۹۱- حاصل $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{[x^۲]^۲}{۲x^۲}$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۹۲- تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{|۳x-۱|-|۲x+۱|}{|۳-x|-۲x}$ مفروض است. اختلاف دو مقدار $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ از هم کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۹۳- حدود a کدام باشد تا بازهٔ $(۲a-۱, a+۲)$ یک همسایگی عدد ۳ $x=۳$ محسوب شود؟

۱) $۱ < a < ۲$ ۲) $\frac{۳}{۲} < a < \frac{۷}{۲}$ ۳) $۲ < a < ۴$ ۴) $-۱ < a < ۲$

۹۴- حد راست تابع $f(x) = ۴[x+۱] - ۳[-x]$ در نقطهٔ a، $\frac{۶}{۷}$ برابر حد چپ آن در نقطهٔ a است. مقدار a کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟ ([ ]: علامت جزء صحیح است.)

۱) ۶ ۲) ۱- ۳) ۷- ۴) ۳

۹۵- حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^۲+۱)^۲ - (x^۲-۱)^۲}{(۲x+۱)^۲ + (۲x-۱)^۲}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۶- حاصل حد راست تابع $f(x) = \frac{[۲-x]}{\sqrt{x+۶}-x}$ در نقطهٔ $x=۳$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۹۷- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}\frac{\tan^۲ x-۱}{\sqrt{۱-\sin^۲ ۲x}}$ کدام است؟

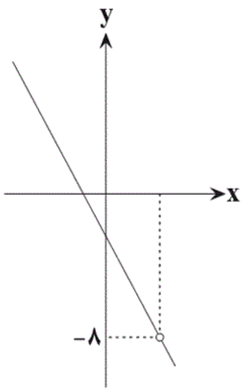
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

۹۸- در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x}{\tan\pi x+۱}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to(\frac{۳}{۴})^+} f(x)=-\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۴})^+} f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to(\frac{-۱}{۴})^-} f(x)=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+} f(x)=-\infty$

۹۹- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{-۳x^۲+ax+b}{x-۲}$ مطابق شکل مقابل باشد، $a+b$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۲

۱۰۰-اگر $f(x)=\frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۱}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to۱}\frac{f(x)-\frac{۳}{۲}}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) وجود ندارد.

۱۰۱-اگر عبارت $۳x^۴+ax^۳+b$ بر $(x^۲-۱)$ بخش‌پذیر باشد، زوج‌مرتب (a,b) کدام است؟

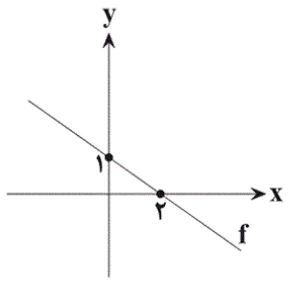
۱) $(-۳,۰)$ ۲) $(۰,-۳)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) اطلاعات مسئله ناقص است.

۱۰۲-به‌ازای کدام مقدار a و b، تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+[x] &, x<۲ \\ ۲a[x]+bx+۱ &, x\ge ۲\end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) فقط $b=۰$ و $a=۲$ ۲) فقط $a=b=۰$

۳) $\varnothing$ ۴) هر مقدار b و a

۱۰۳-نمودار تابع خطی f به شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2f(x)+1}{f(3x)-x}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{2}{5}$

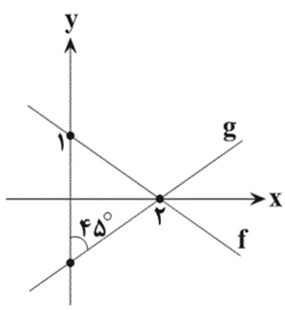
۱۰۴-تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^n+3x^2+x-1}{x^n+2x^2+4}$ مفروض است. مقدار طبیعی n را طوری انتخاب می‌کنیم که حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=m$ بیش‌ترین مقدار ممکن باشد. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۰۵-اگر $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-x}{3x^2-ax+b}=-\infty$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ax-12}{x^2+11-b}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۱۰۶-دو تابع f و g خطی و مطابق شکل روبه‌رو هستند. حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟



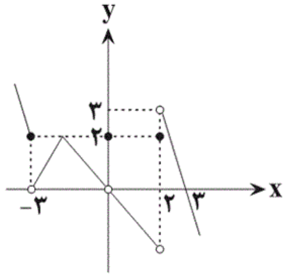
۱) ۱

۲) ۱-

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{2}$

۱۰۷-شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. تابع $y=\frac{x-2}{\sqrt{f(x)}}$ در کدام فاصله پیوسته است؟



۱) $[0,2)$

۲) $[2,3)$

۳) $(2,3]$

۴) $[-3,-2)$

۱۰۸-نقاطی از $f(x)=5x-[5x]$ که تابع در آن‌ها پیوسته است، روی خط $y=m$ و نقاطی از $f(x)$ که تابع در آن‌ها فقط پیوستگی راست دارد، روی خط $y=n$ واقع‌اند. حاصل $n-m$ کدام می‌تواند باشد؟ ([ ]: علامت جزء صحیح است.)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) 1

۱۰۹-به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، تابع $f(x)=[mx^2+2(m^2-2)x]$ در $x=1$ حد دارد ولی پیوسته <u>نیست</u>؟ ([ ]: علامت جزء صحیح است.)

۱) $\{1\}$ ۲) $\{-2\}$ ۳) $\{-2,1\}$ ۴) $\varnothing$

۱۱۰-حد تابع $f(x)=2\sqrt{x}-\sqrt{4x-2\sqrt{x}}$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۹۱- گزینهٔ «۳» (حسین غفارپور)

وقتی $x \to 0$ میل می‌کند، $[x^2]=0$ است. یعنی:

$$\lim_{x\to 0}\frac{[x^2]^2}{2x^2}=\frac{(0)^2}{2x^2}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۲- گزینهٔ «۴» (سعید نصیری)

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{|3x-1|-|2x+1|}{|3-x|-2x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-3x-(-2x)}{-x-2x}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{-3x}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{|3x-1|-|2x+1|}{|3-x|-2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-2x}{-(-x)-2x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

اختلاف دو حد مفروض:

$$\frac{1}{3}-(-1)=\frac{4}{3}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۳- گزینهٔ «۱» (غلام‌رضا نیازی)

می‌دانیم اگر $x\in(a,b)$ باشد، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x است، پس:

$$\Rightarrow 3\in(2a-1,a+2)\Rightarrow\begin{cases}2a-1<3\Rightarrow a<2\\ a+2>3\Rightarrow a>1\end{cases}\Rightarrow 1<a<2$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۹۴- گزینهٔ «۳»
(امیرهوشنگ انصاری)

تابع جزء صحیح در نقاط غیرصحیح حد دارد، پس a قطعاً عددی صحیح است.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} (۴[a+۱]-۳[-a]) = ۴(a+۱)-۳(-a-۱) = ۷a+۷$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} (۴[a+۱]-۳[-a]) = ۴a-۳(-a) = ۷a$$

$$\Rightarrow ۷a+۷ = \frac{۶}{۷}(۷a) \Rightarrow ۷a+۷ = ۶a \Rightarrow a = -۷$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۵- گزینهٔ «۴»
(ابراهیم قانونی)

ابتدا اتحادهای صورت و مخرج را باز می‌کنیم:

$$\frac{(x^۲+۱)^۲-(x^۲-۱)^۲}{(۲x+۱)^۲+(۲x-۱)^۲} = \frac{(x^۴+۲x^۲+۱)-(x^۴-۲x^۲+۱)}{(۴x^۲+۴x+۱)+(۴x^۲-۴x+۱)} = \frac{۴x^۲}{۸x^۲+۲}$$

حال حاصل حد کسر را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^۲}{۸x^۲+۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^۲}{۸x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۶- گزینهٔ «۳»
(اکبر کلاه‌ملکی)

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{[۲-x]}{\sqrt{x+۶}-x} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-۲}{\sqrt{x+۶}-x} \times \frac{\sqrt{x+۶}+x}{\sqrt{x+۶}+x}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{-۲(\sqrt{x+۶}+x)}{x+۶-x^۲} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-۲(۶)}{-(x^۲-x-۶)}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱۲}{(x-۳)(x+۲)} = \frac{۱۲}{(۰^+)(۵)} = \frac{۱۲}{۰^+} = +\infty$$

