

RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

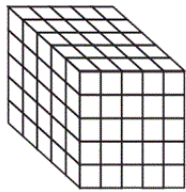
۱۲۱- از یک نقطه خارج یک صفحه به ترتیب از راست به چپ، چند خط و چند صفحه موازی با صفحه مفروض می توان رسم کرد؟

- (۱) یک - یک (۲) یک - بی شمار (۳) بی شمار - بی شمار (۴) بی شمار - یک

۱۲۲- کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

- (۱) اگر خطی یکی از دو خط موازی را در فضا قطع کند، لزوماً دیگری را نیز قطع می کند.
 (۲) اگر خطی با یکی از دو خط متناظر موازی باشد، لزوماً با خط دیگر متناظر است.
 (۳) از یک نقطه خارج یک صفحه، بی شمار صفحه می توان بر صفحه مفروض عمود رسم کرد.
 (۴) از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، تنها یک خط متناظر با خط مفروض می توان رسم کرد.

۱۲۳- هر شش وجه شکل زیر را رنگ آمیزی کرده ایم. چند مکعب کوچک وجود دارد که فقط دو وجه آن رنگ شده باشد؟



- (۱) ۱۸ (۲) ۲۷ (۳) ۳۶ (۴) ۷۲

۱۲۴- دو کره با شعاع های یکسان همدیگر را قطع کرده اند. اگر فاصله مراکز دو کره، $\sqrt{2}$ برابر شعاع هر کدام از کره ها باشد، مساحت

سطح مقطع حاصل از برخورد دو کره، چند برابر مساحت هر کدام از کره ها است؟

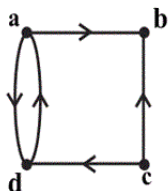
- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۵- مثلث متساوی الساقینی را حول قاعده آن دوران داده ایم. در این صورت دو مخروط با قاعده یکسان حاصل می شود که شعاع

قاعده هر کدام از آن ها برابر است با ...

- (۱) طول قاعده مثلث (۲) طول ارتفاع وارد بر قاعده مثلث (۳) نصف طول قاعده مثلث (۴) طول ساق مثلث

۱۱۱- گراف G در شکل مقابل نمایش داده شده است. مجموعه یال‌های این گراف کدام است؟



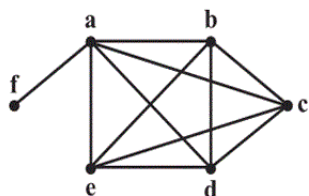
(۱) $E(G) = \{ab, bc, cd, ad, da\}$

(۲) $E(G) = \{ab, bc, cd, ad\}$

(۳) $E(G) = \{(a, b), (a, d), (c, b), (c, d), (d, a)\}$

(۴) $E(G) = \{(a, d), (b, a), (b, c), (d, a), (d, c)\}$

۱۱۲- گراف G در شکل زیر رسم گردیده است. اگر $x \in V(G)$ ، آنگاه به ازای چند رأس متمایز x ، $N_G[x] = \{a, b, c, d\}$ است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

۱۱۳- چند گراف ساده وجود دارد که حاصل ضرب مرتبه و اندازه آنها برابر ۱۲ باشد؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

۱۱۴- اندازه گراف 2 -منتظم از مرتبه p برابر ۱۶ است. چند مقدار زوج برای r وجود دارد؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۵

(۳) ۴

۱۱۵- گراف ساده G از مرتبه ۷ است. اگر $\delta(G) = 3$ باشد، آنگاه حداقل مقدار $\Delta(G)$ کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

۱۱۶- اگر G یک گراف 2 -منتظم از مرتبه p و تعداد یال‌های \bar{G} ، ۳ واحد بیشتر از تعداد یال‌های G باشد، آنگاه p کدام است؟

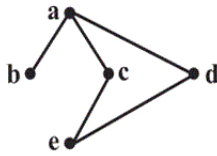
(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۸

۱۱۷- گراف G در شکل زیر، چند زیرگراف دارد که دارای ۳ یال باشند؟



۱۴ (۲)

۱۰ (۱)

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۱۸- به چند طریق می توان ۲۲۷۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

۲۵ (۴)

۲۴ (۳)

۱۱۹- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی m، معادله سیاله $mx + ۳۶y = ۲۴$ در مجموعه اعداد صحیح فاقد جواب است؟

۱۰ (۲)

۸ (۱)

۲۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲۰- مجموع ارقام بزرگ ترین عدد طبیعی دو رقمی x که به ازای آن معادله سیاله $۷x + ۱۱y = ۸۰۰$ در مجموعه اعداد صحیح جواب

دارد، کدام است؟

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

آمار و احتمال - ۵ سوال

۱۲۶- اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر، $P(A|B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ باشد، آنگاه $P(B)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{7}{15}$ (۳)

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{7}{20}$ (۱)

۱۲۷- جعبه‌ای شامل ۲ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۴ مهره سفید است. از این جعبه سه مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

احتمال آنکه حداقل ۲ مهره قرمز باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{3}{32}$ (۳) $\frac{9}{64}$ (۴) $\frac{5}{32}$

۱۲۸- احتمال زنده ماندن دو بیماری که بر روی آن‌ها عمل پیوند قلب انجام شده است تا بیست سال آینده به ترتیب $\frac{3}{4}$ و $\frac{3}{4}$ است.

احتمال اینکه فقط یکی از این دو نفر تا بیست سال آینده زنده بماند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{42}$ (۲) $\frac{1}{46}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{54}$

۱۲۹- اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر باشند به طوری که $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ و $P(A - B) = \frac{1}{4}$ ، آنگاه حاصل $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cup B')}$

کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۳۰- سکه‌ای همگن را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آمدن «رو» در هر دو پرتاب اول، B پیشامد آمدن «پشت» در پرتاب سوم و C پیشامد

آمدن دقیقاً دو «پشت» در سه پرتاب باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) پیشامدهای A و B مستقل‌اند، ولی پیشامدهای B و C وابسته‌اند.

(۲) هم پیشامدهای A و B و هم پیشامدهای B و C مستقل‌اند.

