

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۸۱- دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - (a^2 + 1)x - b^2}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-1, 6\}$ است. مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۸۲- اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 5 \\ 3 & x \geq 5 \end{cases}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{1 - f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 5]$ (۲) $(-\infty, -1] \cup (0, 5)$
(۳) $(-\infty, 5)$ (۴) $(-\infty, -1) \cup (-1, 5)$

۸۳- اگر توابع $f(x) = \frac{bx + 2}{x^2 + ax + 4}$ و $g(x) = \frac{c}{x + 2}$ برابر باشند، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۸۴- دو تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x > a \\ \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right] + b & x < c \end{cases}$ و $g(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3}$ با هم برابرند. حاصل $\frac{a + b}{c}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۸۵- در کدام یک از روابط زیر، y تابعی از x است؟

- (۱) $y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 0$ (۲) $y^2 + 2y = x - 1$
(۳) $|x| + |y - 1| = 1$ (۴) $|y| \sqrt[3]{x} = 1$

۸۶- برد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۸۷- اگر مساحت بین نمودار $y = [ax]$ با محور x ها در بازه $[0, 1)$ برابر $1/5$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۸- معادله $[x^2 - 3x] = x^2 - 3x$ دارای چند جواب در بازه $[0, 2]$ است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۸۹- تابع $f(x) = 2x^2 + 12x - 1$ با کدام دامنه یک به یک است؟

- (۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-4, 0)$
 (۳) $[-8, -3]$ (۴) $\mathbb{R} - \{-3\}$

۹۰- وارون تابع خطی $y = \frac{3}{4}x - 6$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۶ (۴) -۶

۹۱- وارون تابع $y = -\sqrt{1-x} + 1$ از کدام نواحی عبور می کند؟

- (۱) اول و سوم (۲) دوم و چهارم (۳) اول و دوم (۴) سوم و چهارم

۹۲- کدام یک از توابع زیر، وارون پذیر است؟

- (۱) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ \sqrt{-x} & ; x \leq 0 \end{cases}$
 (۲) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -\frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$
 (۳) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$
 (۴) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -|x| & ; x < 0 \end{cases}$

۹۳- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+2}{ax+b}$ بر نمودار تابع معکوس خود منطبق باشد، مقدار b چقدر است؟ ($a \neq 0$)

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱

۹۴- طول نقاط برخورد تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ و وارونش کدام است؟

- (۱) ۲ و ۱ (۲) ۱ و -۱ (۳) -۱ و ۲ (۴) ۲ و صفر

۹۵- اگر بدانیم $f + g = \{(-1, 2), (0, 7), (1, 0), (2, -1)\}$ و $f - g = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 4), (2, -7)\}$ باشد،

مجموع اعضای دامنه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۶- اگر $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = f(4 - 2x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $[-1, 0]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[1, 2]$

۹۷- اگر $f = \{(-2, 2), (-1, 3), (2\sqrt{2}, 0), (\sqrt{6}, -1), (2, 0)\}$ و $g(x) = \sqrt{4-2x}$ باشند، مجموع اعضای دامنه تابع $\frac{f}{f \circ g}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) -۱

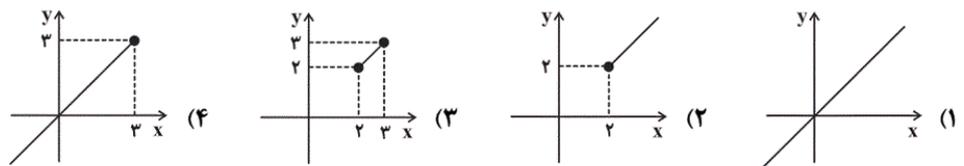
۹۸- اگر $(f \circ g)(x) = 8x^2 - 6x + 6$ و $g(x) = 2x - 1$ باشد، مقدار $(f - g)(3)$ کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۴

۹۹- اگر $f^{-1}(x) = g(x-1)$ باشد، حاصل $(f \circ g)(0) + (g^{-1} \circ f^{-1})(1)$ کدام است؟ (دامنه دو تابع وارون پذیر f و g برابر با \mathbb{R} است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $f^{-1}(0)$ (۴) $f^{-1}(1)$

۱۰۰- اگر تابع $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x-2}}$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1} \circ f$ کدام است؟



هندسه ۲، تبدیل های هندسی - سوال ۲

۱۲۹- کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

- (۱) تبدیل طولی همواره شیب خط را حفظ می کند.
 (۲) اگر تبدیلی اندازه زوایا را ثابت نگه دارد، قطعاً طولی است.
 (۳) اگر تبدیلی شیب خطها را ثابت نگه دارد، قطعاً طولی است.
 (۴) تبدیل طولی همواره اندازه زاویه ها را ثابت نگه می دارد.

۱۳۰- تناظر T در صفحه P ، هر نقطه را به قرینه آن نسبت به مبدأ مختصات نظیر می کند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) T تبدیل نیست.
 (۲) T تبدیل است ولی طولی نیست.
 (۳) T یک تبدیل طولی است ولی شیب خطها را ثابت نگه نمی دارد.
 (۴) T یک تبدیل طولی است که شیب خطها را ثابت نگه می دارد.

هندسه ۲، چندضلعی محاطی و محیطی - سوال ۸

۱۲۱- دوزنقه قائم الزاویه ای بر یک دایره به شعاع ۶ محیط است. اگر طول ساق غیرقائم آن برابر ۱۹ باشد، در این

صورت مساحت دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۱۵۳ (۲) ۱۸۶ (۳) ۱۳۸ (۴) ۱۴۷

۱۲۲- در یک ۱۰ ضلعی منتظم، رأس‌ها را به ترتیب $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$ نام‌گذاری می‌کنیم. زاویه بین قطر A_1A_5 و قطر A_2A_9 کدام است؟

- (۱) 72° (۲) 60° (۳) 90° (۴) 84°

۱۲۳- یک دوزنقه متساوی‌الساقین با زاویه 60° بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. محیط دوزنقه چند برابر R است؟

- (۱) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $6\sqrt{3}$

۱۲۴- اگر مجموع عکس شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلثی برابر ۲ و محیط مثلث برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۲۵- اگر شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی برابر $\frac{3}{4}$ و طول ارتفاع‌های نظیر دو ضلع این مثلث برابر ۴ و ۶ باشد، آن‌گاه نوع این مثلث کدام است؟

- (۱) فقط قائم‌الزاویه (۲) فقط متساوی‌الساقین
(۳) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین (۴) نامشخص

۱۲۶- فرض کنید نقاط M و N به ترتیب مراکز دایره محاطی داخلی و دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC در مثلث ABC باشند و پاره‌خط MN ، ضلع BC را در نقطه D قطع کند. اگر $ND = 3MD = 6$ و $CD = 4$ باشد، آن‌گاه طول BD کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

۱۲۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع قائمه ۷ و ۲۴، بیشترین فاصله مرکز دایره محاطی داخلی از رئوس مثلث کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{2}$ (۲) $13\sqrt{2}$ (۳) $14\sqrt{2}$ (۴) $15\sqrt{2}$

۱۲۸- اگر مساحت سطح محصور بین دو ضلعی منتظم محاطی و محیطی یک دایره، $\frac{1}{4}$ مساحت Π ضلعی منتظم محیطی آن دایره باشد، Π کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

حسابان۱ - سوالات موازی ، آشنایی با هندسه تحلیلی - سوال ۵ -

۱۰۱- سه نقطه $A(4, 3)$ ، $B(-2, 1)$ و $C(1, -1)$ رئوس مثلث ABC است. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۰۲- اگر سه ضلع از یک لوزی بر خطوط $d: 2x - y = 6$ ، $d': y - x = 2$ ، و $d'': 2y = 4x - 4$ منطبق

باشند، مساحت این لوزی کدام است؟

- (۱) $\frac{8\sqrt{10}}{5}$ (۲) $\frac{16\sqrt{10}}{5}$ (۳) $\frac{16\sqrt{2}}{5}$ (۴) $\frac{8\sqrt{2}}{5}$

۱۰۳- معادله دسته خطوطی که از نقطه A می‌گذرند به صورت $(m+1)x - (2m-1)y = 3$ است. عرض از مبدأ خط d که از نقاط A و $(-1, 3)$ عبور می‌کند، کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) ۵

۱۰۴- خط $y + x = 5$ معادله یکی از قطرهای مربع است. اگر نقطه $(3, 4)$ یکی از رئوس این مربع باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر رأس دیگر مربع نیست؟

- (۱) $(1, 2)$ (۲) $(1, 4)$ (۳) $(2, 3)$ (۴) $(3, 2)$

۱۰۵- عرض از مبدأ خطی با شیب مثبت که نیمساز زاویه بین دو خط $2x + y = 1$ و $x - 2y = 2$ باشد، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) -۳

حسابان ۱- سوالات موازی، آشنایی بیشتر با تابع - ۱ سوال -

۱۰۹- اگر توابع $f(x) = \frac{x^2 - (c-1)x + 6 - b}{x + a}$ و $g(x) = \frac{x^3 + bx + 2a}{x^2 - a^2}$ برابر باشند، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

حسابان ۱- سوالات موازی، انواع تابع - ۸ سوال

۱۱۰- در کدام یک از روابط زیر، y تابعی از x است؟

- (۱) $y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 0$ (۲) $y^2 + 2y = x - 1$
 (۳) $|x| + |y - 1| = 1$ (۴) $|y| \sqrt[3]{x} = 1$

۱۱۱- برد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}] - \mathbb{R}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۱۱۲- اگر مساحت بین نمودار $y = [ax]$ با محور x ها در بازه $[0, 1]$ برابر $\frac{1}{5}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۳- معادله $x^2 - 3x = x^2 - 3x$ دارای چند جواب در بازه $[0, 2]$ است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۴- اگر مجموعه جواب معادله $3 = [x + \frac{1}{4}] + [x - \frac{11}{4}] - 3 = 0$ برابر $[a, b]$ باشد. حاصل $b - a$ کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۰۶- دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - (a^2 + 1)x - b^2}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-1, 6\}$ است. مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۰۷- اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 5 \\ 3 & x \geq 5 \end{cases}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{1 - f(x)}$ کدام است؟

