودار تابع g به صورت زیر خواهد بود:



(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱

توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و تابع f روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$f(x-1) < f(5-x) \leq f(0)$$

$$\frac{f \text{ اکیداً نزولی است}}{\rightarrow} x-1 > 5-x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 5-x \Rightarrow x > 3 \\ 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (3, 5]$$

پس $a = 3$ ، $b = 5$ و در نتیجه $a + b = 8$ خواهد بود.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تابع $f - 3g$ اکیداً نزولی است، پس تابع $3g - f$ اکیداً صعودی است. بنابراین تابع $(f - 2g) + (3g - f) = g$ مجموع دو تابع اکیداً صعودی بوده و در نتیجه خود نیز اکیداً صعودی است. از طرف دیگر توابع $3(f - 2g) = 3f - 6g$ و $-2(f - 3g) = 6g - 2f$ اکیداً صعودی‌اند. بنابراین تابع $f = (6g - 2f) + (3f - 6g)$ نیز اکیداً صعودی است.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با استفاده از قضیه تقسیم، $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = (2x^2 - 2)Q(x) + 5x + 2$$

باقی‌مانده $f(x)$ بر $x - 1$ برابر است با $f(1)$.

$$\Rightarrow f(1) = 5 + 2 = 7$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(صیب شفیعی)

باقی‌مانده تقسیم $f(x)q(x)$ بر $2x+2$ برابر $f(-1)q(-1)$ می‌باشد. حال برای تعیین $q(-1)$ ابتدا باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $2x-2$ را به دست آورده، سپس با نوشتن رابطه تقسیم، مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow r=f(1)=1-2(1)+5(1)+4=8$$

$$x^6 - 2x^3 + 5x + 4 = (2x-2)q(x) + 8$$

$$\xrightarrow{x=-1} 1+2-5+4 = -4q(-1) + 8$$

$$\Rightarrow 2 = -4q(-1) + 8 \Rightarrow -6 = -4q(-1) \Rightarrow q(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-1) = 1+2-5+4 = 2 \Rightarrow f(-1)q(-1) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم ابلالی)

توجه کنید که در همسایگی راست نقطه $x=2$ تابع f با تابع ثابت $y=1$ برابر است. پس در این همسایگی داریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow 2f(x) = 2 \Rightarrow f(2f(x)) = f(2) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - f(2f(x))} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

در همسایگی راست $x = \frac{3\pi}{4}$ ، عبارت $x-1$ مقداری مثبت به خود

می‌گیرد و $\cos x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\sqrt{2} \cos x < -1 \Rightarrow 1 + \sqrt{2} \cos x < 0$$

یعنی در این همسایگی، حد عبارت مخرج برابر صفر است و تابع

$y = 1 + \sqrt{2} \cos x$ از مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود:

۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به نمودار، عبارت مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد؛ زیرا علامت

تابع در همسایگی ریشه مخرج یکسان است. عبارت $x^2 + bx + 4$ در دو

حالت زیر ریشه مضاعف دارد:

$$\begin{cases} b = 4 \Rightarrow x^2 + bx + 4 = (x+2)^2 \\ b = -4 \Rightarrow x^2 + bx + 4 = (x-2)^2 \end{cases}$$

اما در حالت $b = 4$ ، تابع f به صورت $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ساده می‌شود که

نمودار آن در همسایگی $x = -2$ متفاوت با نمودار صورت سؤال است.

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر دو بی‌نهایت، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شهرابی)

با توجه به حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ، عبارت‌های صورت و مخرج تابع f باید

هم‌درجه باشند، بنابراین $a = 0$ است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{bx^2 + 2x}{2x^2 - x + c}$$

اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ باشد، $x = 1$ باید ریشهٔ عبارت مخرج باشد:

$$\Rightarrow 2(1)^2 - (1) + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^2}{2x^2} = \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \quad \text{همچنین داریم:}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x^2 - x - 1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x(2x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x}{x-1} \\ &= \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵ و ۵۹ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow [f(x)] = \left[-\frac{1}{x} \right] = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 = -1$$

$$\Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 0 - (-1) = 1$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

در ابتدا صورت کسر را با فاکتورگیری ساده تر می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(a-1) + x^2(2a-b) + 1}{ax+b} = 0$$

چون حد تابع در بی نهایت صفر شده است، باید درجه مخرج از درجه صورت بیشتر باشد، چون مخرج درجه اول است، پس باید ضریب جملات درجه ۲ و ۳ صورت صفر شود.