(۳) پیشامدهای A و B وابسته‌اند، ولی پیشامدهای B و C مستقل‌اند.

(۴) هم پیشامدهای A و B و هم پیشامدهای B و C وابسته‌اند.

حسابان دوازدهم - ۱۰ سوال

۸۱- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{8}$ و $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = 5$ باشد، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۲- معادله $\cot x = \frac{\cos 3x}{\sin x}$ ، در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۵
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۸۳- اگر $\tan 70^\circ = \tan 20^\circ + \tan 50^\circ = a$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) ۲

۸۴- معادله $6 \cos^2 x - 4 \sin^2 x = k$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، چهار جواب دارد. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

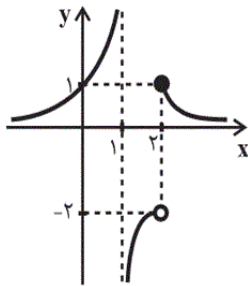
- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۱

۸۵- انتهای کمان‌های مربوط به جواب‌های معادله $\tan 5x + \cot 2x = 0$ ، در دایره مثلثاتی یک چندضلعی را مشخص می‌کند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) ۲
(۳) $1 + \sqrt{3}$
(۴) $\sqrt{3}$

۸۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{1 - [\sin x]}{1 + \tan x}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر
(۲) $+\infty$
(۳) $-\infty$
(۴) ۱



۸۷- نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$
 (۲) ۱
 (۳) -2
 (۴) $-\infty$

۸۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3+ax^2+bx+c} = -\infty$ باشد، حاصل abc کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۹
 (۳) -6
 (۴) -9

۸۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{2|x|-3}{x^2-4x+4}$ در اطراف مجانب قائم آن به کدام صورت است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



۹۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{2 \sin x - k}$ مجانب قائم دارد. k چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

۱۰۱- صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی هر دو نیمه بالایی و پایینی آن را برش می‌دهد. فصل مشترک (مقطع) حاصل کدام

است؟

(۲) دو خط متقاطع

(۱) هذلولی

(۴) یک خط راست

(۳) سهمی

۱۰۲- نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی در این صفحه که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک

فاصله باشند کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

(۲) صفر نقطه

(۱) بی‌شمار نقطه

(۴) چهار نقطه

(۳) یک نقطه

۱۰۳- فاصله دو خط موازی d و d' از یکدیگر برابر ۲ واحد است. چند نقطه در صفحه شامل این دو خط وجود دارد به طوری که مجموع

فواصل آن از دو خط d و d' برابر با ۲ باشد؟

(۲) ۱

(۱) هیچ

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

۱۰۴- دایره $(2x+6)^2 + (2y-2)^2 = 32$ در کدام ناحیه یا نواحی از چهار ناحیه دستگاه مختصات قرار دارد؟

(۲) ناحیه‌های اول و دوم

(۱) ناحیه دوم

(۴) هر چهار ناحیه

(۳) ناحیه‌های دوم و سوم

۱۰۵- شعاع دایره‌ای که مرکز آن نقطه $O(2,0)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ مماس بیرونی باشد، کدام است؟

(۲) $\sqrt{2}-1$

(۱) $2-\sqrt{3}$

(۴) $2-\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{3}-1$

۱۰۶- دایره $x^2 + y^2 - 4x + my + n = 0$ بر دو خط $y = x - 7$ و $y = x + 1$ مماس است. حاصل $m + n$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) -۱

(۴) ۵

(۳) ۳

۱۰۷- مرکز دایره‌ای که محور xها را در نقطه‌ای با طول‌های ۲ و -۴ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض‌های ۴ و -۲ قطع می‌کند، روی خط

$(m-1)x + y = 3$ واقع است. m کدام است؟

۱ (۱) 2

۳ (۳) -2

۱۰۸- خط به معادله $3x - 4y + 7 = 0$ ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ را در نقاط A و B قطع کرده است. طول وتر AB کدام

است؟

۱ (۱) $\frac{6}{5}$

۳ (۳) $\frac{12}{5}$

۱۰۹- به‌ازای کدام مقادیر m ، دایره $x^2 + y^2 + 4x + my + 4 = 0$ بر محور y مماس است؟

۱ (۱) ± 1

۳ (۳) ± 4

۱۱۰- شعاع دایره‌ای که محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند و قطری از آن روی نیمساز

ناحیه اول دستگاه مختصات واقع باشد، کدام است؟

۱ (۱) 3

۳ (۳) $2\sqrt{2}$

ریاضی پایه - دوازدهم - ۱۰ سوال

۹۱- کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x^2 - 4x$ کدام است؟

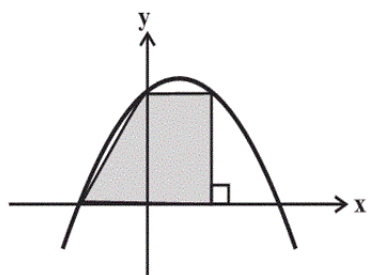
۱ (۱) صفر

۲ (۲) -4

۳ (۳) -2

۴ (۴) 1

۹۲- نمودار سهمی $y = 2 + x - x^2$ در شکل زیر رسم شده است. مساحت ذوزنقه رنگی کدام است؟



(۱) ۳

(۲) ۳/۵

(۳) ۲/۵

(۴) ۴

۹۳- در معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ ، مجموع معکوس جذر جوابها کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{10}$

(۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۹۴- اگر a و a^2 دو صفر متمایز تابع $f(x) = x^2 + ax + b$ باشند، حاصل $a - b$ کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) ۶

(۲) ۸

(۱) ۱۲

۹۵- به ازای چند مقدار صحیح m ، نمودار تابع $y = mx^2 - 2x + 2 - m$ از ربع سوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

۹۶- معادله درجه دومی که جوابهای آن مربع جوابهای معادله $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ باشند، به صورت $x^2 + ax + b = 0$ است. حاصل