- ۱) $(-\infty, 5]$ ۲) $(-\infty, -1] \cup (0, 5)$ ۳) $(-\infty, 5)$ ۴) $(-\infty, -1) \cup (-1, 5)$

۱۰۸- در تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ، اگر مجموعه مقادیری از x که به ازای آن تابع f قابل تعریف است، بازه $[-2, 2]$ و $f(0) = 2$ باشد، آن گاه $a - b$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

حسابان ۱ - سوالات موازی ، وارون تابع - ۶ سوال -

۱۱۵- تابع $f(x) = 2x^2 + 12x - 1$ با کدام دامنه یک به یک است؟

- ۱) $(-\infty, -2)$ ۲) $(-4, 0)$ ۳) $[-8, -3]$ ۴) $\mathbb{R} - \{-3\}$

۱۱۶- اگر $f(x) = \frac{a+1}{x+2} - 1$ و $f^{-1}(2) = -3$ ، آن گاه مقدار a کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۱۷- کدام گزینه بیانگر تابعی وارون پذیر است؟

- ۱) $y = |x| + 1 - x$ ۲) $y = 1 - 3|x| + x$ ۳) $y = 1 + 3|x| - x$ ۴) $y = 1 - 3x + |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -\frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ \sqrt{-x} & ; x \leq 0 \end{cases} \quad (۱)$$

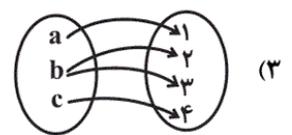
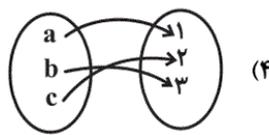
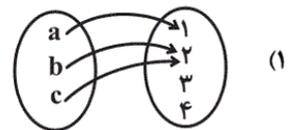
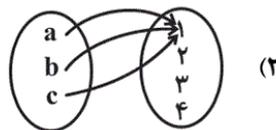
$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -|x| & ; x < 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases} \quad (۳)$$

۱۱۹ - اگر $f = \{(۴, ۲), (a, ۵), (۴, a^2 - a), (b, ۲), (-۱, ۴)\}$ یک تابع یک به یک باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

- (۲, ۲) (۴) (-۱, ۴) (۳) (۲, ۴) (۲) (۲, -۱) (۱)

۱۲۰ - کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابعی است که وارونش نیز یک تابع است؟



هندسه ۲- سوالات موازی، چندضلعی محاطی و محیطی - ۱۰ سوال

۱۳۱ - دوزنقه قائم الزاویه‌ای بر یک دایره به شعاع ۶ محیط است. اگر طول ساق غیرقائم آن برابر ۱۹ باشد، در این

صورت مساحت دوزنقه کدام است؟

- ۱۴۷ (۴) ۱۳۸ (۳) ۱۸۶ (۲) ۱۵۳ (۱)

۱۳۲ - در یک ۱۰ ضلعی منتظم، رأس‌ها را به ترتیب $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$ نام‌گذاری می‌کنیم. زاویه بین قطر A_1A_5 و قطر A_2A_9 کدام است؟

- ۸۴° (۴) ۹۰° (۳) ۶۰° (۲) ۷۲° (۱)

۱۳۳ - یک دوزنقه متساوی الساقین با زاویه ۶۰° بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. محیط دوزنقه چند برابر R است؟

- $۶\sqrt{۳}$ (۴) $۴\sqrt{۳}$ (۳) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ (۲) $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$ (۱)

۱۳۴- اگر مجموع عکس شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلثی برابر ۲ و محیط مثلث برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه مساحت این مثلث کدام است؟

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۱۳۵- اگر شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی برابر $\frac{3}{4}$ و طول ارتفاع‌های نظیر دو ضلع این مثلث برابر ۴ و ۶ باشد، آن‌گاه نوع این مثلث کدام است؟

(۲) فقط متساوی‌الساقین

(۱) فقط قائم‌الزاویه

(۴) نامشخص

(۳) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۱۳۶- فرض کنید نقاط M و N به ترتیب مراکز دایره محاطی داخلی و دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC در مثلث ABC باشند و پاره خط MN ، ضلع BC را در نقطه D قطع کند. اگر $ND = 3MD = 6$ و $CD = 4$ باشد، آن‌گاه طول BD کدام است؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

۱۳۷- در مثلثی قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائمه ۷ و ۲۴، بیشترین فاصله مرکز دایره محاطی داخلی از رئوس مثلث کدام است؟

$15\sqrt{2}$ (۴)

$14\sqrt{2}$ (۳)

$13\sqrt{2}$ (۲)

$12\sqrt{2}$ (۱)

۱۳۸- اگر مساحت سطح محصور بین دو ضلعی منتظم محاطی و محیطی یک دایره، $\frac{1}{4}$ مساحت ضلعی منتظم محیطی آن دایره باشد، n کدام است؟

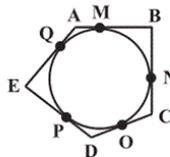
۱۲ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۱۳۹- در شکل زیر، اگر $AQ = 2$ ، $BM = 4$ ، $CN = \frac{3}{5}$ و محیط پنج ضلعی محیطی $ABCDE$ برابر ۳۱ باشد، آن‌گاه طول ضلع DE کدام است؟



۴/۵ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷/۵ (۴)

۱۴۰- شعاع دایره محاطی خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع، چند برابر شعاع دایره محیطی آن است؟

۲ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱/۵ (۱)

آمار و احتمال، مبانی احتمال - ۶ سوال -

۱۴۵- کدام گزینه درست است؟

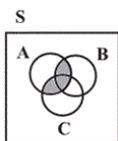
(۱) به هر عضو فضای نمونه یک پیشامد می‌گویند.

(۲) برای بررسی درآمد کارمندان شهرداری از علم احتمال کمک می‌گیریم.

(۳) علم احتمال، بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه نامعلوم است.

(۴) علم آمار، شناختن جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه معلوم است.

۱۴۶- اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، آن گاه قسمت هاشور خورده در نمودار ون زیر معادل کدام پیشامد است؟



(۱) A و B با هم رخ دهند یا A و C با هم رخ دهند.

(۲) سه پیشامد A ، B و C با هم رخ دهند.

(۳) B یا C رخ دهد ولی A رخ ندهد.

(۴) حداقل دو پیشامد از میان پیشامدهای A ، B و C رخ دهد.

۱۴۷- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، حاصل عبارت $P(A' \cup B') - P(A' \cap B)$ همواره برابر کدام است؟

(۱) $P(A)$ (۲) $P(B)$ (۳) $P(A')$ (۴) $P(B')$

۱۴۸- عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۵۰ انتخاب می‌شود. احتمال این که عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد و یا

بر ۷ بخش پذیر باشد ولی بر ۳ بخش پذیر نباشد، کدام است؟

(۱) $0/38$ (۲) $0/40$ (۳) $0/42$ (۴) $0/44$

۱۴۹- از میان اعداد طبیعی یک رقمی، دو عدد متمایز به طور تصادفی و با هم انتخاب می‌کنیم. تعداد اعضای کدام یک از پیشامدهای زیر بیشتر از سایرین است؟

(۱) مجموع دو عدد انتخابی زوج باشد.

(۲) حاصل ضرب دو عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد.

(۳) مجموع دو عدد انتخابی فرد باشد.

(۴) اختلاف دو عدد انتخابی کوچک‌تر از ۲ باشد.

۱۵۰- خانواده‌ای دارای سه فرزند است. در فضای نمونه فرزندان این خانواده، پیشامدهای A ، B و C به ترتیب به صورت «جنسیت فرزند اول و دوم متفاوت باشد»، «حداقل دو فرزند دختر باشند» و «فرزند اول پسر باشد»، تعریف شده‌اند. کدام دو پیشامد ناسازگار هستند؟

(۱) $A - B$ و C (۲) $C - A$ و B (۳) A و $B - C$ (۴) هیچ کدام

آمار و احتمال، قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبرمجموعه‌ها) - ۴ سوال

۱۴۱- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x < 2\}$ باشد، نمودار مختصاتی A^2 کدام است؟

(۱) محیط یک مربع (۲) سطح یک مربع (۳) رئوس یک مربع (۴) یک نقطه

۱۴۲- اگر $A = [2, 6]$ و $B = [3, 8]$ باشد، مساحت ناحیه متناظر با مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ بر روی نمودار دکارتی کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۴۳- مجموعه‌های $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ و $C = \{2, 3, 4\}$ مفروض‌اند. چند زوج مرتب وجود دارد که عضو هر دو مجموعه $A \times B$ و $B \times C$ باشد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۹

۱۴۴- اگر \mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی، $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ و $K = \{m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ باشند، کدام یک از زوج مرتب‌های زیر متعلق به مجموعه $(K - C) \times (N - K)$ می‌باشد؟

(۱) $(9, 4)$ (۲) $(15, 1)$ (۳) $(16, 12)$ (۴) $(25, 8)$

آمار و احتمال - گواه، مبانی احتمال - ۶ سوال

۱۵۵- اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فضای نمونه و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4\}$ دو پیشامد در S باشند، پیشامد $(A \cap B') \cup (A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $\{1, 2, 3, 4\}$ (۲) $\{1, 2, 4\}$ (۳) $\{3, 4\}$ (۴) $\{3\}$

۱۵۶- در آزمایش پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد فرد بودن مجموع دو تاس، B پیشامد فرد بودن حداقل یکی از تاس‌ها و C پیشامد رو شدن عدد ۴ در حداقل یکی از تاس‌ها باشد، کدام نادرست است؟

- (۱) $A \subseteq B$ (۲) $B \cap C \subseteq A$
(۳) $A \cap C = \emptyset$ (۴) $A \cap C = B \cap C$

