

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۱۰۱- در نقطه‌ای با کدام طول، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = x^3 + 3x$ با آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 1]$ برابر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

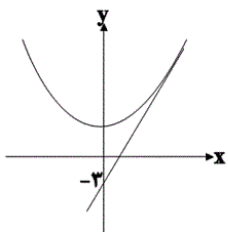
۱۰۲- کدام تابع در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است؟ ([] : جزء صحیح)

- (۱) $f(x) = |\sin x|$ (۲) $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (۳) $u(x) = x[x]$ (۴) $v(x) = x^2[x]$

۱۰۳- تابع با ضابطه $f(x) = |ax + 2x^2|$ در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر نیست. حاصل $f'(1/5)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰۴- در شکل زیر خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ رسم شده است. شیب این خط مماس کدام است؟

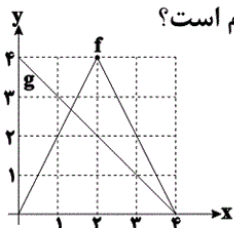


- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۰۵- مساحت ناحیه محدود به خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=1$ واقع بر آن و محورهای مختصات کدام است؟

- (۱) $2/4$ (۲) $2/45$ (۳) $2/5$ (۴) $2/55$

۱۰۶- نمودار توابع f و g در شکل روبه‌رو، نشان داده شده‌اند. مشتق تابع $h(x) = \sqrt{f(g(x))}$ در $x=1$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۰۷- تابع f در نقطه $(1, 2)$ واقع بر آن مشتق پذیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{x-1} = \frac{1}{3}$ ، آنگاه مشتق تابع $y = \frac{1}{f(1-2x)}$ در $x=0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $-\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{18}$

۱۰۸- اگر $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ ، آنگاه مشتق تابع $f \cdot g - f'$ در $x=1$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) -۲۰ (۳) -۲۸ (۴) ۲۸

۱۰۹- تابع $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - x + 2$ در بازه (a, b) نزولی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

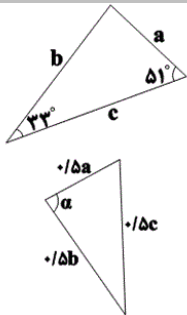
- (۱) $2\sqrt{7}$ (۲) $2\sqrt{10}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۰- شیب خط قائم بر منحنی به معادله $\tan(x + \pi e^y) = \ln(\cos x)$ در مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) π (۲) $-\pi$ (۳) $\frac{1}{\pi}$ (۴) $-\frac{1}{\pi}$

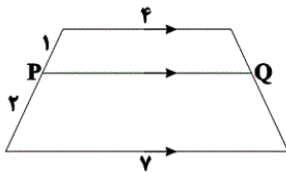
ریاضی پایه ، تشابه - ۵ سوال

۱۱۱- با توجه به شکل، زاویه α چند درجه است؟



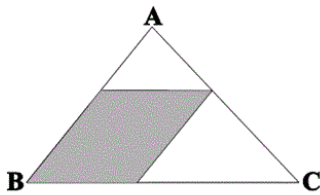
- (۱) ۹۶
(۲) ۹۷
(۳) ۹۸
(۴) ۹۵

۱۱۲- در شکل مقابل، پاره خط PQ با قاعده‌های دوزنقه موازی است. طول آن کدام است؟



- (۱) ۴/۵ (۲) ۴/۷۵
(۳) ۵ (۴) ۵/۲۵

۱۱۳- در شکل زیر اگر $3AB = 2BC$ ، آنگاه مساحت لوزی سایه خورده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

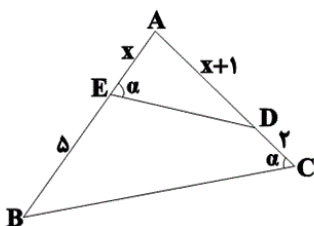


- (۱) ۰/۶
(۲) ۰/۴
(۳) ۰/۴۸
(۴) ۰/۵۶

۱۱۴- مثلثی به طول اضلاع ۲، ۴ و ۵ با مثلث دیگری به طول اضلاع ۴، a و b متشابه است. بیشترین مقدار a + b کدام است؟

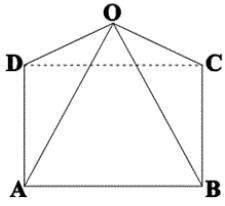
- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶

۱۱۵- در شکل روبه‌رو مساحت چهارضلعی EDCB چند برابر مساحت بزرگترین مثلث است؟



- (۱) $\frac{5}{8}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{5}{9}$

۱۱۶- در هرم منتظم مربع القاعده شکل زیر، ارتفاع هرم برابر با نصف قطر قاعده است. زاویه بین OC و CD چند درجه است؟



- (۱) ۹۰
(۲) ۴۵
(۳) ۶۰
(۴) ۳۰

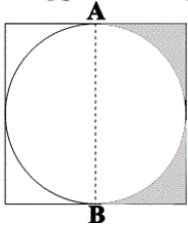
۱۱۷- از دوران مثلث قائم الزاویه‌ای به وتر ۵ حول وتر آن، شکلی با حجم $\frac{20\pi}{3}$ ایجاد شده است. مجموع طول اضلاع قائم در این

مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

۱۱۸- مطابق شکل، دایره‌ای بر چهار ضلع یک مربع به ضلع ۲ مماس است. حجم حاصل از دوران قسمت سایه زده شده حول AB

کدام است؟

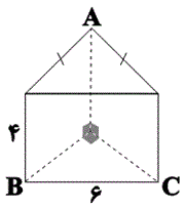


- (۱) π (۲) $\frac{2\pi}{3}$
(۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{2\pi}{2}$

۱۱۹- مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله ۴ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) π (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) 2π

۱۲۰- در شکل زیر، مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶، یکی از وجه‌های منشوری است که قاعده‌های آن مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند. مساحت مثلث ABC کدام است؟



- (۱) ۱۲
(۲) ۱۳
(۳) ۱۴
(۴) ۱۵

۱۰۱- گزینه «۱»

(مسئله فایلو)

آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 1]$ برابر است با:

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 4 \quad (*)$$

با توجه به ضابطه تابع داریم:

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

باید جواب معادله $f'(\alpha) = 4$ را به دست آوریم:

$$3\alpha^2 + 3 = 4 \Rightarrow 3\alpha^2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(ریاضی عمومی، صفحه ۶۵)

۴

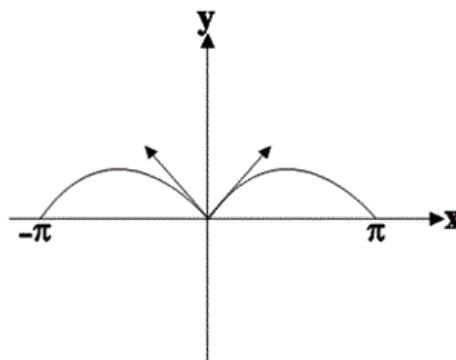
۳

۲

۱

گزینه «۱»:

نمودار $y = |\sin x|$ به صورت زیر است که نشان می‌دهد این تابع در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.



گزینه «۲»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق ندارد}$$

گزینه «۳»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[x] - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} [x] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق ندارد}$$

گزینه «۴»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 [x] - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x[x] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x[x] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x[x] = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق پذیر است}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

تابع در $x=2$ مشتق پذیر نیست، پس $x=2$ ریشه ساده عبارت داخل قدرمطلق است و عبارت داخل قدرمطلق به ازای $x=2$ صفر می شود:

$$a(2) + 2(2)^2 = 0 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow f(x) = |2x^2 - 4x|$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & ; x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \\ 4x - 2x^2 & ; 0 < x < 2 \end{cases}$$

برای محاسبه $f'(1/5)$ باید از ضابطه پایینی مشتق بگیریم:

$$f'(x) = 4 - 4x ; 0 < x < 2 \Rightarrow f'(1/5) = -2$$

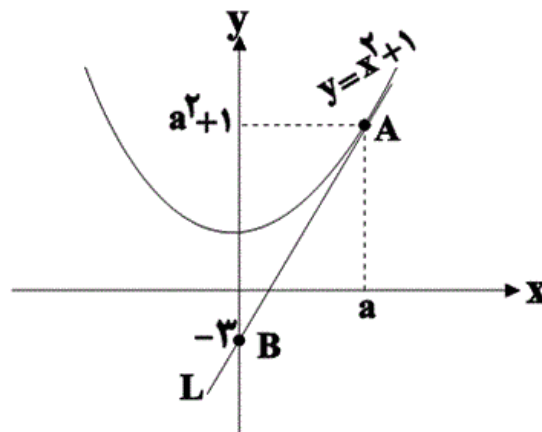
(ریاضی عمومی، صفحه های ۶۹ تا ۷۱)