$a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

(۴) -۱

(۳) ۹

(۲) -۹

(۱) ۱

۹۷- کوچک‌ترین جواب معادله $(x^2 + 2x)^2 = 3x^2 + 6x + 4$ کدام است؟

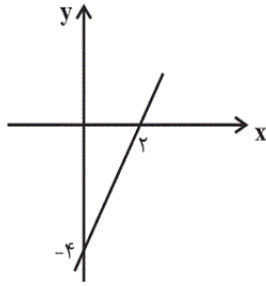
(۴) $1 - \sqrt{3}$

(۳) $-2 - \sqrt{3}$

(۲) $-\sqrt{5} - 1$

(۱) $\sqrt{5} - 1$

۹۸- خط $y = ax + b$ در شکل زیر رسم شده است. عبارت $p(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ در کدام بازه نامنفی است؟



(۲) $(\frac{1}{3}, 3]$

(۱) $(\frac{1}{3}, 2]$

(۴) $[\frac{1}{3}, 3)$

(۳) $[\frac{1}{3}, 2)$

۹۹- α و β جواب‌های معادله $x^2 + mx + 1 = 0$ هستند. اگر $-\frac{1}{3} < \alpha < 2 < \beta$ باشد، حدود m کدام است؟

(۲) $(-\infty, -\frac{5}{3})$

(۱) $(-\infty, -2)$

(۴) $(2, +\infty)$

(۳) $(-\frac{5}{3}, -2)$

۱۰۰- اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $|2x - \frac{x+a}{3}| < x$ با مجموعه جواب‌های نامعادله $|x - \frac{5}{4}| < b$ برابر باشد، مقدار مثبت a کدام

است؟

(۲) ۳

(۱) ۱

(۴) ۵

(۳) ۴

(مهمر قندان)

۱۲۱ -

از یک نقطه خارج یک صفحه، تنها یک صفحه به موازات صفحه مفروض
می‌توان رسم کرد ولی تمام خطوط موجود در این صفحه با صفحه مفروض
موازی هستند، بنابراین از یک نقطه خارج یک صفحه، بی‌شمار خط و یک
صفحه موازی با صفحه مفروض قابل رسم است.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

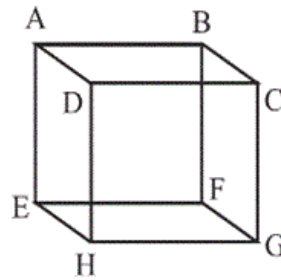
۴ ✓

۳

۲

۱

مکعب شکل مقابل را در نظر بگیرید؛



گزینه «۱»: خط گذرنده از نقاط A و B، خط گذرنده از نقاط B و C را قطع می‌کند ولی خط گذرنده از نقاط F و G ($FG \parallel BC$) را قطع نمی‌کند، پس این گزاره نادرست است.

گزینه «۲»: خط گذرنده از نقاط A و B با خط گذرنده از نقاط C و D موازی است ولی خط گذرنده از نقاط E و A (AE و CD متنافرند) را قطع می‌کند، پس این گزاره نادرست است.

گزینه «۳»: نقطه A بر خط گذرنده از نقاط G و H واقع نیست ولی مطابق شکل دو خط AD و AE از نقطه A عبور کرده و با خط گذرنده از نقاط G و H متنافرند، پس این گزاره نادرست است.

گزینه «۴»: از یک نقطه خارج یک صفحه، می‌توان خطی عمود بر آن صفحه رسم کرد. هر صفحه شامل این خط بر صفحه مفروض عمود است، پس این گزاره درست است.

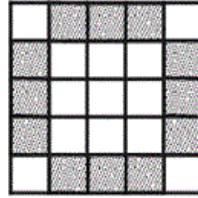
(هندسه ۱- تبسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۴

۳ ✓

۲

۱



در هر کدام از وجوه این مکعب، مکعب‌های کوچکی که در شکل بالا هاشور خورده اند، دارای دو وجه رنگ شده‌اند. از طرفی هر کدام از این مکعب‌های کوچک به دو وجه مکعب بزرگ تعلق دارند. با توجه به اینکه مکعب دارای ۶ وجه است، پس تعداد این مکعب‌های کوچک برابر است با:

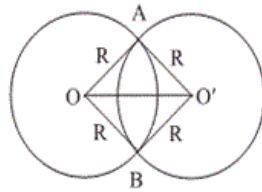
$$\frac{12 \times 6}{2} = 36$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱


مطابق شکل سطح مقطع حاصل از برخورد این دو کره، دایره‌ای به قطر AB است. طول اضلاع چهارضلعی $OA O' B$ برابر و طول قطر OO' در این چهارضلعی $\sqrt{2}$ برابر طول هر ضلع (شعاع هر کره) است، پس طبق عکس قضیه فیثاغورس در مثلث‌های OAO' و OBO' ، هر یک از زوایای A و B قائمه هستند و در نتیجه این چهارضلعی مربع است. در این صورت $AB = OO' = R\sqrt{2}$ است و در نتیجه داریم:

$$\frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت کره}} = \frac{\pi \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4\pi R^2} = \frac{\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

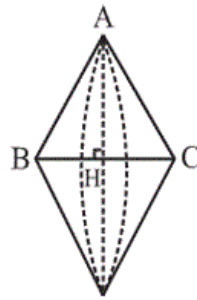
(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



اگر مثلث متساوی الساقینی را حول قاعده آن دوران دهیم، آنگاه مطابق شکل دو مخروط با قاعده یکسان ایجاد می‌شود که شعاع قاعده هر کدام برابر طول ارتفاع وارد بر قاعده مثلث و ارتفاع هر کدام برابر نصف طول قاعده مثلث است.