۱۵۷- از مجموعه اعداد طبیعی $\{5, 10, 11, 12, \dots\}$ عددی را به تصادف انتخاب و ارقام آن را در هم ضرب می‌کنیم و از این حاصل ضرب‌ها یک مجموعه می‌سازیم. کدام عدد در فضای نمونه این آزمایش وجود ندارد؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۲۱ (۳) ۱۸ (۴) ۳۰

۱۵۸- پیشامدهای A ، B و C دوه‌دو ناسازگارند. اگر $\frac{1}{2}P(B \cup C) = \frac{3}{4}P(A \cup C) = \frac{1}{2}P(A \cup B)$ آن‌گاه حاصل $P(A \cup B \cup C)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{13}$ (۲) $\frac{13}{24}$ (۳) $\frac{6}{13}$ (۴) $\frac{13}{48}$

۱۵۹- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $P(A) = 0/6$ و $P(B) = 0/7$ و $P(A \cap B) = 0/2$ باشند، آن‌گاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $0/1$ (۲) $0/3$ (۳) $0/4$ (۴) $0/5$

۱۶۰- از مجموعه $\{500, \dots, 203, 202, 201\}$ ، یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، این عدد نه مضرب ۴ و نه مضرب ۵ می‌باشد؟

- (۱) $0/45$ (۲) $0/54$ (۳) $0/60$ (۴) $0/64$

آمار و احتمال - گواه، قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبرمجموعه‌ها) - ۴ سوال

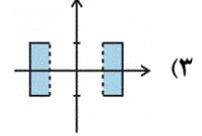
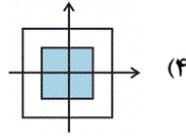
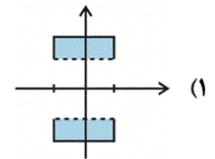
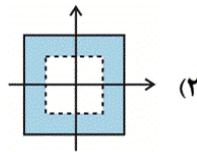
۱۵۱- اگر A و B ، دو مجموعه غیر تهی و $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$ ، آن‌گاه مجموعه $A - B$ برابر کدام است؟

- (۱) A (۲) \emptyset
(۳) $B - A$ (۴) $(A \cup B) - (A \cap B)$

۱۵۲- اگر $A = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 5\}$ و $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid |k - 3| \leq 2\}$ باشند، آن‌گاه مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۶

۱۵۳- اگر $A = [-2, 2]$ و $B = [-1, 1]$ ، آن‌گاه نمودار $A \times B - B \times A$ کدام است؟



۱۵۴- اگر $A \times B$ و $A \times C$ به ترتیب دارای ۸ و ۱۲ عضو و تعداد اعضای A کمتر از B و C باشد، آن‌گاه تعداد اعضای $B \times C$ کدام می‌تواند باشد؟

۳۶ (۴)

۴۸ (۳)

۷۲ (۲)

۹۶ (۱)

۸۱-

(عمید معنوی)

دو عدد ۶ و ۱- در دامنه تابع قرار ندارند، پس $x = 6$ و $x = -1$ ریشه‌های مخرج ضابطه تابع هستند.

$$x = 6 \xrightarrow{\text{در مخرج}} 36 - (a^2 + 1)6 - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 30 - 6a^2$$

$$x = -1 \xrightarrow{\text{در مخرج}} 1 + (a^2 + 1) - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 + 2$$

$$30 - 6a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 6 \quad \text{بنابراین:}$$

$$a^2 + b^2 = 4 + 6 = 10 \quad \text{در نتیجه:}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

۸۲-

(مسعود درویشی)

با توجه به تعریف دامنه توابع رادیکالی داریم:

$$D_g = \{x \in D_f \mid 1 - f(x) \geq 0\} = \{x \in D_f \mid f(x) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 1\}$$

بنابراین باید مقادیری را بیابیم که $f(x) \leq 1$.

$$x < -1: f(x) = -1 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$-1 \leq x < 5: f(x) = -x \xrightarrow{-5 < -x \leq 1} f(x) \leq 1 \quad \checkmark$$

$$x \geq 5: f(x) = 3 \quad \times$$

بنابراین دامنه g برابر با $(-\infty, -1) \cup [-1, 5)$ می‌باشد؛ یعنی:

$$D_g = (-\infty, 5)$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۴۴ تا ۷۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۸۳

(عمید معنوی)

چون $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ ، پس $x = -2$ باید تنها جواب معادله درجهدوم $x^2 + ax + 4 = 0$ باشد، یعنی باید: $x^2 + ax + 4 = (x + 2)^2$

$$\Rightarrow x^2 + ax + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{bx + 2}{(x + 2)^2}$$

چون در صورت سؤال گفته شده است که دو تابع برابرند، پس:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{bx + 2}{(x + 2)^2} = \frac{c}{x + 2} \Rightarrow \frac{bx + 2}{x + 2} = \frac{c}{1}$$

$$\Rightarrow cx + 2c = bx + 2 \Rightarrow b = c, \quad 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow b = 1$$

در نتیجه $a + b + c = 6$.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵)

۴

۳✓

۲

۱

-۸۴

(علی کردی)

چون $0 < \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} < 1$ است، بنابراین $[\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}] = 0$ خواهد بود.

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > a \\ [\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}] + b & ; x < c \end{cases} = \begin{cases} 1 & ; x > a \\ b & ; x < c \end{cases}$$

۴

۳

۲

۱✓

در گزینه «۱» y تابعی بر حسب x است، زیرا:

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 1 + x^3 + x = 0$$

$$\Rightarrow (y+1)^3 = 1 - x^3 - x \Rightarrow y = \sqrt[3]{1 - x^3 - x} - 1$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۲»:

$$\xrightarrow[\text{مثلاً}]{x=4} y^2 + 2y = 3 \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1, y = -3$$

تابع نیست زیرا به ازای یک x ، دو y به دست آمده است.

گزینه «۳»:

$$\xrightarrow[\text{مثلاً}]{x=0} |y-1| = 1 \Rightarrow y-1 = \pm 1 \Rightarrow y = 2, y = 0$$

تابع نیست زیرا به ازای یک x ، دو y به دست آمده است.

گزینه «۴»:

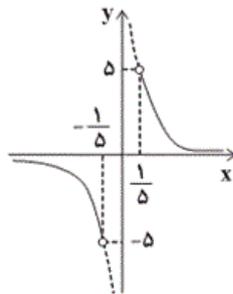
$$\xrightarrow[\text{مثلاً}]{x=1} |y| = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

تابع نیست زیرا به ازای یک x ، دو y به دست آمده است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۱ ✓
 ۲
 ۳
 ۴

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



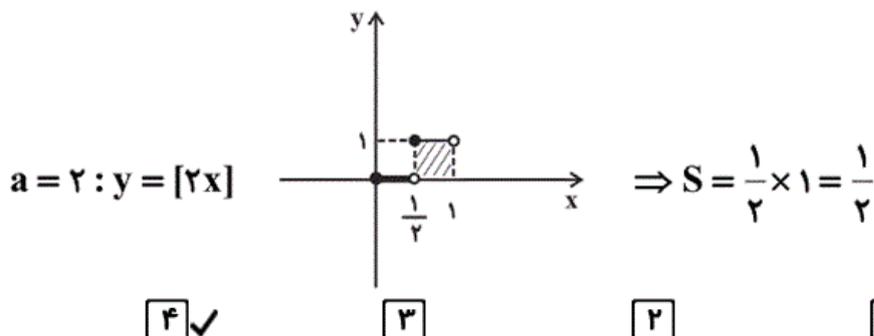
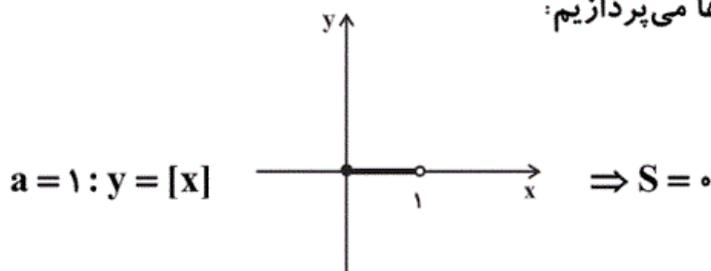
$$\Rightarrow R_f = (-5, 5) - \{0\}$$

برد این تابع شامل ۸ عدد صحیح ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ، و ± 4 است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰ و ۴۴ و ۴۵)

۱ ✓
 ۲
 ۳
 ۴

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



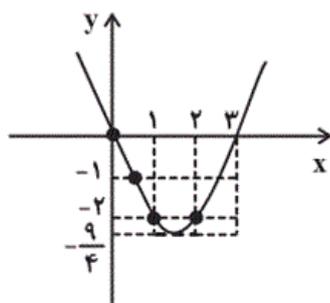
۴ ✓

۳

۲

۱

در شکل زیر نمودار تابع $y = x^2 - 3x$ رسم شده است. معادله $x^2 - 3x = x^2 - 3x$ متناظر است با مقادیر صحیح $x^2 - 3x$. با توجه به بازه $[0, 2]$ به ۴ جواب خواهیم رسید. دقت کنید به ازای $x = 0, x = 1, x = 2$ و عددی بین صفر و یک، مقدار $x^2 - 3x$ عدد صحیح خواهد بود.



(مسایان ۱- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شهبازی)

هر سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، به ازای $x \geq -\frac{b}{2a}$

یا $x \leq -\frac{b}{2a}$ یا هر محدوده‌ای که زیرمجموعه یکی از این دو محدوده

باشد یک‌به‌یک است. طول رأس این سهمی را حساب می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{4} = -3$$

تنها گزینه‌ای که شرط بالا را دارد گزینه «۳» است.

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شهبازی)

ضابطه وارون این تابع خطی را حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{3}{4}x - 6 \Rightarrow x = \frac{4}{3}y + 8 \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} y = \frac{4}{3}x + 8$$

$$\xrightarrow{y=0} 0 = \frac{4}{3}x + 8 \Rightarrow x = -6$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

۴ ✓

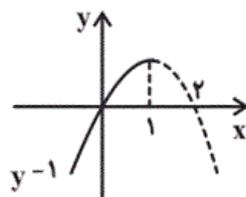
۳

۲

۱

$$\Rightarrow x = -y^2 + 2y \Rightarrow y^{-1} = -x^2 + 2x, \quad x \leq 1$$

نمودار y^{-1} از نواحی اول و سوم می‌گذرد.