توجه کنید که در همسایگی راست نقطهٔ ۳، تابع $y=[۲-x]$ برخط $y=-۲$ منطبق است:

$$۳ < x < ۴ \Rightarrow -۴ < -x < -۳ \Rightarrow -۲ < ۲-x < -۱ \Rightarrow [۲-x] = -۲$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۷- گزینهٔ «۳» (محمدجواد محسنی)

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\tan^{۲} x - ۱ = \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x} - ۱ = \frac{\sin^{۲} x - \cos^{۲} x}{\cos^{۲} x} = \frac{-(\cos^{۲} x - \sin^{۲} x)}{\cos^{۲} x}$$

$$= \frac{-\cos ۲x}{\cos^{۲} x}$$

$$\sqrt{۱ - \sin^{۲} ۲x} = \sqrt{\cos^{۲} ۲x} = |\cos ۲x|$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^{+}} \frac{\tan^{۲} x - ۱}{\sqrt{۱ - \sin^{۲} ۲x}} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^{+}} \frac{-\frac{\cos ۲x}{\cos^{۲} x}}{|\cos ۲x|} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^{+}} \frac{-\frac{\cos ۲x}{\cos^{۲} x}}{-\cos ۲x}$$

$$= \lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^{+}} \frac{۱}{\cos^{۲} x} = \frac{۱}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}} = ۲$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳ و ۵۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۸- گزینهٔ «۱» (محمدمصطفی ابراهیمی)

گزینهٔ «۱»:

$$\lim_{x \to (\frac{۳}{۴})^{+}} \frac{-x}{\tan \pi x + ۱} = \frac{-\frac{۳}{۴}}{\tan((\frac{۳\pi}{۴})^{+}) + ۱} = \frac{-\frac{۳}{۴}}{(-۱)^{+} + ۱} = \frac{-\frac{۳}{۴}}{۰^{+}} = -\infty$$

گزینهٔ «۲»:

$$\lim_{x \to (-\frac{۱}{۴})^{+}} \frac{-x}{\tan \pi x + ۱} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\tan((-\frac{\pi}{۴})^{+}) + ۱} = \frac{\frac{۱}{۴}}{(-۱)^{+} + ۱} = \frac{\frac{۱}{۴}}{۰^{+}} = +\infty$$

گزینهٔ «۳»:

$$\lim_{x \to (-\frac{۱}{۴})^{-}} \frac{-x}{\tan \pi x + ۱} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\tan((-\frac{\pi}{۴})^{-}) + ۱} = \frac{\frac{۱}{۴}}{(-۱)^{-} + ۱} = \frac{\frac{۱}{۴}}{۰^{-}} = -\infty$$

۱✓ ۲ ۳ ۴

۹۹- گزینهٔ «۳» (اکبر کلاه‌ملکی)

طول نقطهٔ توخالی تابع برابر ۲ است (ریشهٔ مخرج) و تابع در نقطهٔ $x=۲$ دارای حد است. پس:

$$-۳x^۲+ax+b=(x-۲)(Ax+B)=Ax^۲+(B-۲A)x-۲B$$

$$\Rightarrow A=-۳ (*)$$

از طرفی:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{-۳x^۲+ax+b}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(Ax+B)}{x-۲}$$

$$\lim_{x\to ۲} Ax+B=۲A+B=-۸\xrightarrow{(*)}B=-۲$$

پس:

$$-۳x^۲+ax+b=(x-۲)(-۳x-۲)=-۳x^۲+۴x+۴\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=۸$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۰- گزینهٔ «۱» (میلاد منصوری)

اولاً دقت کنید که:

$$f(x)=\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)}\xrightarrow{x\neq ۱}\frac{x+۲}{x+۱}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{x+۲}{x+۱}-\frac{۳}{۲}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{(۲x+۴)-(۳x+۳)}{۲(x+۱)}}{(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{-x+۱}{۲(x+۱)(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{۲(x+۱)}=-\frac{۱}{۴}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۲) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۱- گزینهٔ «۲» (محمدحسن سلامی‌حسینی)