(هندسه ۱ - تقسیم فضایی؛ مشابه تمرین ۲ (ت) صفحه ۹۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، گراف جهت‌دار می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است، یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم که عضو اول هر زوج مرتب، رأس ابتدا و عضو دوم، رأس انتها است. بنابراین مجموعه یال‌های گراف G به صورت زیر است.

$$E(G) = \{(a, b), (a, d), (c, b), (c, d), (d, a)\}$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی، صفحه ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$N_G[X]$ همسایگی بسته رأس x است، بنابراین شامل رأس x می‌باشد، یعنی x باید به مجموعه $\{a, b, c, d\}$ تعلق داشته باشد. ولی با توجه به نمودار گراف، تمام رئوس a, b, c, d با رأس e مجاور هستند و مجموعه همسایگی بسته آنها لزوماً شامل رأس e نیز خواهد بود، پس به ازای هیچ رأس x ، همسایگی بسته این رأس برابر $\{a, b, c, d\}$ نیست.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی، صفحه ۳۶)

۴

۳

۲

۱

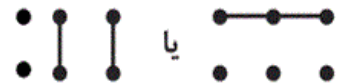
حالت‌های ممکن برای چنین گرافی عبارت‌اند از:

۱) $p = ۱۲, q = ۱$



مطابق شکل، تنها یک گراف با این مشخصات قابل رسم است.

۲) $p = ۶, q = ۲$



مطابق شکل، دو گراف با این مشخصات قابل رسم است.

۳) $p = ۴, q = ۳$



مطابق شکل، سه گراف با این مشخصات قابل رسم است.

بنابراین در مجموع ۶ گراف وجود دارد که حاصل ضرب مرتبه و اندازه آنها برابر ۱۲ باشد.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱

به گرافی که درجه تمامی رئوس آن برابر باشد، گراف منتظم گفته می‌شود. در هر گراف r -منتظم، رابطه $rp = 2q$ برقرار است. (r همان درجه هر راس است)

داریم:

$$rp = 2q \rightarrow rp = 2 \times 16$$

$$\rightarrow rp = 32 = 1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8$$

با توجه به آن که $r < p$ است، تنها دو مقدار زوج ۲ و ۴ برای r وجود دارد.

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل سازی، صفحه ۳۵)

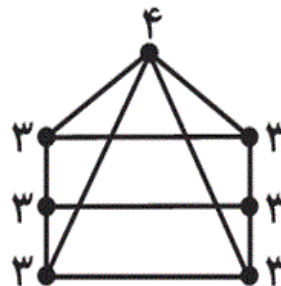
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در هر گراف ساده، $\Delta \geq \delta$ است. اگر $\Delta(G) = 3$ باشد، آنگاه با توجه به مقدار $\delta(G)$ ، تمامی رئوس گراف از درجه ۳ هستند. با توجه به اینکه گراف ۳-منتظم از مرتبه ۷ وجود ندارد، پس این حالت امکان پذیر نیست و در نتیجه حداقل مقدار $\Delta(G)$ برابر ۴ است. به عنوان مثال به گراف G در شکل زیر توجه کنید:



(ریاضیات گسسته-گراف و مدل سازی، صفحه ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به رابطه $rp = 2q$ در گراف‌های r -منتظم، در هر گراف 2 -منتظم، $p = q$ است. از طرفی مجموع تعداد یال‌های یک گراف و مکمل آن، برابر تعداد یال‌های گراف کامل هم‌مرتبه آن است، پس داریم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p + (p+3) = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\Rightarrow 2p + 3 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 4p + 6 = p^2 - p \Rightarrow p^2 - 5p - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (p-6)(p+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 6 \\ p = -1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

زیرگراف‌های موردنظر را به چند دسته تقسیم می‌کنیم:

الف) زیرگراف‌های مرتبه ۵: در این حالت کافی است از ۵ یال موجود در

گراف، هر بار ۳ یال را به دلخواه انتخاب کنیم که در نتیجه تعداد

$$\text{زیرگراف‌های این دسته برابر } 10 = \binom{5}{3} \text{ است.}$$

ب) زیرگراف‌های مرتبه ۴ فاقد رأس b : در این حالت با حذف رأس b ، یال

ab نیز از گراف حذف می‌شود. برای داشتن زیرگرافی با ۳ یال، کافی است

هر بار ۳ یال را از ۴ یال موجود به دلخواه انتخاب کنیم که در نتیجه تعداد

$$\text{زیرگراف‌های این دسته برابر } 4 = \binom{4}{3} \text{ است.}$$

پ) با حذف هر کدام از رأس‌های c, d, e گراف باقی‌مانده شامل ۳ یال است

و در نتیجه فقط یک زیرگراف با ۳ یال خواهد داشت و با حذف رأس a ،

گراف نمی‌تواند زیرگرافی شامل ۳ یال داشته باشد. همچنین هیچ زیرگرافی

شامل ۳ یال با مرتبه کمتر از ۴ برای گراف G وجود ندارد.

$$17 = 10 + 4 + 3 = \text{تعداد زیرگراف‌ها}$$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی، صفحه ۳۷)

$$2x + 5(2k + 1) = 227 \Rightarrow 2x = -10k + 222$$

$$\Rightarrow x = -5k + 111$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow -5k + 111 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{111}{5} \\ y \geq 0 \Rightarrow 2k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 0 \leq k \leq 22$$

بنابراین ۲۳ مقدار صحیح برای k وجود دارد و در نتیجه به ۲۳ طریق

می‌توان ۲۲۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل

کرد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، مشابه مثال صفحه ۲۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

شرط وجود جواب برای معادله $mx + 36y = 24$ آن است که $24 | (m, 36)$ ، با توجه به آن که $36 = 2^2 \times 3^2$ و $24 = 2^3 \times 3$ است، پس معادله در صورتی فاقد جواب است که m مضرب ۹ (دارای دو عامل ۳) باشد. داریم:

$$10 \leq 9k \leq 99 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 2 \leq k \leq 11$$

۱۰ مقدار طبیعی برای k وجود دارد، بنابراین به ازای ۱۰ عدد طبیعی دورقمی m ، معادله سیاله $mx + 36y = 24$ فاقد جواب در مجموعه اعداد صحیح است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرحسین ابومفوب)

$$\begin{aligned} 7x + 11y = 800 &\Rightarrow 7x \equiv 800 \pmod{11} \\ \Rightarrow -4x &\equiv 8 \pmod{11} \xrightarrow[\substack{\div(-4) \\ (4,11)=1}]{(-4)} x \equiv -2 \pmod{11} \Rightarrow x = 11k - 2 \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی x به ازای $k = 9$ حاصل می‌شود که برابر ۹۷ بوده و در نتیجه مجموع ارقام آن ۱۶ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس $P(A) = P(A|B) = \frac{1}{4}$