(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۵۷ تا ۶۲)

۴

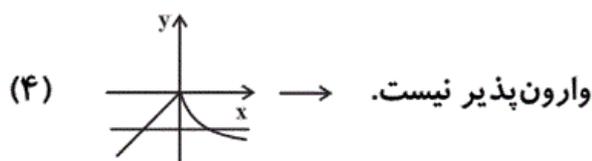
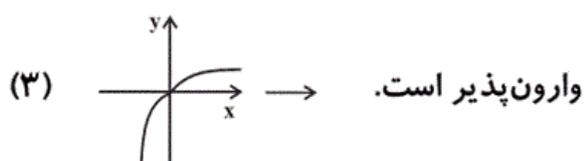
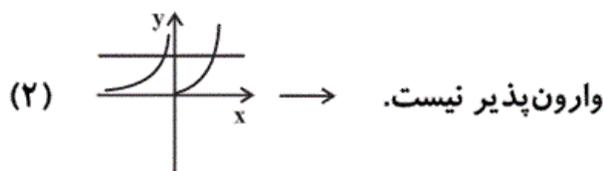
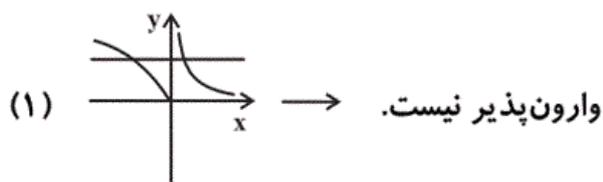
۳

۲

۱ ✓

(علی شهبازی)

نمودار همهٔ گزینه‌ها را رسم می‌کنیم. اگر خطی موازی محور x ها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر نیست.



(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸ و ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امین کریمی)

ضابطهٔ تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{2x+2}{ax+b} \Rightarrow axy + by = 2x+2$$

$$\Rightarrow axy - 2x = 2 - by$$

$$\Rightarrow x(ay - 2) = 2 - by \Rightarrow x = \frac{2 - by}{ay - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2 - bx}{ax - 2}$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow b = -2$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{2x-1}{-x+2} \Rightarrow -2x^2 + 3x + 2 = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

۹۵-

(سیرمسن نیری پور)

ممکن است f و g اعضای دیگری نیز داشته باشند اما از آنجا که دامنه $\frac{g}{f}$ روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف می‌شود فقط دامنه مشترکشان را در نظر می‌گیریم.

$$f = \{(-1, x_1), (0, x_2), (1, x_3), (2, x_4)\}$$

$$g = \{(-1, y_1), (0, y_2), (1, y_3), (2, y_4)\}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 2 \\ x_1 - y_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + y_2 = 7 \\ x_2 - y_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + y_3 = 0 \\ x_3 - y_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 + y_4 = -1 \\ x_4 - y_4 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = \{(-1, 0), (0, 3), (1, 2), (2, -4)\} \\ g = \{(-1, 2), (0, 4), (1, -2), (2, 3)\} \end{cases}$$

دامنه تابع $\frac{g}{f}$ اشتراک دامنه f و g است به جز عضوهایی که f را صفر می‌کنند. پس ۱- نباید عضو دامنه $\frac{g}{f}$ باشد.

$$D_{\frac{g}{f}} = \{0, 1, 2\}$$

= ۳ = مجموع اعضای دامنه

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

۹۶-

(سیرمسن نیری پور)

تابع $g(x) = f(4 - 2x)$ یک تابع مرکب است. برای تعیین دامنه این تابع باید x هایی را پیدا کرد که تابع $y = 4 - 2x$ در دامنه تابع f تعریف شود.

$$D_f : 6x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 6 \Rightarrow D_f = [0, 6]$$

$$\Rightarrow 0 \leq 4 - 2x \leq 6 \Rightarrow -4 \leq -2x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_g = [-1, 2]$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی کردی)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \leq 2 \mid \sqrt{4-2x} \in \{-2, -1, 2\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\}\}$$

$$\begin{cases} \sqrt{4-2x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 4-2x = 8 \Rightarrow x = -2 \\ \sqrt{4-2x} = \sqrt{6} \Rightarrow 4-2x = 6 \Rightarrow x = -1 \\ \sqrt{4-2x} = 2 \Rightarrow 4-2x = 4 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{0, -1, -2\}$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(-2, 0), (-1, -1), (0, 0)\}$$

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهردار ملوندی)

$$g(x) = 2x - 1 = t \Rightarrow x = \frac{t+1}{2}$$

$$f(t) = 8\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{t+1}{2}\right) + 6$$

$$\Rightarrow f(t) = 2t^2 + 4t + 2 - 3t - 3 + 6 \Rightarrow f(t) = 2t^2 + t + 5$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(3) = f(3) - g(3) = (18 + 3 + 5) - (6 - 1) = 21$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امید غلامی)

با توجه به رابطه داده شده داریم:

$$(۱) f^{-1}(1) = g(0) \Rightarrow (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(f^{-1}(1)) = 1$$

$$(۲) (g^{-1} \circ f^{-1})(1) = g^{-1}(f^{-1}(1)) = g^{-1}(g(0)) = 0$$

$$\xrightarrow{(۱), (۲)} (f \circ g)(0) + (g^{-1} \circ f^{-1})(1) = 1$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۵۴ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سیدحسین نیری پور)

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad ; \quad D_{f^{-1} \circ f} = D_f$$

$$D_f : x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$1 - \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 1 \Rightarrow x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 3$$

$$(x \geq 2) \cap (x \leq 3) \Rightarrow D_f = [2, 3]$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳✓

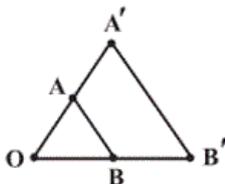
۲

۱

-۱۲۹

(معصومه اکبری صمدت)

در هر تبدیل طولی، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه با آن است ولی تبدیل طولی لزوماً شیب خط را حفظ نمی‌کند. همچنین به عنوان مثال نقض برای گزینه‌های «۲» و «۳»، تبدیلی را در نظر بگیرید که مطابق شکل به هر نقطه مانند A در صفحه، نقطه‌ای مانند A' در آن صفحه را نظیر می‌کند به گونه‌ای که نقطه A' روی امتداد پاره‌خط OA قرار داشته (O نقطه ثابتی در صفحه است) و OA' = ۲OA است.



تحت این تبدیل، اندازه زاویه و شیب خط‌ها ثابت می‌ماند.

($\hat{A}OB = \hat{A}'OB'$ و $m_{AB} = m_{A'B'}$) ولی این تبدیل طولی نیست ($AB \neq A'B'$).

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۴✓

۳

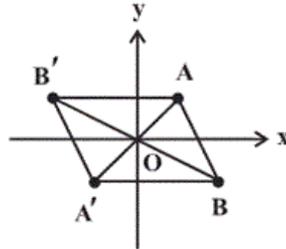
۲

۱

۱۳۰-

(امیر حسین ابومقبوب)

فرض کنید نقاط A' و B' به ترتیب قرینه نقاط A و B نسبت به مبدأ مختصات باشند. در این صورت $OA = OA'$ و $OB = OB'$ است، یعنی در چهارضلعی $ABA'B'$ قطرها منصف یکدیگرند، پس این چهارضلعی متوازی الاضلاع است و در نتیجه $AB = A'B'$ و $AB \parallel A'B'$ می باشد. از طرفی قرینه هر نقطه نسبت به مبدأ مختصات منحصر به فرد است و هر نقطه در صفحه تنها می تواند قرینه یک نقطه از آن صفحه نسبت به مبدأ مختصات باشد، بنابراین T یک تبدیل طولیا است که شیب خطها را ثابت نگه می دارد.



(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها- صفحه های ۳۴ تا ۳۷)

۴ ✓

۳

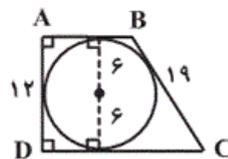
۲

۱

۱۲۱-

(امسان فیراللهی)

مطابق شکل طول ضلع AD (ساق قائم) برابر $12 = 2R$ است. از طرفی چهارضلعی $ABCD$ محیطی است، پس داریم:



$$AB + CD = AD + BC = 12 + 19 = 31$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{AB + CD}{2} \right) \times AD = \frac{31}{2} \times 12 = 186$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۲۲-

(سجاد عابد)

هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است. اگر دایره محیطی 10 ضلعی

منتظم را رسم کنیم، اندازه کمان بین هر دو رأس متوالی $36^\circ = \frac{360^\circ}{10}$ است.

بنابراین مطابق شکل، اندازه زاویه α برابر است با:



$$\alpha = \frac{\widehat{A_1A_9} + \widehat{A_2A_9}}{2}$$

$$= \frac{2 \times 36^\circ + 3 \times 36^\circ}{2} = 90^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه های ۲۸ و ۲۹)

۴

۳ ✓

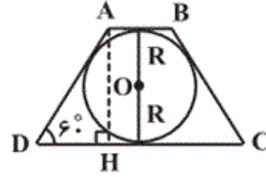
۲

۱

-۱۲۳

(معصومه اکبری صمدت)

مطابق شکل طول ارتفاع AH برابر $2R$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه AHD، ضلع AH روبه‌رو به زاویه 60° است، پس طول آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است. در نتیجه داریم:



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD \Rightarrow 2R = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$$

$$\Rightarrow AD = \frac{4}{\sqrt{3}} R = \frac{4\sqrt{3}}{3} R$$

با توجه به محیطی بودن چهارضلعی ABCD، رابطه $AB + CD = AD + BC$ بین اضلاع برقرار است، پس محیط چهارضلعی ABCD برابر است با:

$$\text{محیط } ABCD = (AB + CD) + (AD + BC)$$

$$= 2AD + 2AD = 4AD = \frac{16\sqrt{3}}{3} R$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۲۴

(رضا عباسی اصل)

طبق تمرین ۵ صفحه ۲۹ کتاب درسی داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

بنابراین با توجه به فرض سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r} = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{1}{2} \xrightarrow{2P=12} \frac{S}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = 3$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۲۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق تمرین ۵ صفحه ۳۰ کتاب درسی داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

بنابراین با فرض $r = \frac{3}{2}$ ، $h_a = 4$ و $h_b = 6$ می توان نوشت:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{5}{12} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow h_c = 4$$

با توجه به این که $h_a = h_c = 4$ است، پس مثلث متساوی الساقین می باشد. از طرفی دقت کنید در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، طول ارتفاع وارد بر وتر، کوچک تر از طول دو ارتفاع دیگر مثلث است، یعنی این مثلث نمی تواند قائم الزاویه باشد.