۴

۳

۲

۱



$$A \left| \begin{matrix} a \\ a^2 + 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow m_L = f'(a) = 2a \Rightarrow L : y - a^2 - 1 = 2a(x - a)$$

$$B \left| \begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix} \right. \rightarrow -3 - a^2 - 1 = -2a^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

با توجه به شکل، شیب خط مماس مثبت است، پس:

$$m_L = 2a \Rightarrow m = 4$$

(ریاضی عمومی، مشابه تمرین ۳ صفحه ۶۹)

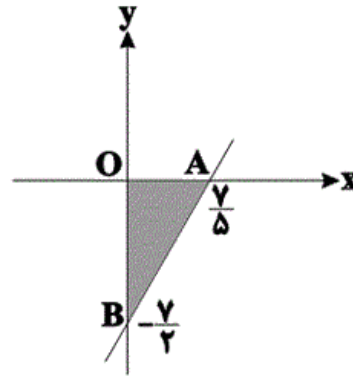
۴

۳

۲

۱

با توجه به شکل داریم:



$$S(OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{20} = 2 \frac{9}{20}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۰۶- گزینه «۲»

(مبدا شعبانی عراقی)

$$h'(x) = \frac{g'(x)f'(g(x))}{2\sqrt{f(g(x))}} \xrightarrow{x=1} h'(1) = \frac{g'(1)f'(g(1))}{2\sqrt{f(g(1))}}$$

حال مقادیر لازم را از روی نمودار به دست می‌آوریم:

$$g(1) = 3$$

$$f(g(1)) = f(3) = 2$$

$$f'(g(1)) = f'(3) = -2$$

$$g'(1) = -1$$

$$\Rightarrow h'(1) = \frac{-1 \times (-2)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{x-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 2)(f(x) + 1)}{x-1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \cdot (f(x) + 1) \right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f'(1)(f(1) + 1) = \frac{1}{3} \Rightarrow f'(1)(2 + 1) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3f'(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{9}$$

$$y = \frac{1}{f(1-2x)} \Rightarrow y' = \frac{-(-2)f'(1-2x)}{f^2(1-2x)} \xrightarrow{x=0} \frac{2f'(1)}{f^2(1)} = \frac{2(\frac{1}{9})}{(2)^2} = \frac{1}{18}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(1) = -1$$

$$f''(x) = 26x^2 + 4 \Rightarrow f''(1) = 40$$

همچنین $g(1) = 1$ و $f(1) = 4$ پس داریم:

$$(f'g + g'f - f'')(1) = (16)(1) + (-1)(4) - 40 = -28$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مسئله فایلو)

$$f'(x) = \frac{3}{9}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 = \frac{1}{3}(x^2 - 4x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4 + \sqrt{28}}{2} \\ x_2 = \frac{4 - \sqrt{28}}{2} \end{cases}$$

یعنی تابع در بازه $(\frac{4 - \sqrt{28}}{2}, \frac{4 + \sqrt{28}}{2})$ نزولی است و بنابراین بیشترین

مقدار $b - a$ برابر است با:

$$\left(\frac{4 + \sqrt{28}}{2}\right) - \left(\frac{4 - \sqrt{28}}{2}\right) = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مسئله فایلو)

از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\tan(x + \pi e^y) = \ln(\cos x)$$

$$(1 + \pi y' e^y)(1 + \tan^2(x + \pi e^y)) = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\xrightarrow{x=y=0} (1 + \pi y')(1 + 0) = 0 \Rightarrow 1 + \pi y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{\pi}$$

y' به ازای $x=0$ و $y=0$ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $(0,0)$

است، پس شیب خط قائم برابر است با π .