است. از طرفی برای دو پیشامد مستقل A و B ، رابطه

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

برقرار است، بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{4}P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}P(B) = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{20} \times \frac{4}{3} = \frac{7}{15}$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۴

۳✓

۲

۱

احتمال خارج کردن مهره قرمز از جعبه در هر بار برابر $\frac{1}{4}$ است. اگر A

پیشامد خارج کردن حداقل ۲ مهره قرمز از جعبه باشد، آنگاه داریم:

(۳ جایگاه برای مهره غیرقرمز)

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}_{\text{فقط دو مهره قرمز باشد}} + \underbrace{3 \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \right)}_{\text{هر سه مهره قرمز باشد}}$$

فقط دو مهره قرمز باشد هر سه مهره قرمز باشد

$$= \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۴✓

۳

۲

۱

اگر پیشامد زنده ماندن این دو بیمار تا بیست سال آینده را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه این دو پیشامد مستقل از یکدیگرند و احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A)P(B') + P(A')P(B)$$

$$= 0/4 \times 0/7 + 0/6 \times 0/3$$

$$= 0/28 + 0/18 = 0/46$$

(آمار و احتمال - احتمال، مشابه تمرین ۶ صفحه ۷۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس دو پیشامد A و B' نیز مستقل از هم هستند و داریم:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B')} = \frac{0/1}{0/4} \Rightarrow \frac{P(A)P(B)}{P(A)P(B')} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{P(B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4P(B) = 1 - P(B) \Rightarrow 5P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = 0/2$$

$$\Rightarrow P(B') = 0/8$$

$$\frac{P(A \cup B)}{P(A \cup B')} = \frac{(P(A) - P(A \cap B)) + P(B)}{(P(A) - P(A \cap B')) + P(B')}$$

$$= \frac{P(A - B) + P(B)}{P(A \cap B) + P(B')}$$

$$= \frac{0/4 + 0/2}{0/1 + 0/8} = \frac{0/6}{0/9} = \frac{2}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال، مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۷۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

احتمال پیشامدهای A، B و C برابر است با:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

رو در پرتاب دوم رو در پرتاب اول

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

پشت در پرتاب سوم

$$P(C) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

اشتراک دو پیشامد A و B آن است که دو پرتاب اول «رو» و پرتاب سوم «پشت» بیاید. داریم:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

اشتراک دو پیشامد B و C آن است که پرتاب سوم «پشت» و دقیقاً یکی از دو پرتاب اول «پشت» بیاید. داریم:

$$P(B \cap C) = \frac{\binom{2}{1}}{2^2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow \text{A و B مستقل اند}$$

$$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \Rightarrow P(B \cap C) \neq P(B)P(C) \Rightarrow \text{B و C وابسته اند}$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

با فرض $\frac{\pi}{4} - \alpha = x$ و $\frac{\pi}{4} + \beta = y$ ، داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(y - x) = \frac{\tan y - \tan x}{1 + \tan y \tan x}$$

$$= \frac{5 - \frac{1}{8}}{1 + 5\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{\frac{39}{8}}{\frac{13}{8}} = 3$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه ۴۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\cot x = \frac{\cos 3x}{\sin x} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos 3x}{\sin x}$$

با شرط $\sin x \neq 0$ (یعنی $x \neq k\pi$)، معادله به شکل $\cos 3x = \cos x$ در می‌آید.

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi & \text{غلق} \\ x = \frac{k\pi}{2} & \begin{matrix} x \neq k\pi \\ x \in [-\pi, \frac{3\pi}{2}] \end{matrix} \end{cases} \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

(مسئله ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$a \tan 5^\circ = \tan 7^\circ - \tan 2^\circ$$

$$\Rightarrow a \tan(7^\circ - 2^\circ) = \tan 7^\circ - \tan 2^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{a(\tan 7^\circ - \tan 2^\circ)}{1 + \tan 7^\circ \tan 2^\circ} = \tan 7^\circ - \tan 2^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1 + \tan 7^\circ \tan 2^\circ} = 1 \Rightarrow a = 1 + \tan 7^\circ \underbrace{\tan 2^\circ}_{\cot 7^\circ} \Rightarrow a = 2$$

(مسایان ۲- مثلثات، صفحه ۴۲)

 ۴

 ۳

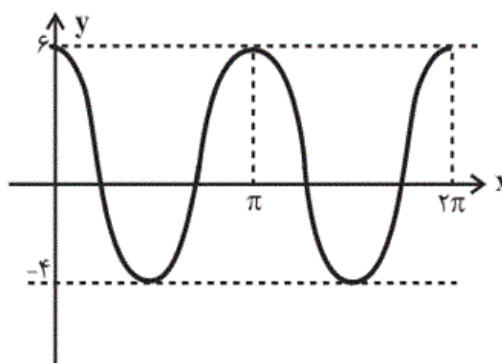
 ۲

 ۱

$$\Rightarrow f(x) = 5 \cos 2x + 1$$

دوره تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ است و نمودار آن در بازه

$[0, 2\pi]$ به صورت زیر خواهد بود.



با توجه به نمودار، اگر $k \in (-4, 6)$ باشد، خط $y = k$ نمودار f را در بازه $[0, 2\pi]$ ، ۴ بار قطع می‌کند. بنابراین k می‌تواند ۹ مقدار صحیح به خود بگیرد.