(هنر سه ۲- دایره - صفحه ۳۰)

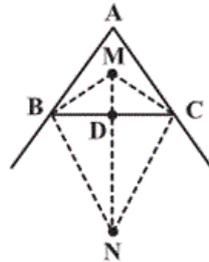
۴

۳

۲ ✓

۱

مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، نقطه هم‌رسی نیمسازهای زوایای داخلی آن مثلث و مرکز هر کدام از دایره‌های محاطی خارجی یک مثلث، نقطه هم‌رسی دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی رأس سوم آن مثلث است. از طرفی نیمساز داخلی و خارجی هر زاویه بر هم عمودند، پس مطابق شکل $\widehat{MBN} = \widehat{MCN} = 90^\circ$ است و در نتیجه چهارضلعی MBNC، یک چهارضلعی محاطی است. طبق روابط طولی در دایره محیط بر چهارضلعی MBNC داریم:



$$MD \times ND = BD \times CD$$

$$\Rightarrow 2 \times 6 = BD \times 4 \Rightarrow BD = 3$$

(هنر سه ۲- دایره - صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۴ ✓

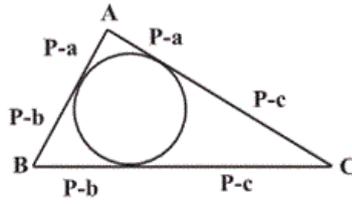
۳

۲

۱

(مسئله هجری)

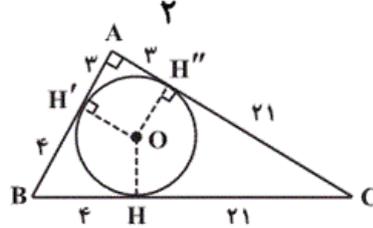
در مثلثی با طول اضلاع a ، b و c و محیط $2P$ ، طول قطعه‌های جدا شده توسط دایره محاطی داخلی به صورت زیر است:



اگر a طول وتر این مثلث باشد، آن‌گاه داریم:

$$a = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

$$P = \frac{7 + 24 + 25}{2} = 28$$



$$S = \frac{7 \times 24}{2} = 84$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{84}{28} = 3$$

واضح است که بیشترین فاصله نقطه O از رئوس مثلث ABC برابر است

$$\Delta OHC : OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{3^2 + 21^2} \quad \text{با } OC \text{ داریم:}$$

$$= 3\sqrt{1^2 + 7^2} = 3\sqrt{50} = 15\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۳۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(پرنیان عزیزیان)

هر دو n ضلعی منتظم با هم متشابه‌اند. اگر S و S' به ترتیب مساحت‌های n ضلعی منتظم محاط در دایره و n ضلعی منتظم محیط بر دایره باشند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{S' - S}{S'} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{نسبت اضلاع} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

از طرفی طول هر ضلع n ضلعی منتظم محاطی و محیطی یک دایره به

شعاع R به ترتیب از روابط $2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ و $2R \tan \frac{180^\circ}{n}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{2R \sin \frac{180^\circ}{n}}{2R \tan \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{180^\circ}{n} = 30^\circ \Rightarrow n = 6$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سیدمسین نیری پور)

ابتدا معادله خط BC را می‌نویسیم، سپس فاصله نقطه A از این خط یعنی طول ارتفاع وارد بر BC را به دست می‌آوریم:

$$m_{BC} = \frac{1 - (-1)}{-2 - 1} = -\frac{2}{3}$$

$$BC: y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 2) \Rightarrow 3y - 3 = -2x - 4 \Rightarrow 3y + 2x + 1 = 0$$

$$AH = \frac{|3(3) + 2(4) + 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

$$BC = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{\frac{18}{\sqrt{13}} \times \sqrt{13}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

(مسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

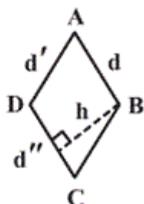
۴

۳ ✓

۲

۱

خطوط d و d'' موازیند، پس شکل به صورت زیر است:



$$\begin{cases} d : 2x - y = 6 \\ d' : y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 8, y = 10 \Rightarrow A(8, 10)$$

$$\begin{cases} d' : y - x = 2 \\ d'' : 2y - 4x = -4 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 6 \Rightarrow D(4, 6)$$

طول ضلع لوزی : $AD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$$\begin{cases} d : 2x - y - 6 = 0 \\ d'' : 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ارتفاع : } h = \frac{|-2 - (-6)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

مساحت لوزی = $4\sqrt{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{10}}{5}$

(مسایان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

با جایگذاری دو مقدار دلخواه m ، معادله دو تا از خط‌ها را به دست می‌آوریم و سپس محل تقاطع دو خط یعنی نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \quad (*) \\ m = 0 \Rightarrow x + y = 3 \xrightarrow{(*)} x = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2, 1)$$

خط d از نقطه $(3, -1)$ نیز می‌گذرد. داریم:

شیب خط $d = \frac{1 - (-1)}{2 - 3} = -2$

$\Rightarrow d$ معادله خط : $y - 1 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 5$

عرض از مبدأ ۵ است.

(مسایان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

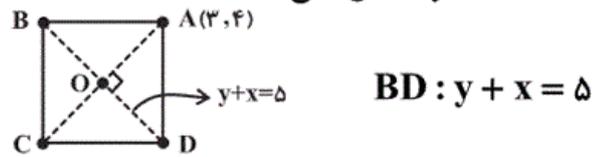
۴ ✓

۳

۲

۱

(سیریسین نیری پور)

نقطه (۳, ۴) در معادله خط $y + x = 5$ صدق نمی کند.

شیب AC قرینه و معکوس شیب BD است که برابر ۱ می شود.

$$AC: y - 4 = (x - 3) \Rightarrow y = x + 1$$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y + x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow O(2, 3)$$

نقطه O وسط نقاط A و C است. پس:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = x_O \Rightarrow \frac{3 + x_C}{2} = 2 \Rightarrow x_C = 1 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = y_O \Rightarrow \frac{4 + y_C}{2} = 3 \Rightarrow y_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(1, 2)$$

قطر این مربع برابر است با:

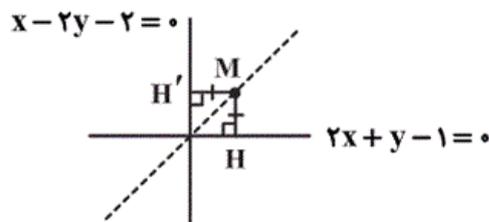
$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

۴

۳✓

۲

۱



هر دو خط متقاطع یک نیمساز داخلی و یک نیمساز خارجی دارند و می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز دو خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. پس فرض می‌کنیم $M(x, y)$ روی نیمساز دو خط متقاطع باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|x - 2y - 2|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow |2x + y - 1| = |x - 2y - 2| \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = x - 2y - 2 \\ 2x + y - 1 = -x + 2y + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & m_1 = -\frac{1}{3} < 0 \quad \times \\ 3x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3x - 3 & m_2 = 3 > 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

پس خط مطلوب $y = 3x - 3$ است و عرض از مبدأ آن -3 است.

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا باید دامنه توابع برابر باشد:

$$D_g : \mathbb{R} - \{\pm a\}, \quad D_f : \mathbb{R} - \{-a\}$$

که برای برابر بودن دامنه‌ها، a باید صفر باشد.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - (c-1)x + 6 - b}{x} \\ g(x) = \frac{x^3 + bx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 - (c-1)x + 6 - b}{x} = \frac{x^3 + bx}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^4 - (c-1)x^3 + (6-b)x^2 = x^4 + bx^2 \Rightarrow \begin{cases} c-1 = 0 \Rightarrow c = 1 \\ 6-b = b \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0 + 3 + 1 = 4$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عمید معنوی)

در گزینه «۱» y تابعی بر حسب x است، زیرا:

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 1 + x^3 + x = 0$$

$$\Rightarrow (y+1)^3 = 1 - x^3 - x \Rightarrow y = \sqrt[3]{1 - x^3 - x} - 1$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۲»:

$$\xrightarrow[\text{مثلاً}]{x=4} y^2 + 2y = 3 \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1, y = -3$$

تابع نیست زیرا به ازای یک x ، دو y به دست آمده است.

گزینه «۳»:

$$\xrightarrow[\text{مثلاً}]{x=0} |y-1|=1 \Rightarrow y-1 = \pm 1 \Rightarrow y = 2, y = 0$$

تابع نیست زیرا به ازای یک x ، دو y به دست آمده است.

گزینه «۴»:

$$\xrightarrow[\text{مثلاً}]{x=1} |y|=1 \rightarrow y = \pm 1$$

تابع نیست زیرا به ازای یک x ، دو y به دست آمده است.

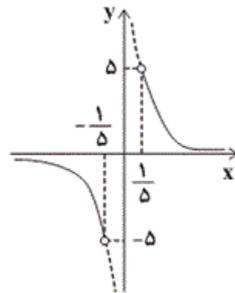
(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓



$$\Rightarrow R_f = (-5, 5) - \{0\}$$

برد این تابع شامل ۸ عدد صحیح $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ است.