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ 2a-b=0 \Rightarrow 2a=b \xrightarrow{a=1} b=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی نهایت، صفحه های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مسئله بهرام پور)

ضابطه تابع f را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{bx}{2x+3-a} & ; x > a \\ \frac{bx}{a+3} & ; x \leq a \end{cases}$$

وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، تابع تعریف نمی شود، بنابراین می توان نتیجه گرفت $a+3=0$ و در نتیجه $a=-3$ است. بنابراین ضابطه تابع به صورت

$$f(x) = \frac{bx}{2x+6}$$

و دامنه آن $(-3, +\infty)$ است و همچنین در $+\infty$ مجانب

افقی برابر $y = \frac{b}{2}$ دارد $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx}{2x} = \frac{b}{2} \right)$ در نتیجه

$$\frac{b}{2} = 2 \text{ و } b = 4 \text{ است.}$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی نهایت، صفحه های ۵۵ تا ۵۷ و ۶۷ و ۶۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\xrightarrow{x=4} 8 + 2a = 4a + 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x^2 + 3x + 2}$$

مجانب‌های قائم، از بین ریشه‌های مخرج هستند:

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } -2$$

هیچ کدام از این مقادیر، ریشه صورت نیستند، بنابراین $x = -2$ و $x = -1$

مجانب‌های قائم تابع f هستند. فاصله این دو خط از هم یک واحد است.

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷ و ۶۷ و ۶۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی ساوپی)

۱۲۹ -

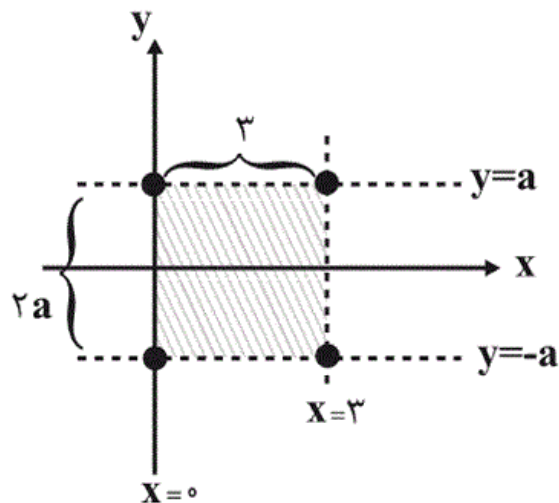
مجانب‌های قائم، از بین ریشه‌های مخرج هستند:

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌های مخرج}} x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

برای مجانب‌های افقی نیز داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax|x| - 1}{x^2 - 3x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax \cdot x}{x^2} = a \Rightarrow y = a \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax \cdot (-x)}{x^2} = -a \Rightarrow y = -a \end{cases}$$

بنابراین مجانب‌های نمودار این تابع به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow S = 2a \times 3 = 12 \Rightarrow a = 2$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷ و ۶۷ و ۶۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به نمودار تابع در همسایگی مجانب قائم آن، عبارت مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Rightarrow \Delta_{\text{مخرج}} = b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$$

از طرفی این مجانب قائم در سمت چپ محور y ها قرار دارد، بنابراین $b = 2$ قابل قبول است. خط $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ مجانب افقی است و

نمودار تابع مجانب افقی خود را در $x = 0$ قطع کرده است. بنابراین داریم:

$$f(0) = a = 1 \Rightarrow a + b = 3$$

(مسئله ۲ - مرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷ و ۶۷ و ۶۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

(هندسه ۳ - آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

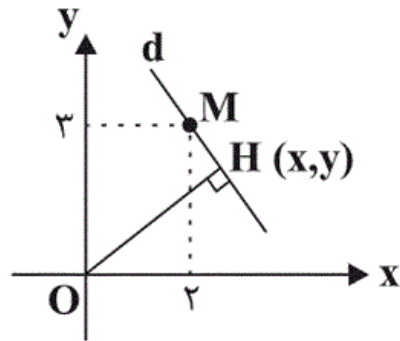
۴

۳

۲

۱ ✓

فرض کنید نقطه $H(x, y)$ پای ارتفاع وارد از مبدأ مختصات بر خطی گذرنده از نقطه $M(2, 3)$ باشد، در این صورت داریم:



$$m_{OH} \times m_d = -1 \Rightarrow \frac{y}{x} \times \frac{y-3}{x-2} = -1$$

$$\Rightarrow y(y-3) = -x(x-2) \Rightarrow x(x-2) + y(y-3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$$

بنابراین مکان هندسی نقطه H ، دایره‌ای به معادله

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0 \text{ است.}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۳۶ تا ۴۲)

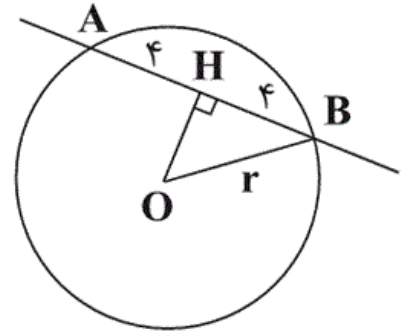
۴

۳

۲

۱

با توجه به شکل زیر داریم:



$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$OH = \frac{|4 \times 2 + 3 \times 1 + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\triangle OBH : r^2 = OH^2 + HB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\text{معادله دایره} : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$\xrightarrow{y=0} (x-2)^2 + (0-1)^2 = 25$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 24 \Rightarrow x-2 = \pm 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = 2 + 2\sqrt{6} \\ x_N = 2 - 2\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow MN = (2 + 2\sqrt{6}) - (2 - 2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳✓

۲

۱

ابتدا وضعیت دو دایره نسبت به هم را مشخص می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow O(1, -1), r = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Rightarrow O'(-1, 1), r' = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

حال چون $r + r' = 2\sqrt{2}$ ، پس $OO' = r + r'$ است، یعنی دو دایره

مماس خارج هستند. زمانی که دو دایره مماس خارج باشند، بیشترین فاصله

نقاط دو دایره، دو برابر طول خط‌المركزین است. بنابراین بیشترین فاصله نقاط

این دو دایره برابر $4\sqrt{2}$ است.

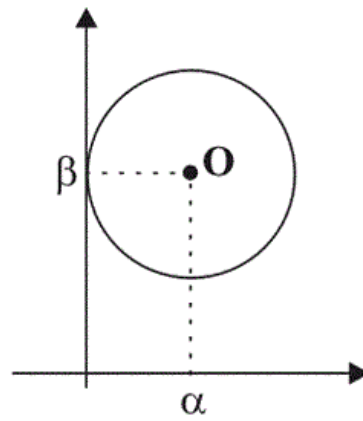
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$\frac{1}{2} \sqrt{4(m-1)^2 + 4m^2 - 4(4m-3)} = |m-1|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} (4(m-1)^2 + 4m^2 - 4(4m-3)) = (m-1)^2$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 + m^2 - 4m + 3 = (m-1)^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow (m-3)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}$$

$$m=1 \Rightarrow R = |m-1| = 0$$

به ازای $m=1$ ، دایره تشکیل نمی‌شود پس این مقدار قابل قبول نیست.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O(0,0) \text{ و } R = 1$$

$$x^2 + y^2 + ax + \lambda y - 11 = 0$$

$$\Rightarrow O'(-\frac{a}{2}, -\frac{\lambda}{2}), R' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \lambda^2 - 4(-11)} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 108}$$

دو دایره در صورتی برهم مماس داخل‌اند که $OO' = |R - R'|$ باشد، با

توجه به این که $R' > R$ است، داریم:

$$OO' = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 16}$$

$$OO' = |R' - R| \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{4} + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 108} - 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + 16} = \sqrt{a^2 + 108} - 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4\left(\frac{a^2}{4} + 16\right) = a^2 + 108 + 4 - 4\sqrt{a^2 + 108}$$

$$\Rightarrow a^2 + 64 = a^2 + 112 - 4\sqrt{a^2 + 108}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{a^2 + 108} = 48 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 108} = 12$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 + 108 = 144 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۳۰ تا ۴۶)

۴

۳✓

۲

۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A$$

$$\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow A^5 = A^4 = A^3 = A$$

$$\Rightarrow A^5 + A^4 + A^3 = A + A + A = 3A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

از آن جا که $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ داریم:

$$|A| = |A^{-1}| \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A|^2 = 1$$

از طرفی:

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ c & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{|A|} & \frac{-2}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

بنابراین حاصل ضرب درایه‌های سطر اول ماتریس A^{-1} برابر است با:

$$\frac{4}{|A|} \times \frac{(-2)}{|A|} = \frac{-8}{|A|^2} = \frac{-8}{1} = -8$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲۷ تا ۳۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

از آنجا که دستگاه داده شده فاقد جواب است، داریم:

$$\frac{k+1}{4} = \frac{-1}{k-3} \neq \frac{1}{3}$$

$$\frac{k+1}{4} = \frac{-1}{k-3} \Rightarrow (k+1)(k-3) = -4$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k - 3 = -4 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 1$$

با جایگذاری مقدار k ، دو خط داده شده به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6} = \frac{1}{-2}$$