(مسایان ۲- مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

معادله $\tan \Delta x + \cot 2x = 0$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\tan \Delta x = -\cot 2x \xrightarrow{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha}$$

$$\tan \Delta x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x = k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$$

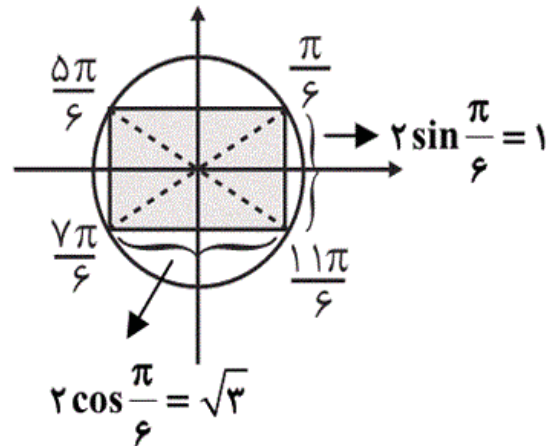
جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از:

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

دقت کنید که $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ در دامنه تابع $y = \tan \Delta x$ قرار ندارند.

با مشخص کردن انتهای کمان مربوط به جواب‌ها، مستطیل زیر به طول اضلاع

۱ و $\sqrt{3}$ به دست می‌آید که مساحت آن برابر $\sqrt{3}$ است.



(مسابان ۲- مثلثات، مشابه قسمت (ح) تمرین ۱ صفحه ۴۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

می‌دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$$

$$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

از طرفی وقتی که $x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$ ، تساوی $[\sin x] = 0$ برقرار است، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1 - [\sin x]}{1 + \tan x} = \frac{1 - 0}{1 + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

داریم:

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ و مقادیر $f(x)$ در یک همسایگی راست

نقطه $x = 2$ کم‌تر از ۱ هستند. پس اگر $t = f(x)$ باشد و $x \rightarrow 2^+$ ،

آن‌گاه $t \rightarrow 1^-$. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$$

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

توجه کنید که صورت کسر داده شده، یعنی $-(x-1)(x+1)$ ، یک عامل $x-1$ دارد. بنابراین مخرج کسر حداقل باید دو عامل $x-1$ داشته باشد تا کسر در $x=1$ دارای حد نامتناهی باشد. اما چون حد چپ و حد راست کسر در $x=1$ هر دو $-\infty$ هستند، مخرج کسر باید سه عامل $x-1$ داشته باشد. یعنی باید به صورت زیر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3+ax^2+bx+c} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{(x-1)^2} = -\infty$$

بنابراین چند جمله‌ای مخرج کسر باید به صورت $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ باشد، که نتیجه می‌شود: $a = -3, b = 3, c = -1 \Rightarrow abc = 9$

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر در بی نهایت، صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲


 ۱

با توجه به این که $x = 2$ تنها ریشهٔ مخرج ضابطهٔ تابع f است، خط

$x = 2$ تنها مجانب قائم نمودار آن است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \times 2 - 3}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 \times 1 - 3}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x = 2$ به صورت  است.

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی نهایت، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر مقدار مخرج کسر هیچ‌گاه صفر نشود، مقدار حد آن هم هیچ‌گاه صفر

نمی‌شود. (زیرا تابع $y = 2 \sin x - k$ در تمام نقاط \mathbb{R} پیوسته است.)

پس اگر k را طوری پیدا کنیم که مخرج $f(x)$ بتواند در نقطه‌ای صفر

$$2 \sin x - k = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{k}{2} \quad \text{شود، تابع مجانب قائم خواهد داشت:}$$

بنابراین اگر $-2 \leq k \leq 2$ باشد، معادله بالا جواب دارد.

اما به ازای $k = 0$ داریم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 \sin x} = \frac{1}{2}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

که در این حالت نمودار تابع f مجانب قائم ندارد. در نتیجه برای 4 مقدار

صحیح 1 و 2 نمودار تابع f مجانب قائم دارد.

(مسئله ۲ - مرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو نیمه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد در این صورت فصل مشترک حاصل هذلولی است ولی دقت کنید که در صورت سؤال عنوان شده است که صفحه شامل محور سطح مخروطی است که در این صورت فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع می‌باشد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

۴

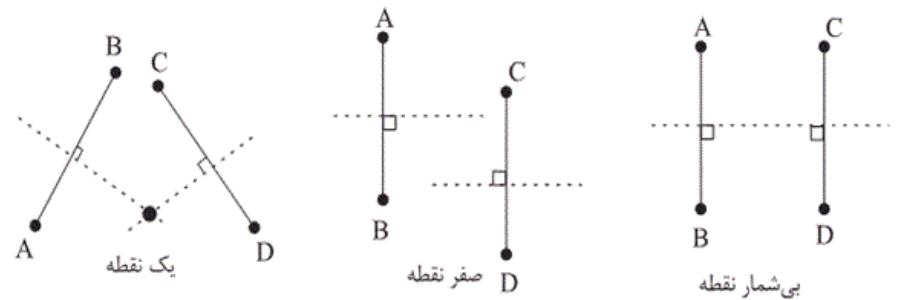
۳

۲ ✓

۱

مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B در صفحه به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره خط AB است.

بنابراین در حالت کلی محل برخورد عمودمنصف پاره خط‌های AB و CD (در صورت برخورد) جواب می‌باشد که به صورت‌های زیر می‌تواند باشد:



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۴ ✓

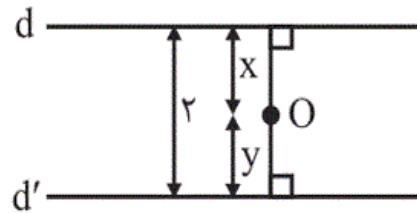
۳

۲

۱

تمام نقاط موجود در ناحیه بین دو خط، مکان هندسی مطلوب است.

$$x + y = 2$$



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$2^2(x+3)^2 + 2^2(y-1)^2 = 32 \Rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8$$

شعاع دایره: $R = 2\sqrt{2}$ مرکز دایره: $O(-3, 1)$

فاصله مرکز دایره از محور x ها برابر ۱ و از محور y ها برابر ۳ است. چون

$1 < 2\sqrt{2} < 3$ است، پس مطابق شکل، دایره فقط در ناحیه‌های دوم و سوم

دستگاه مختصات قرار دارد.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را حساب می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

مرکز دایره: $O'(1, -1)$

$$\text{شعاع دایره: } R' = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4(1)} = 1$$