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۹ تا ۸۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۱۱- گزینه «۱»

(رسول مهسنی منش)

ضلع‌های دو مثلث متناسبند، پس دو مثلث متشابهند و زاویه‌های نظیر در آنها با هم برابر است. پس زاویه روبه‌روی ضلع c در مثلث بزرگ با زاویه روبه‌روی ضلع $c/5$ در مثلث کوچک با هم برابرند، پس:

$$\alpha = 180^\circ - (51^\circ + 33^\circ) = 96^\circ$$

(تشابه) (هندسه ا، صفحه ۱۹)

۴

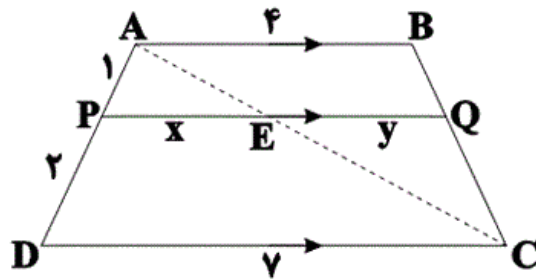
۳

۲

۱ ✓

۱۱۲- گزینه «۳»

(حسین فایلو)



مطابق شکل، قطر AC را رسم می‌کنیم. داریم:

$$\triangle ACD \xrightarrow[\text{تالس}]{PE \parallel DC} \frac{AP}{AD} = \frac{PE}{CD} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle ABC \xrightarrow[\text{تالس}]{EQ \parallel AB} \frac{EQ}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{y}{4} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow PQ = x + y = \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

(تشابه) (هندسه ا، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

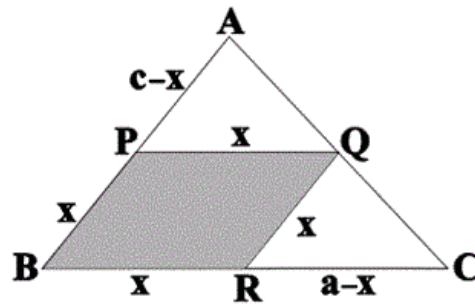
۴

۳ ✓

۲

۱

اگر ضلع لوزی را برابر x و اندازه اضلاع AB و BC را به ترتیب برابر c و a در نظر بگیریم، آن‌گاه خواهیم داشت:



$$\text{فرض: } \frac{a}{c} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{\text{لوزی}}}{S_{ABC}} = \frac{x \cdot x \cdot \sin B}{\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B} = 2 \left(\frac{x}{c}\right) \left(\frac{x}{a}\right)$$

با دو بار استفاده از قضیه تالس در مثلث ABC ، داریم:

$$\left. \begin{aligned} PQ \parallel BC &\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{c-x}{c} \Rightarrow \frac{x}{c-x} = \frac{a}{c} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{3}{5} \\ RQ \parallel AB &\Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{a}{c} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{5}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{S_{\text{لوزی}}}{S_{ABC}} = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25} = 0.48$$

(تشابه) (هندسه ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سروش موثینی)

برای اینکه $a + b$ ماکسیمم شود، باید نسبت تشابه حداکثر باشد. پس ضلع به طول ۴ از مثلث دوم را متناظر کوچکترین ضلع مثلث اول (یعنی ضلع با طول ۲) در نظر می‌گیریم و داریم:

$$K = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow K = \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = 2 \Rightarrow a + b = 8 + 10 = 18$$

(تشابه) (هندسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۱۵- گزینه «۳»

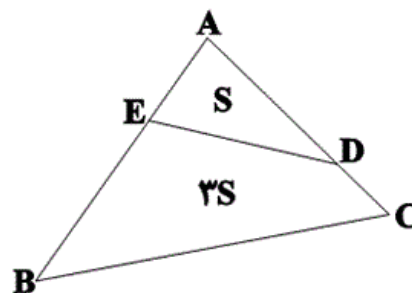
(رضا ذاکر)

دو مثلث ABC و ADE به حالت تساوی زاویه‌ها متشابهند. پس اضلاع روبه‌روی به زاویه‌های برابر دو مثلث متناسبند:

$$\frac{x+1}{x+5} = \frac{x}{x+3} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = x^2 + 5x \Rightarrow x = 3$$

پس $K = \frac{1}{2}$ نسبت تشابه دو مثلث و $K^2 = \frac{1}{4}$ نسبت مساحت‌های دو

مثلث است، مطابق شکل داریم:



$$\Rightarrow \frac{S_{EDCB}}{S_{ABC}} = \frac{3S}{3S + S} = \frac{3}{4}$$

(تشابه) (هندسه ۱، صفحه ۱۰۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\triangle OHB : OB^2 = OH^2 + HB^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow OB = a$$

پس وجوه جانبی، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع‌اند، یعنی زاویه مطلوب 60° است.