می‌دانیم که اگر عددی بر یک عدد بخش‌پذیر باشد بر مقسوم‌علیه‌های آن عدد نیز بخش‌پذیر است. به همین شکل می‌توان گفت اگر عبارتی بر یک عبارت بخش‌پذیر باشد بر مقسوم علیه‌های آن عبارت نیز بخش‌پذیر است. حال چون $۳x^۴ + ax^۳ + b$ بر $(x^۲ - ۱)$ بخش‌پذیر است بر عامل‌های آن یعنی بر $x - ۱$ و $x + ۱$ نیز بخش‌پذیر است. پس: $P(x) = ۳x^۴ + ax^۳ + b$

$$\begin{cases} P(۱) = ۰ \Rightarrow \\ P(-۱) = ۰ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} ۳ + a + b = ۰ \\ ۳ - a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = ۰, b = -۳$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۲- گزینهٔ «۴» (سهند ولی‌زاده)

ابتدا حد راست و چپ تابع در $x = ۲$ را می‌یابیم:

$$\lim_{x \to ۲^+} (۲a[x] + bx + ۱) = ۲a[۲^+] + ۲b + ۱ = ۴a + ۲b + ۱$$

$$\lim_{x \to ۲^-} (ax^۲ + bx + [x]) = ۴a + ۲b + [۲^-] = ۴a + ۲b + ۱$$

به‌ازای هر مقدار b و a تابع در $x = ۲$ پیوسته است. $f(۲) = ۴a + ۲b + ۱$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۳- گزینهٔ «۴» *(سروش موئینی)*

ابتدا ضابطهٔ f را می‌نویسیم. شیب خط f برابر $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-۱}{۲}$ است. پس:

$$f(x)=\frac{-۱}{۲}x+۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲f(x)+۱}{f(۳x)-x}=\frac{۲(-\frac{۱}{۲}x+۱)+۱}{-\frac{۱}{۲}(۳x)+۱-x}=\frac{-x+۳}{-\frac{۵}{۲}x+۱}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۳}{\frac{-۵}{۲}x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{-\frac{۵}{۲}x}=\frac{۲}{۵}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۴- گزینهٔ «۱» *(شهرام ولایی)*

حاصل حد را به‌ازای مقادیر مختلف n حساب می‌کنیم. بیش‌ترین مقدار حد به‌ازای $n=۱$ به‌دست می‌آید که $m=\frac{۳}{۲}$ می‌شود.

$$n=۱\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲}{۲x^۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$n=۲\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۲}{۳x^۲}=\frac{۴}{۳}$$

$$n\geq ۳\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^n}=۱$$

درنتیجه:

$$m+n=\frac{۳}{۲}+۱=\frac{۵}{۲}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ax + b = ۳x^۲ - ۱۲x + ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۲ \\ b = ۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۱} \frac{ax - ۱۲}{x^۲ + ۱۱ - b} = \lim_{x \to ۱} \frac{۱۲x - ۱۲}{x^۲ + ۱۱ - ۱۲} = \lim_{x \to ۱} \frac{۱۲x - ۱۲}{x^۲ - ۱}$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{۱۲(x - ۱)}{(x - ۱)(x + ۱)} = \lim_{x \to ۱} \frac{۱۲}{x + ۱} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۶- گزینۀ «۴» *(سروش موئینی)*

ضابطۀ f و g را می‌نویسیم:

شیب خط f برابر $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-۱}{۲}$ است. $f(x) = \frac{-۱}{۲}x + ۱$

شیب خط g برابر $\tan ۴۵° = ۱$ است. $g(x) = x - ۲$

پس داریم: $\frac{f}{g}(x) = \frac{-\frac{۱}{۲}x + ۱}{x - ۲}$

درنتیجه: $\lim_{x \to ۲} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to ۲} \frac{-\frac{۱}{۲}(x - ۲)}{x - ۲} = \frac{-۱}{۲}$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۷- گزینهٔ «۲»

(محمدمصطفی ابراهیمی)

گزینهٔ «۱»: تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ $(0,2)$ زیر محور x ها و منفی است. پس $\sqrt{f(x)}$ در این بازه تعریف نشده است.