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰ و ۴۴ و ۴۵)

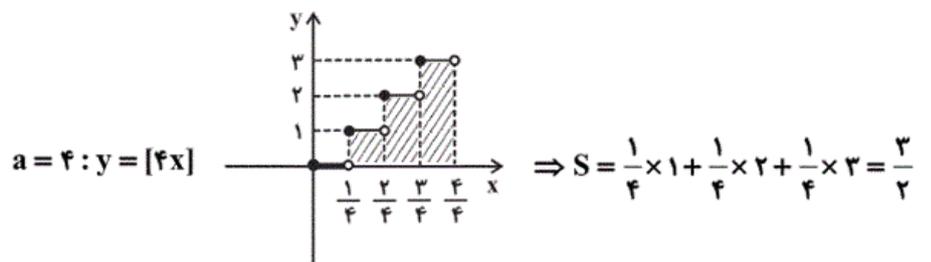
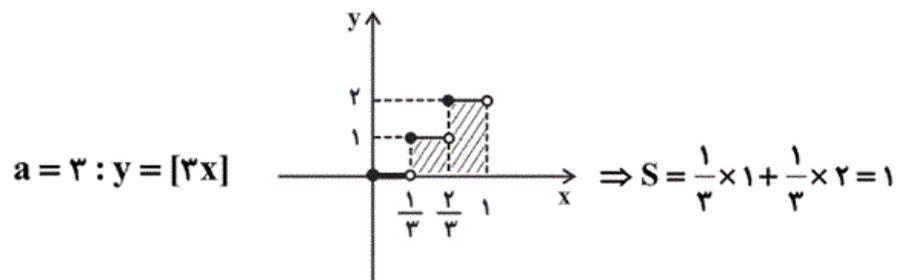
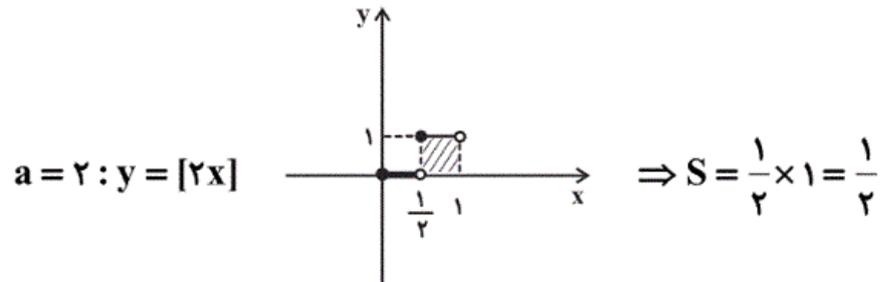
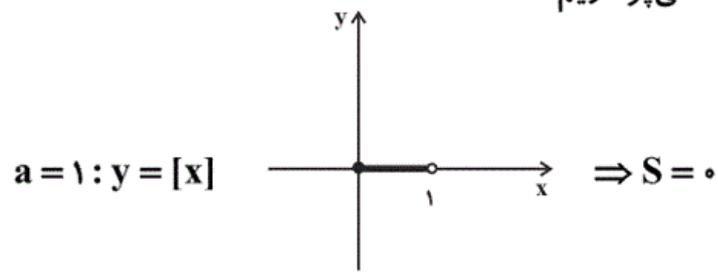
۴

۳

۲

۱ ✓

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

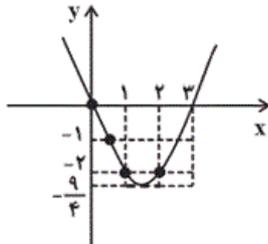
۳

۲

۱

(امیر غلامی)

در شکل زیر نمودار تابع $y = x^2 - 3x$ رسم شده است. معادله $[x^2 - 3x] = x^2 - 3x$ متناظر است با مقادیر صحیح $x^2 - 3x$. با توجه به بازه $[0, 2]$ به ۴ جواب خواهیم رسید. دقت کنید به ازای $x=0$ ، $x=1$ ، $x=2$ و عددی بین صفر و یک، مقدار $x^2 - 3x$ عدد صحیح خواهد بود.



(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳✓

۲

۱

(سید حسین نیری پور)

$$\left[x + \frac{1}{4}\right] + \left[x - \frac{11}{4}\right] = 3 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{4}\right] + \left[x + \frac{1}{4} - \frac{12}{4}\right] = 3$$

$$\left[x + \frac{1}{4}\right] + \left[x + \frac{1}{4} - 3\right] = 3 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{4}\right] + \left[x + \frac{1}{4}\right] - 3 = 3$$

$$\Rightarrow 2\left[x + \frac{1}{4}\right] = 6 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{4}\right] = 3$$

$$3 \leq x + \frac{1}{4} < 4 \Rightarrow 3 - \frac{1}{4} \leq x < 4 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{11}{4} \leq x < \frac{15}{4}$$

جواب معادله، بازه $\left[\frac{11}{4}, \frac{15}{4}\right)$ است. پس $b = \frac{15}{4}$ و $a = \frac{11}{4}$ است.

$$\Rightarrow b - a = \frac{15}{4} - \frac{11}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳

۲✓

۱

(ممید معنوی)

دو عدد ۶ و ۱- در دامنه تابع قرار ندارند، پس $x = 6$ و $x = -1$ ریشه‌های مخرج ضابطه تابع هستند.

$$x = 6 \xrightarrow{\text{در مخرج}} 36 - (a^2 + 1)6 - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 30 - 6a^2$$

$$x = -1 \xrightarrow{\text{در مخرج}} 1 + (a^2 + 1) - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 + 2$$

$$30 - 6a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 6 \quad \text{بنابراین:}$$

$$a^2 + b^2 = 4 + 6 = 10 \quad \text{در نتیجه:}$$

(مسایان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$-1 \leq x < 5 : f(x) = -x \xrightarrow{-5 < -x \leq 1} f(x) \leq 1 \quad \checkmark$$

$$x \geq 5 : f(x) = x$$

بنابراین دامنه g برابر با $(-\infty, -1) \cup [-1, 5)$ می‌باشد؛ یعنی:

$$D_g = (-\infty, 5)$$

(مسایان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سینا مهرپور)

می‌دانیم دامنه تابع $f(x)$ ، مجموعه مقادیری از x می‌باشد که به ازای آن‌ها $ax^2 + bx + c \geq 0$ باشد. لذا با توجه به فرض سؤال مبنی بر این که دامنه تابع بازه $[-2, 2]$ می‌باشد، جدول تعیین علامت تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به شکل زیر خواهد بود:

x	x_1	x_2
علامت	موافق	مخالف
علامت y	a	a

مجموعه جواب نامعادله $ax^2 + bx + c \geq 0$ برابر $[-2, 2]$ می‌باشد. از

$$f(0) = 2 \Rightarrow \sqrt{a(0)^2 + b(0) + c} = \sqrt{c} = 2 \Rightarrow c = 4 \quad \text{طرفی داریم:}$$

لذا نتیجه می‌گیریم که:

$$\left. \begin{aligned} f(-2) = 0 &\Rightarrow 4a - 2b + 4 = 0 \\ f(2) = 0 &\Rightarrow 4a + 2b + 4 = 0 \\ a - b &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1, b = 0$$

بنابراین:

(مسایان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۱۵

(علی شهبازی)

هر سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، به ازای $x \geq -\frac{b}{2a}$

یا $x \leq -\frac{b}{2a}$ یا هر محدوده‌ای که زیرمجموعه‌ی یکی از این دو محدوده

باشد یک‌به‌یک است. طول راس این سهمی را حساب می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{4} = -3$$

تنها گزینه‌ای که شرط بالا را دارد گزینه «۳» است.

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۱۶

(کاظم ابلالی)

ابتدا توجه کنید که از $f^{-1}(2) = -3$ نتیجه می‌شود، $f(-3) = 2$.

$$f(-3) = \frac{a+1}{-3+2} - 1 = 2 \Rightarrow -a-1 = 3 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین:

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۵۷)

۴ ✓

۳

۲

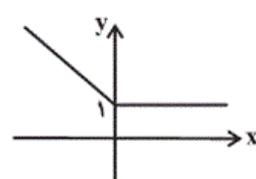
۱

-۱۱۷

(ابراهیم نبغی)

شرط آن که تابع وارون‌پذیر باشد آن است که یک‌به‌یک باشد، برای بررسی

یک به یک بودن نمودار توابع را رسم می‌کنیم:

$$y = |x| + 1 - x = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ -2x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$


یک‌به‌یک نیست.

$$y = 1 - 3|x| + x = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \geq 0 \\ 4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$


یک‌به‌یک نیست.

۴ ✓

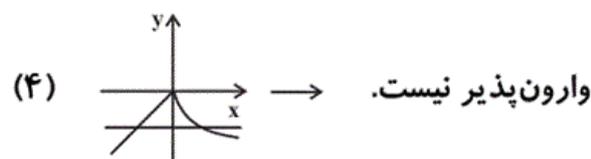
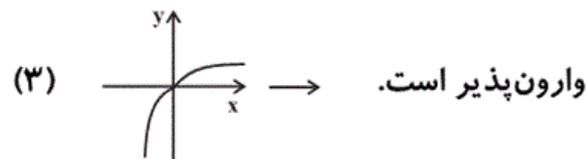
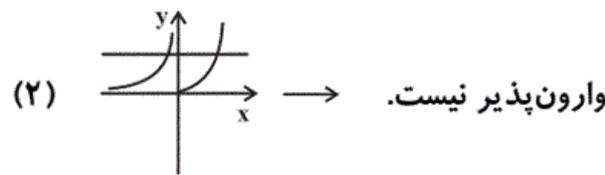
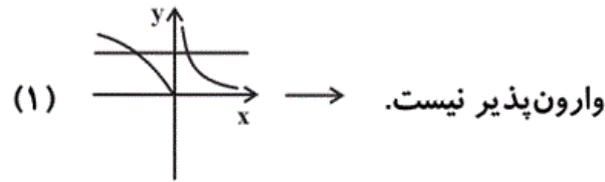
۳

۲

۱

(علی شهبازی)

نمودار همه گزینه‌ها را رسم می‌کنیم. اگر خطی موازی محور X ها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر نیست.