دو خط منطبق هستند.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر A ماتریس $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} |kA| = k^n |A| \\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{cases}$$

$$3A + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow |4A^{-1}| = 4^2 |A^{-1}| = 4^2 \times \frac{1}{|A|} = 16 \times \frac{-9}{2} = -72$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر سه نقطه A ، B و C روی یک خط قرار داشته باشند، هیچ نقطه‌ای نمی‌توان یافت که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. اگر سه نقطه A ، B و C روی یک خط قرار نداشته باشند، آنگاه این سه نقطه یک مثلث تشکیل می‌دهند و محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث، از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است. از طرفی مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله یک واحد هستند، دو خط موازی با d در طرفین آن می‌باشند. در این حالت اگر یکی از این دو خط موازی با d از محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث عبور کند، مسئله یک جواب دارد و در غیر این صورت فاقد جواب است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به این که معادله یک قطر دایره به صورت $y = x - 2$ است، پس مختصات مرکز دایره را می‌توان $O(x, x - 2)$ در نظر گرفت. با فرض $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ داریم:

$$OA = OB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(0-x)^2 + (1-x+2)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (0-x+2)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} (-x)^2 + (3-x)^2 = (3-x)^2 + (2-x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = (2-x)^2 \Rightarrow x^2 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$R = OA = \sqrt{(0-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، مشابه تمرین ۱ (ج) صفحه ۴۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

اگر نقطه $M(x, y)$ دارای ویژگی مورد نظر باشد، آنگاه داریم:

$$AM^2 + BM^2 = 10$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 10$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x - 2y - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 3x - y - 2 = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 - 4(-2)} = \frac{1}{2} \sqrt{18} = \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

مختصات مرکز دایره به صورت $O(2, -1)$ است، در نتیجه:

$$m_{OA} = \frac{2 - (-1)}{1 - 2} = -3$$

با توجه به آن که خط مماس بر دایره در نقطه A بر OA عمود است، پس

شیب خط مماس برابر $m = \frac{1}{3}$ است و داریم:

$$A \text{ در نقطه } y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y - 6 = x - 1 \Rightarrow 3y - x = 5$$

در بین نقاط داده شده تنها نقطه $(1, 5)$ در معادله خط مماس صدق

می‌کند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

نقطه $O(2, -3)$ مرکز دایره C است. می‌دانیم خط‌المركزین دو دایره مماس خارج از نقطه تماس دو دایره می‌گذرد. بنابراین با در نظر گرفتن $A(0, 1)$ به عنوان نقطه تماس دو دایره داریم:

$$m_{OA} = \frac{1 - (-3)}{0 - 2} = -2$$

معادله OA (خط‌المركزین): $y - 1 = -2(x - 0)$

$$\Rightarrow y = -2x + 1$$

اگر $O'(\alpha, \beta)$ مرکز دایره C' باشد، آنگاه $\beta = -2\alpha + 1$ و $O'A = \sqrt{5}$ است. در نتیجه داریم:

$$O'A = \sqrt{(0 - \alpha)^2 + (1 - \beta)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (2\alpha)^2} = \sqrt{5}$$

$$\longrightarrow 5\alpha^2 = 5 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

اگر $\alpha = 1$ باشد، آنگاه $\beta = -1$ است و مرکز دایره به صورت $O'(1, -1)$ خواهد بود که این نقطه درون دایره‌ای به مرکز $O(2, -3)$ و گذرنده از $A(0, 1)$ است. یعنی در این حالت، دو دایره مماس داخل می‌شوند که خلاف فرض مسئله است. بنابراین $\alpha = -1$ و $\beta = 3$ است، یعنی $O'(-1, 3)$ مرکز دایره C' است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

فرض کنید معادله دایره C به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. برای یافتن معادله وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + y^2 - 17 \Rightarrow ax + by = -c - 17$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $2x - y = 3$ منطبق است، پس داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{-c-17}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = 3b - 17 \end{cases}$$

نقطه $(6, -1)$ روی دایره است، پس مختصات آن در معادله دایره صدق می‌کند:

$$x^2 + y^2 - 2bx + by + 3b - 17 = 0$$

$$\xrightarrow{(6, -1)} 36 + 1 - 12b - b + 3b - 17 = 0$$

$$\Rightarrow 10b = 20 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ c = -11 \end{cases}$$

$$\text{شعاع دایره: } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 4 + 44}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^r = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow C^r = 16 = \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } C^r$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

ماتریس A وارون پذیر نیست، پس دترمینان آن برابر صفر است:

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a+2) - 1(-1) = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a+1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2 \times 1 - 1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \text{ مجموع درایه های } = \frac{1}{3}(1-1+1+2) = 1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\xrightarrow{IA=AI=A} A = B^{-1}DC^{-1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{5-6} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -21 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه های ۲۲ تا ۲۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر ماتریس اولیه را با A و ماتریسی که از کاستن دو برابر شماره ستون از هر درایه واقع در سطر دوم ماتریس A حاصل می‌شود را با B نمایش دهیم، آنگاه با محاسبه دترمینان بر حسب سطر دوم این دو ماتریس داریم:

$$|B| - |A|$$

$$= \left[-(2a-2) \times \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (a-3) \times \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (a-7) \times \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

$$- \left[-2a \times \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (a+1) \times \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (a-1) \times \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1) - 4(-14) + 6(17) = -2 + 56 + 102 = 156$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