گزینهٔ «۲»: تابع $y = \frac{x-2}{\sqrt{f(x)}}$ در $x = 2$ از راست پیوسته است. چرا که:

$$y(2) = \frac{0}{\sqrt{f(2)}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{f(x)}} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$$

به علاوه در تمام نقاط بازهٔ $(2,3)$ نیز پیوسته است. پس در فاصلهٔ $[2,3)$ پیوسته می‌شود.

گزینهٔ «۳»: می‌دانیم $f(3) = 0$ است پس تابع $y = \frac{x-2}{\sqrt{f(x)}}$ در $x = 3$ تعریف شده نیست.

گزینهٔ «۴»: تابع $f(x)$ در $x = -3$ از راست پیوسته نیست، درنتیجه $\frac{x-2}{\sqrt{f(x)}}$ هم در $x = -3$ پیوستگی راست ندارد و نمی‌تواند در فاصلهٔ $[-3,-2)$ پیوسته باشد.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۲)

۱   ۲✓   ۳   ۴

۱۰۸- گزینهٔ «۳» (آریان حیدری)

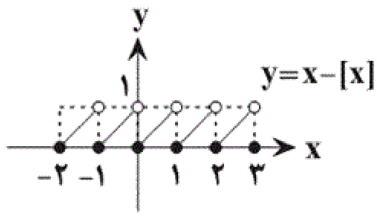
در ابتدا دقت کنید که چون سؤال در مورد عرض نقاط سؤال کرده، اجازه داریم به جای کار با تابع $f(x)=5x-[5x]$ با تابع $y=x-[x]$ کار کنیم.

با توجه به این نمودار، تابع در نقاط صحیح که روی خط $y=0$ قرارگرفته‌اند، فقط از راست پیوسته است و لذا: $n=0$، پس می‌توان گفت:

$$n-m=0-m=-m$$

حال برای پیدا کردن m، دقت کنید که با توجه به شکل، این تابع در نقاط غیر صحیح از هر دو طرف پیوسته است و در مورد این نقاط می‌توان گفت که روی خط $y=m$ واقع‌اند که $0<m<1$

بنابراین: $-1<-m<0$ و تنها گزینه‌ای که در این بازه قرار می‌گیرد، گزینهٔ «۳» است.



(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۹- گزینهٔ «۲» (محمدجواد محسنی)

اگر $g(x)=mx^2+2(m^2-2)x$ را درنظر بگیریم، آن‌گاه تابع $f(x)=[g(x)]$ زمانی در نقطهٔ $x=k$ حد دارد ولی پیوسته نیست که به‌ازای $x=k$، بیش‌ترین مقدار $g(x)$ در همسایگی‌اش باشد و البته $g(x)\in \mathbb{Z}$؛ پس باید در این سؤال که داخل براکت یک عبارت درجه دوم قرار دارد، $k=1$ رأس سهمی باشد:

$$-\frac{b}{2a}=1\Rightarrow -\frac{2(m^2-2)}{2m}=1\Rightarrow \frac{m^2-2}{m}=-1\Rightarrow m^2+m-2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

هر دو مقدار در شرط $g(1)\in \mathbb{Z}$ صدق می‌کنند، اما $m=1$ باعث می‌شود عبارت درجه دوم اصلاً بیش‌ترین مقدار نداشته باشد و نادرست است.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۴۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۰- گزینهٔ «۳» (علی‌اصغر شریفی)

با ضرب‌کردن تابع در مزدوج رادیکالی آن، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}(۲\sqrt{x}-\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}})\times\frac{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x-(۴x-۲\sqrt{x})}{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x-۲\sqrt{x}}}$$

در عبارت $۴x-۲\sqrt{x}$ که زیر رادیکال قرار دارد، وقتی $x\to+\infty$ کافی است تنها توان بزرگ‌تر را درنظر بگیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}+\sqrt{۴x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}+۲\sqrt{x}}=\frac{۲\sqrt{x}}{۴\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