حال اگر $d = OO'$ طول خط‌المركزین باشد، چون دو دایره مماس خارج

هستند، پس داریم:

$$d = OO' = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$d = R + R' \Rightarrow R = d - R' = \sqrt{2} - 1$$

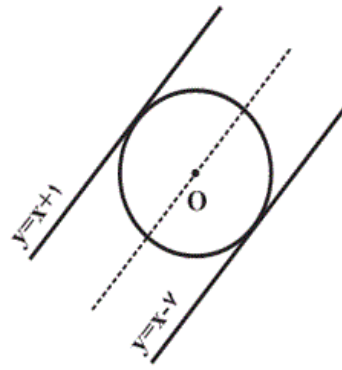
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، مشابه مثال صفحه ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



معادله خطی که موازی دو خط داده شده و به یک فاصله از آنها قرار دارد عبارت است از $y = x - 3$. پس مرکز دایره روی این خط قرار دارد.

$$\text{مرکز دایره } O\left(2, \frac{-m}{2}\right) \Rightarrow -\frac{m}{2} = 2 - 3 \Rightarrow m = 2$$

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|1 - (-7)|}{\sqrt{1+1}} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره } R = 2\sqrt{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{16 + 4 - 4n}}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 16 + 4 - 4n = 32 \Rightarrow n = -3$$

بنابراین حاصل $m + n$ برابر $2 - 3 = -1$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

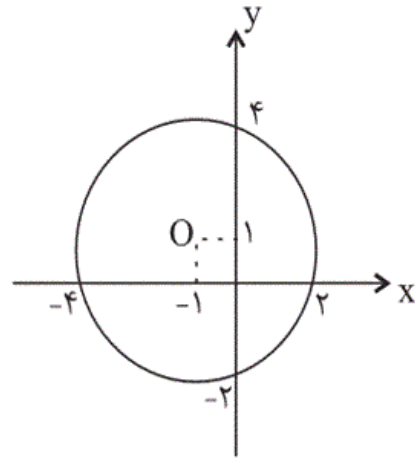
۴

۳

۲

۱ ✓

اگر $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد، با توجه به شکل زیر داریم:



$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{-4+2}{2} = -1 \\ \beta &= \frac{4-2}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow O(-1, 1)$$

مختصات O را در معادله خط داده شده قرار می‌دهیم:

$$(m-1) \times (-1) + 1 = 3 \Rightarrow m = -1$$

(هنر سه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

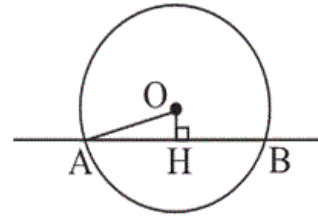
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم. داریم:



مرکز دایره: $O(1,1)$

$$\text{شعاع دایره: } R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 - 4(-2)} = 2$$

$$OH = \frac{|3(1) - 4(1) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$$

$$OAH: AH^2 = OA^2 - OH^2 = 4 - \frac{36}{25} = \frac{64}{25} \Rightarrow AH = \frac{8}{5}$$

قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین داریم:

$$AB = 2AH = 2 \times \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 + my + \frac{m^2}{4}) - \frac{m^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y + \frac{m}{2})^2 = (\frac{m}{2})^2$$

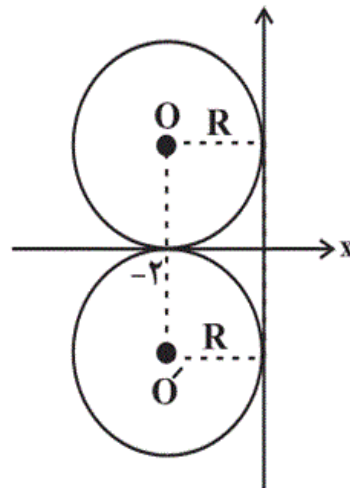
$$\Rightarrow \text{مرکز دایره: } O(-2, -\frac{m}{2})$$

$$\text{شعاع دایره: } R = \left| \frac{m}{2} \right|$$

چون دایره بر محور y مماس است، پس شعاع دایره برابر قدرمطلق طول

مرکز دایره است و در نتیجه داریم:

$$\left| \frac{m}{2} \right| = 2 \Rightarrow m = \pm 4$$



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(گیوان دارایی)

نقاط $A(2, 0)$ و $B(0, 4)$ دو نقطه از دایره هستند. بنابراین مرکز این دایره روی عمودمنصف AB (خط Δ) واقع است. معادله عمودمنصف AB را می‌نویسیم:

$$M = \frac{A+B}{2} = (1, 2) \text{ (وسط } A \text{ و } B)$$

$$m_{AB} = \frac{4-0}{0-2} = -2 \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{معادله عمودمنصف } AB: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - 4 = x - 1$$

$$\Rightarrow x = 2y - 3$$

از طرفی مرکز دایره روی نیمساز ناحیه اول نیز قرار دارد، بنابراین مرکز دایره از تلاقی معادله خط به دست آمده با خط $y = x$ بدست می‌آید:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y - 3 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2x - 3 \Rightarrow x = 3, y = 3$$

پس مرکز دایره، نقطه $O(3, 3)$ است و داریم:

$$\text{شعاع دایره: } R = OA = \sqrt{(2-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(جوانبش نیکنام)

$$f(x) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

دهانه سهمی f رو به بالا است، بنابراین عرض رأس آن کم‌ترین مقدار تابع را نشان می‌دهد. با توجه به ضابطه f در $x = 2$ (طول رأس سهمی) کم‌ترین مقدار یعنی $y = -4$ حاصل می‌شود.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