(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸ و ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(غریزون ساعتی)

$$f \text{ تابع است} \Rightarrow \begin{cases} (4, 2) \in f \\ (4, a^2 - a) \in f \end{cases} \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\text{اگر } a = 2 \text{ باشد: } \begin{cases} (4, 2) \in f \\ (b, 2) \in f \end{cases} \Rightarrow b = 4$$

اگر $a = -1$ ، آن‌گاه $f = \{(4, 2), (-1, 5), (4, 2), (4, 2), (-1, 4)\}$ تابع نخواهد بود، بنابراین $a = 2$ صحیح است و $(a, b) = (2, 4)$ می‌باشد.

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۲۰-

(همید علیزاده)

اگر وارون تابع f ، خود یک تابع باشد به این معنی است که تابع f باید یک به یک باشد که تنها تابع گزینه «۴» یک به یک است.

$$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(1, a), (3, b), (2, c)\}$$

توجه کنید که گزینه «۳» تابع نیست.

(مسئله ۱- تابع - صفحه های ۵۴ تا ۵۷)

۴ ✓

۳

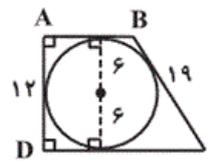
۲

۱

۱۳۱-

(اسمان فیروزی)

مطابق شکل طول ضلع AD (ساق قائم) برابر $12R = 12$ است. از طرفی چهارضلعی $ABCD$ محیطی است، پس داریم:



$$AB + CD = AD + BC = 12 + 19 = 31$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) \times AD = \frac{31}{2} \times 12 = 186$$

(هندسه ۲- دایره - صفحه های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۳۲-

(سجاد عابد)

هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است. اگر دایره محیطی 10

ضلعی منتظم را رسم کنیم، اندازه کمان بین هر دو رأس متوالی 36° است.

بنابراین مطابق شکل، اندازه زاویه α برابر است با:



$$\alpha = \frac{\widehat{A_1A_3} + \widehat{A_2A_5}}{2}$$

$$= \frac{2 \times 36^\circ + 3 \times 36^\circ}{2} = 90^\circ$$

(هندسه ۲- دایره - صفحه های ۲۸ و ۲۹)

۴

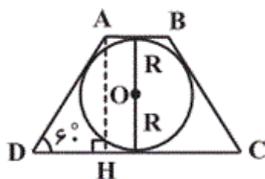
۳ ✓

۲

۱

(معصومه اکبری صفت)

مطابق شکل طول ارتفاع AH برابر $2R$ است. از طرفی در مثلث قائم الزاویه AHD، ضلع AH روبرو به زاویه 60° است، پس طول آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است. در نتیجه داریم:



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD \Rightarrow 2R = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$$

$$\Rightarrow AD = \frac{4}{\sqrt{3}} R = \frac{4\sqrt{3}}{3} R$$

با توجه به محیطی بودن چهارضلعی ABCD، رابطه $AB + CD = AD + BC$ بین اضلاع برقرار است، پس محیط چهارضلعی ABCD برابر است با:

$$\text{محیط } ABCD = (AB + CD) + (AD + BC)$$

$$= 2AD + 2AD = 4AD = \frac{16\sqrt{3}}{3} R$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(رضا عباسی اصل)

طبق تمرین ۵ صفحه ۲۹ کتاب درسی داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

بنابراین با توجه به فرض سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r} = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{1}{2} \xrightarrow{2P=12} \frac{S}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = 3$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۲۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مجموعه اکبری صحت)

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \quad \text{طبق تمرین ۵ صفحه ۳۰ کتاب درسی داریم:}$$

بنابراین با فرض $r = \frac{3}{2}$ ، $h_a = 4$ و $h_b = 6$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{5}{12} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} \Rightarrow h_c = 4$$

با توجه به این که $h_a = h_c = 4$ است، پس مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد. از طرفی دقت کنید در یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، طول ارتفاع وارد بر وتر، کوچک‌تر از طول دو ارتفاع دیگر مثلث است که با توجه به فرض مسئله امکان‌پذیر نیست.

(هنر سه ۲- دایره - صفحه ۳۰)

۴

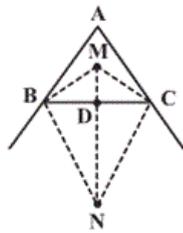
۳

۲ ✓

۱

(سارا فسروی)

مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، نقطه هم‌رسی نیمسازهای زوایای داخلی آن مثلث و مرکز هر کدام از دایره‌های محاطی خارجی یک مثلث، نقطه هم‌رسی دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی رأس سوم آن مثلث است. از طرفی نیمساز داخلی و خارجی هر زاویه بر هم عمودند، پس مطابق شکل $\widehat{MBN} = \widehat{MCN} = 90^\circ$ است و در نتیجه چهارضلعی MBNC، یک چهارضلعی محاطی است. طبق روابط طولی در دایره داریم: $MD \times ND = BD \times CD \Rightarrow 2 \times 6 = BD \times 4 \Rightarrow BD = 3$



(هنر سه ۲- دایره - صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۴ ✓

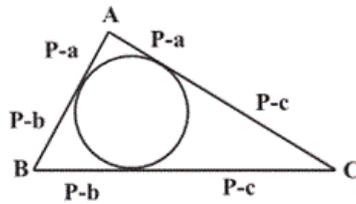
۳

۲

۱

(معمد هپری)

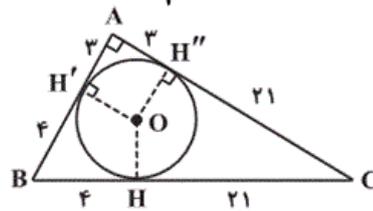
در مثلثی با طول اضلاع a ، b و c و محیط $۲P$ ، طول قطعه‌های جدا شده توسط دایره محاطی داخلی به صورت زیر است:



اگر a طول وتر این مثلث باشد، آن‌گاه داریم:

$$a = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

$$P = \frac{7 + 24 + 25}{2} = 28$$



$$S = \frac{7 \times 24}{2} = 84$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{84}{28} = 3$$

واضح است که بیشترین فاصله نقطه O از رئوس مثلث ABC برابر است

$$\Delta OHC : OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{3^2 + 21^2} \quad \text{با } OC \text{ داریم:}$$

$$= 3\sqrt{1^2 + 7^2} = 3\sqrt{50} = 15\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۳۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(پرنیان عزیزیان)

هر دو n ضلعی منتظم با هم متشابه‌اند. اگر S و S' به ترتیب مساحت‌های n ضلعی منتظم محاط در دایره و n ضلعی منتظم محیط بر دایره باشند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{S' - S}{S'} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{نسبت اضلاع} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

از طرفی طول هر ضلع n ضلعی منتظم محاطی و محیطی یک دایره به

شعاع R به ترتیب از روابط $2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ و $2R \tan \frac{180^\circ}{n}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{2R \sin \frac{180^\circ}{n}}{2R \tan \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{180^\circ}{n} = 30^\circ \Rightarrow n = 6$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(معمومه اکبری صمدت)

طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج یک دایره بر آن دایره برابر یکدیگر است، بنابراین با فرض $DP = a$ و $EP = b$ داریم:

$$ABCDE \text{ محیط} = (AM + AQ) + (BM + BN)$$

$$+ (CN + CO) + (DO + DP) + (EP + EQ)$$

$$= 2AQ + 2BM + 2CN + 2DP + 2EP$$

$$\Rightarrow 31 = 2(2 + 4 + 3/5 + a + b) \Rightarrow 31 = 19 + 2(a + b)$$

$$\Rightarrow 2(a + b) = 12 \Rightarrow a + b = 6 \Rightarrow DE = 6$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

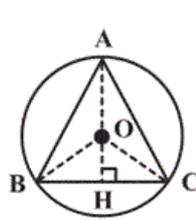
(مسئله هفتم)

اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر a باشد، آن گاه شعاع دایره محاطی خارجی آن برابر است با:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

از طرفی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، عمودمنصف‌های اضلاع همان میانه‌های مثلث هستند، پس مرکز دایره محاطی مثلث، همان نقطه هم‌رسی میانه‌هاست و در نتیجه داریم:

$$R = AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



$$\frac{r_a}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{3}{2} = 1.5$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(نرا صالح پور)

به هر عضو فضای نمونه یک «برآمد» می‌گویند و پیشامد زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه است. برای بررسی درآمد کارمندان شهرداری باید از علم آمار کمک بگیریم چون با یک جامعه نامعلوم روبه‌رو هستیم. علم احتمال، بررسی یک نمونه «نامعلوم» از یک جامعه «معلوم» است.