(شکل‌های فضایی) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۳)

۴

۳ ✓

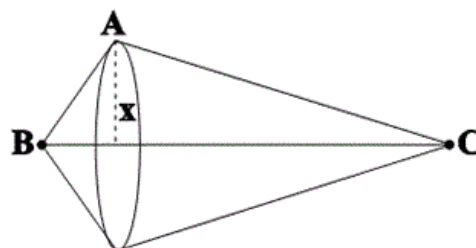
۲

۱

۱۱۷- گزینه «۳»

(سروش موئینی)

شکل حاصل، دو مخروط مشترک در قاعده است. شعاع قاعده مخروط‌ها برابر x و مجموع ارتفاع‌های آن‌ها $BC = 5$ است و داریم:



$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot x^2 (\Delta) = \frac{5}{3} \pi \cdot x^2 = \frac{20\pi}{3} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$



حال با استفاده از روابط مثلث قائم‌الزاویه داریم:

الف) $AB \cdot AC = BC \cdot AH = 10$

ب) $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (AB + AC)^2 - 2 \underbrace{AB \cdot AC}_{10} = 25$

$$\Rightarrow (AB + AC)^2 = 45 \Rightarrow AB + AC = 3\sqrt{5}$$

(شکل‌های فضایی) (هندسه ۱، صفحه ۱۳۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

در واقع منظور سؤال، تفاضل حجم‌های حاصل از دوران مربع و دایره حول AB است. از دوران مربع حول AB ، یک استوانه قائم به شعاع قاعده $r=1$ و ارتفاع $h=2$ و همچنین از دوران دایره حول AB ، یک کره به شعاع $R=1$ پدید می‌آید.

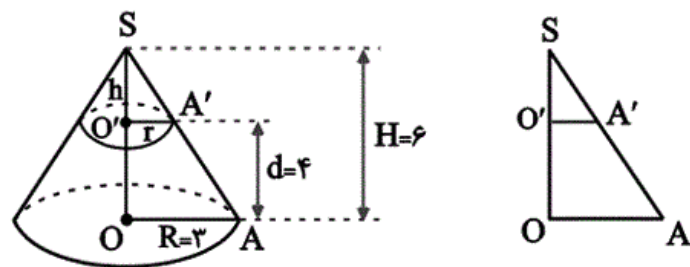
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حجم استوانه قائم: } V_1 = \pi r^2 h = 2\pi \\ \text{حجم کره: } V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \end{array} \right.$$

۴

۳

۲ ✓

۱



ارتفاع مخروط جدا شده $h = SO' = SO - OO' = 6 - 4 = 2$

$$O'A' \parallel OA \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{H} \Rightarrow \frac{r}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow r = 1$$

$$\text{حجم مخروط جدا شده: } v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (1)^2 (2) = \frac{2\pi}{3}$$

(شکل‌های فضایی) (هندسه ۱، صفحه ۱۳۴)

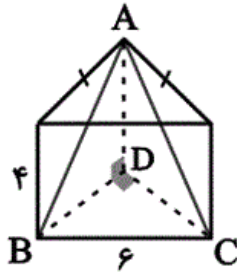
۴

۳

۲

۱ ✓

(مسئله فایلو)



از آنجا که مثلث DBC قائم‌الزاویه‌ی
متساوی‌الساقین به طول وتر ۶ است، داریم:

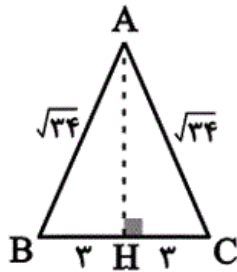
$$BD^2 + CD^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

در مثلث ABD بنا به قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 = 16 + 18 = 34$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{34}$$



برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC ، طول ارتفاع
وارد بر BC را حساب می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{ABH} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{34 - 9} = 5$$

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$$

بنابراین:

(شکل‌های فضایی) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۰)

۴ ✓

۳

۲

۱