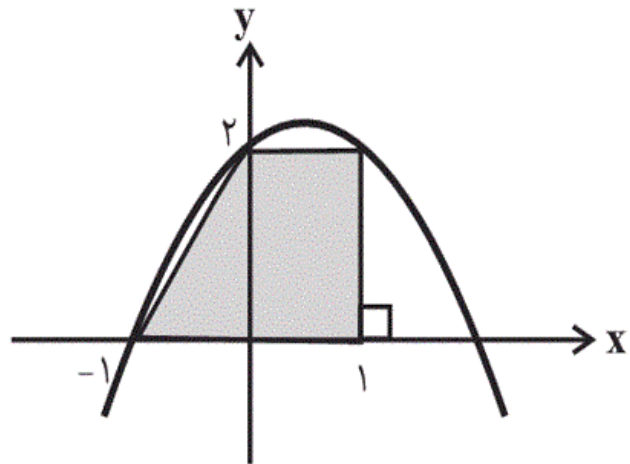
$$y = 2 + x - x^2 = (1 + x)(2 - x)$$

عرض از مبدأ سهمی و ارتفاع ذوزنقه برابر ۲ است و همچنین $x = 2$ و $x = -1$ طول نقاط برخورد سهمی با محور طول‌ها هستند. بنابراین برای به‌دست آوردن طول قاعده‌های ذوزنقه، کافی است طول نقطه (نقاط) برخورد سهمی را با خط $y = 2$ به‌دست آوریم:

$$2 + x - x^2 = 2 \Rightarrow x - x^2 = x(1 - x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

داریم:



$$\Rightarrow S = \frac{(2+1)}{2} \times 2 = 3$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای مجموع معکوس جذر جواب‌ها داریم:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\sqrt{4}} = 3$$

$$\xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{3}$$

(مسئله ۱- بیرو و معادله، صفحه‌های ۸ و ۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم ابلالی)

۹۴

a و a^2 جواب‌های معادله هستند، پس داریم:

$$\Rightarrow S = a + a^2 = -a \Rightarrow a^2 + 2a = a(a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 0 \end{cases}$$

$a = 0$ غیرقابل قبول است، زیرا a و a^2 برابر خواهند شد.

$$P = a \cdot a^2 = b \xrightarrow{a = -2} b = -8 \Rightarrow a - b = 6$$

(مسئله ۱- بیرو و معادله، صفحه‌های ۸ و ۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

اگر $m = 0$ باشد، خط $y = -2x + 2$ از ناحیه سوم نمی‌گذرد. اما با

فرض $m \neq 0$ ، برای سهمی $y = mx^2 - 2x + 2 - m$ داریم:

$$\Delta = (-2)^2 - 4m(2 - m) = 4m^2 - 8m + 4 = 4(m - 1)^2 \geq 0$$

بنابراین برای اینکه سهمی مورد نظر از ربع سوم نگذرد، کافی است شروط

زیر برقرار باشند. (سهمی ریشه‌های نامنفی داشته باشد):

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad m > 0 \Rightarrow \text{دهانه سهمی روبه بالا باشد.} \\ (2) \quad S > 0 \Rightarrow \frac{2}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 \\ (3) \quad P \geq 0 \Rightarrow \frac{2 - m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2 \end{array} \right.$$

با توجه به اینکه $m = 0$ نیز قابل قبول است، m می‌تواند اعداد صحیح

صفر، ۱ و ۲ را بپذیرد.

(مسئله ۱- جبر و معادله، صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا معادله $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ را حل می‌کنیم.

$$(x^3 - x) + (-2x^2 + 2) = x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1, x = 2$$

حالت‌های زیر برای معادله درجه دوم داده شده امکان‌پذیر است:

الف) معادله دو جواب متمایز ۱ و ۴ را داشته باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -S = -5 \\ b = P = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

ب) معادله جواب مضاعف $x = 1$ را داشته باشد.

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow a + b = -1$$

پ) معادله جواب مضاعف $x = 4$ را داشته باشد.

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 8x + 16$$

$$\Rightarrow a + b = 8$$

(مسئله ۱- پیپر و معارله، صفحه‌های ۸ و ۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با فرض $t = x^2 + 2x$ معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$(x^2 + 2x)^2 - 3(x^2 + 2x) - 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\Rightarrow t = -1, t = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 + 2x = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

بنابراین $-1 - \sqrt{5}$ کوچک‌ترین جواب معادله است.

(مسئله ۱- پیپر و معارله، صفحه ۱۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به اینکه نقاط $(۰, -۴)$ و $(۲, ۰)$ روی خط مورد نظر قرار دارند، معادله خط به صورت $y = ۲x - ۴$ است و داریم:

$$p(x) = \frac{۲x - ۴}{-۴x + ۲} = \frac{x - ۲}{-۲x + ۱}$$

جدول تعیین علامت عبارت $p(x)$ به صورت زیر است:

	$\frac{۱}{۲}$	۲	
$x - ۲$	-	-	+
$-۲x + ۱$	+	-	-
$p(x)$	-	+	-

ن

۴

۳

۲

۱ ✓

جدول تعیین علامت عبارت $p(x) = x^2 + mx + 1$ به صورت زیر باید باشد:

x	$-\frac{1}{2}$	α	β
$p(x)$	+	-	+

در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} p(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4} - \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{2} & (1) \\ p(\beta) = 2m + 5 < 0 \Rightarrow m < -\frac{5}{2} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} m \in (-\infty, -\frac{5}{2})$$

دقت کنید برای این بازه شرط وجود دو جواب حقیقی متمایز (یعنی $\Delta > 0$) نیز برقرار خواهد بود.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\left| 2x - \frac{x+a}{3} \right| < x \Rightarrow \left| \frac{\Delta x - a}{3} \right| < x \Rightarrow |\Delta x - a| < 3x$$

$$\Rightarrow -3x < \Delta x - a < 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x < \Delta x - a \Rightarrow \Delta x > a \Rightarrow x > \frac{a}{\Delta} \\ \Delta x - a < 3x \Rightarrow 2x < a \Rightarrow x < \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a > 0} \frac{a}{\Delta} < x < \frac{a}{2} \quad (1)$$

$$\left| x - \frac{\Delta}{4} \right| < b \xrightarrow{b > 0} -b < x - \frac{\Delta}{4} < b$$

$$\Rightarrow -b + \frac{\Delta}{4} < x < b + \frac{\Delta}{4} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} \frac{a}{\Delta} = -b + \frac{\Delta}{4} \\ \frac{a}{2} = b + \frac{\Delta}{4} \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = \frac{3}{4}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۳)

۴

۳ ✓

۲

۱