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۴ ✓

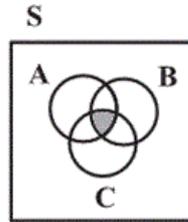
۳

۲

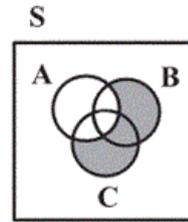
۱

(علی ساوپی)

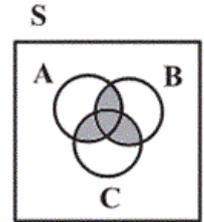
پیشامد آن که A و B با هم رخ دهند یا A و C با هم رخ دهند، همان پیشامد $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ است که دقیقاً معادل قسمت هاشورخورده در نمودار صورت سوال است. نمودار ون معادل سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:



گزینه «۲»



گزینه «۳»



گزینه «۴»

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲

۱

(امیر حسین ابومحبوب)

با توجه به قوانین جبر مجموعه‌ها و قضایای احتمال داریم:

$$P(A' \cup B') - P(A' \cap B) = P[(A \cap B)'] - P(B - A)$$

$$= (1 - P(A \cap B)) - (P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A \cap B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(B) = P(B')$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۴

۳

۲

۱

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ باشند که اعضای آن‌ها به ترتیب بر ۳ و ۷ بخش پذیرند، آن گاه احتمال خواسته شده در مسئله، برابر $P(A - B) + P(B - A)$ است. حال داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{50}{3}}{50} = \frac{16}{50} \quad P(B) = \frac{\binom{50}{7}}{50} = \frac{7}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{50}{21}}{50} = \frac{2}{50}$$

$$P(A - B) + P(B - A) = (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B))$$

□۴

□۳

□۲

□۱✓

گزینه «۱»: مجموع دو عدد انتخابی در صورتی زوج است که هر دو زوج

$$n(A) = \binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 10 + 6 = 16 \quad \text{یا هر دو فرد باشند:}$$

گزینه «۲»: حاصل ضرب دو عدد انتخابی در صورتی بر ۳ بخش پذیر است که یا هر دو عدد انتخابی مضرب ۳ باشند و یا یکی مضرب ۳ بوده و

$$n(B) = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} \binom{6}{1} = 3 + 18 = 21 \quad \text{دیگری مضرب ۳ نباشد:}$$

گزینه «۳»: مجموع دو عدد انتخابی در صورتی فرد است که یکی فرد و

$$n(C) = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 4 = 20 \quad \text{دیگری زوج باشد:}$$

گزینه «۴»: اختلاف دو عدد انتخابی در صورتی کوچک‌تر از ۲ است که دو عدد انتخابی دو عدد متوالی باشند:

$$D = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5),$$

$$(5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9)\} \Rightarrow n(D) = 8$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

□۴

□۳

□۲✓

□۱

-۱۵۰

(امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا اعضای پیشامدهای A ، B و C و سپس پیشامدهای $A - B$ ،
 $C - A$ و $B - C$ را می‌نویسیم:

$$A = \{(د، پ، د)، (د، پ، پ)، (د، د، د)، (د، د، پ)\}$$

$$B = \{(د، د، پ)، (د، پ، د)، (د، د، د)\}$$

$$C = \{(د، د، پ)، (د، پ، پ)، (پ، د، پ)\}$$

$$A - B = \{(پ، د، پ)\}$$

$$C - A = \{(د، پ، پ)\}$$

$$B - C = \{(د، د، د)، (د، پ، د)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود اشتراک پیشامدهای $A - B$ و C و نیز
 اشتراک پیشامدهای $B - C$ و A ناتهی است ولی اشتراک
 پیشامدهای $C - A$ و B تهی بوده و این دو پیشامد ناسازگار هستند.

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۴۱

(احسان فیراللهی)

$$A = \{1\} \Rightarrow A^2 = A \times A = \{(1, 1)\}$$

بنابراین نمودار مختصاتی A^2 ، فقط شامل نقطه $(1, 1)$ است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

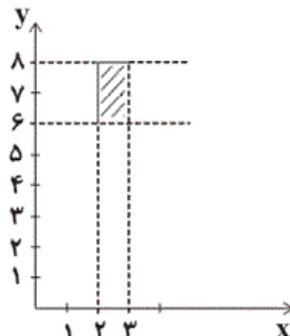
-۱۴۲

(علی ارجمند)

با توجه به تعریف دو مجموعه A و B داریم:

$$A - B = [2, 3] \text{ , } B - A = (6, 8]$$

نمودار ضرب دکارتی $(A - B) \times (B - A)$ معادل ناحیه هاشورخورده
 در شکل مقابل است که مستطیلی به مساحت ۲ می‌باشد.



(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۴۳-

(مرتفی فویم علوی)

اگر زوج مرتب (x, y) به هر دو مجموعه $A \times B$ و $B \times C$ تعلق داشته باشد، آن گاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} (x, y) \in A \times B &\Rightarrow x \in A, y \in B \\ (x, y) \in B \times C &\Rightarrow x \in B, y \in C \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B, y \in B \cap C \Rightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (B \cap C)$$

$$A \cap B = \{1, 2\}, B \cap C = \{2, 3\}$$

$$n[(A \cap B) \times (B \cap C)] = n(A \cap B) \times n(B \cap C) = 2 \times 2 = 4$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۴۴-

(مرتفی فویم علوی)

اعداد طبیعی مربع کاملی که زوج نباشند: $K - C$

اعداد طبیعی که مربع کامل نباشند: $N - K$

از این‌رو زوج مرتب $(8, 25)$ عضو مجموعه $(K - C) \times (N - K)$ می‌باشد، چرا که ۲۵ عددی مربع کامل و غیرزوج بوده و ۸ نیز مربع کامل نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: $(4, 9) \Rightarrow$ ۴ مربع کامل است

گزینه «۲»: $(1, 15) \Rightarrow$ ۱۵ مربع کامل غیرزوج نیست

گزینه «۳»: $(12, 16) \Rightarrow$ ۱۶ مربع کامل غیرزوج نیست

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

روش اول: با توجه به صورت سؤال، داریم:

$$B = \{3, 4\} \rightarrow B' = S - B = \{1, 2\}$$

در نتیجه:

$$A \cap B' = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\} \rightarrow (A \cap B')' = \{3, 4\}$$

$$\rightarrow (A \cap B')' \cup (A \cap B') = \{3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

روش دوم:

نکته: اگر A پیشامدی در فضای S باشد، آن گاه $A \cup A' = S$.

با توجه به نکته بالا، داریم: $(A \cap B')' \cup (A \cap B') = S$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا پیشامدها را توصیف می‌کنیم:

$A =$ (ف, ز) یا (ز, ف) \rightarrow مجموع دو تاس فرد باشد

$B =$ (ف, ف) یا (ف, ز) یا (ز, ف) \rightarrow حداقل یکی از تاس‌ها فرد باشد

$C =$ حداقل یکی از تاس‌ها ۴ باشد $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (۴, ۱), \dots, (۴, ۶) \\ (۱, ۴), \dots, (۶, ۴) \end{array} \right\}$

گزینه «۱»: حالت‌های مربوط به پیشامد A ، همگی در B وجود دارند.

بنابراین $A \subseteq B$.

گزینه «۲»:

$$B \cap C = \{(۴, ۱), (۴, ۳), (۴, ۵), (۱, ۴), (۳, ۴), (۵, ۴)\}$$

در تمامی این زوج‌های مرتب، یکی از مؤلفه‌ها زوج و دیگری فرد است در

نتیجه: $B \cap C \subseteq A$.

گزینه «۳»: زوج مرتب $(۴, ۱)$ را در نظر بگیرید. این زوج مرتب در C

وجود دارد و چون A شامل زوج‌های مرتبی به شکل (ف, ز) است، زوج

مرتب $(۴, ۱)$ در A هم هست. بنابراین: $A \cap C \neq \emptyset$.

گزینه «۴»: توجه کنید که:

$$A \cap C = \{(۴, ۱), (۴, ۳), (۴, ۵), (۱, ۴), (۳, ۴), (۵, ۴)\}$$

و این همان $B \cap C$ است که در گزینه «۲» به دست آوردیم.

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

عددهای ۳۲، ۲۱ و ۱۸ به ترتیب از حاصل ضرب ارقام $۴۸ (۴ \times ۸ = ۳۲)$ ،

$۳۷ (۳ \times ۷ = ۲۱)$ و $۲۹ (۲ \times ۹ = ۱۸)$ ساخته می‌شوند، پس در فضای

نمونه این آزمایش وجود دارند، ولی هیچ عدد دو رقمی از ۱۰ تا ۵۰

وجود ندارد که حاصل ضرب ارقام آن ۳۰ باشد.

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left. \begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{1}{2} = P(A) + P(B) \\ P(A \cup C) &= \frac{1}{4} = P(A) + P(C) \\ P(B \cup C) &= \frac{1}{3} = P(B) + P(C) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 2P(A) + 2P(B) + 2P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = \frac{13}{24} \Rightarrow P(A \cup B \cup C) = \frac{13}{24}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۴

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

-۱۵۹

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/6 - 0/2 = 0/4$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0/3$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

$$S = \{201, 202, \dots, 500\}$$

A و B را زیرمجموعه‌هایی از S در نظر می‌گیریم که اعضای آن به ترتیب بر ۴ و ۵ بخش پذیرند. داریم:

$$n(A) = \left[\frac{500}{4} \right] - \left[\frac{200}{4} \right] = 125 - 50 = 75$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{75}{300}$$

$$n(B) = \left[\frac{500}{5} \right] - \left[\frac{200}{5} \right] = 100 - 40 = 60$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{300}$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{500}{20} \right] - \left[\frac{200}{20} \right] = 25 - 10 = 15$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{15}{300}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - \left(\frac{75}{300} + \frac{60}{300} - \frac{15}{300} \right) = \frac{180}{300} = \frac{3}{5} = 0.6$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴

۳✓

۲

۱

(کتاب آبی)

-۱۵۱

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset \Rightarrow (A \cap B)^2 = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

یعنی دو مجموعه A و B، جدا از هم هستند و در نتیجه $A - B = A$ است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱✓

طبق تعریف دو مجموعه A و B داریم:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned} \Rightarrow A \cap B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow |A \cap B| = 3$$

$$|(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2 = 3^2 = 9$$

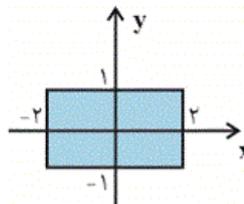
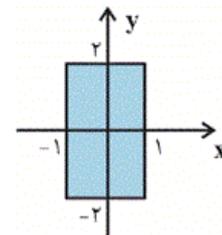
(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

 $A \times B$  $B \times A$

بنابراین نمودار $(A \times B) - (B \times A)$ ، معادل نمودار گزینه «۳» است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$|A \times B| = 8 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |B| = 8 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} |A| = 2 \\ |B| = 4 \end{cases}$$

$$|A \times C| = 12 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |C| = 12 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} |A| = 2 \\ |C| = 6 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} |A| = 3 \\ |C| = 4 \end{cases}$$

بنابراین فقط $|A| = 1$ یا $|A| = 2$ امکان‌پذیر است و در نتیجه تعداد اعضای B، ۴ یا ۸ و تعداد اعضای C، ۶ یا ۱۲ است. پس $|B \times C|$ یکی از دو عدد $24 = 4 \times 6$ یا $96 = 8 \times 12$ است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱ ✓