

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی - ۱ سوال

۸۱- اگر $x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{x + x^3 + x^5 + \dots + x^{19}}{x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \dots - x^{20}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{10}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

حسابان ۱، معادلات درجه دوم - ۲ سوال

۸۲- اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^4 + \beta^4$ کدام است؟

- (۱) ۱۴۱ (۲) ۱۵۱ (۳) ۱۶۱ (۴) ۱۷۱

۸۳- با توجه به معادله $x^2 - |x - 1| + 1 = 0$ ، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) حاصل ضرب جواب های معادله صفر است. (۲) مجموع جواب های معادله منفی است.
(۳) $x = 0$ تنها جواب معادله است. (۴) معادله جواب مثبت ندارد.

حسابان ۱، معادلات گویا و گنگ - ۳ سوال

۸۴- اگر مجموع جواب های معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = a(1 - \frac{1}{x-2})$ برابر ۴ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۲

۸۵- مجموعه جواب معادله $\sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{x+1} = 0$ کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{-1, 1\}$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $R - (-1, 1)$

۸۶- حاصل ضرب جواب های معادله $x^2 - 2\sqrt{x^2 - 24} = 39$ کدام است؟

- (۱) -۳۶ (۲) -۴۹ (۳) -۱۰۰ (۴) -۶۴

حسابان ۱، قدر مطلق و ویژگی های آن - ۶ سوال

۸۷- اگر $|a| + a = 0$ و $|b - 1| = 1 - b$ باشد، حاصل $|a + b - 1| - |b - 2|$ همواره کدام است؟

- (۱) $a + 2b - 3$ (۲) $3 - a - 2b$ (۳) $a + 1$ (۴) $-a - 1$

۸۸- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب معادله $||x - 1| - 7| = 3$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۸۹- کدام عبارت همواره صحیح نیست؟

- (۱) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (۲) $|a - b| \leq |a| - |b|$
 (۳) $|a - b| + |a - 2b| \geq |b|$ (۴) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

۹۰- مساحت سطح محدود به نمودار توابع $y = x + 2$ و $y = |x| + |x - 2|$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۹۱- اگر معادله $|x - 1| - 2x = k - |x - 2|$ دارای جواب باشد، کم‌ترین مقدار ممکن برای k کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۹۹- به ازای چه مجموعه مقادیری از m ، معادله $|x| + mx = 1$ فقط یک جواب دارد؟

- (۱) $\{m \mid |m| < \frac{1}{4}\}$ (۲) $\{m \mid |m| \leq 1\}$ (۳) $\{m \mid |m| \geq 1\}$ (۴) $\{m \mid |m| > \frac{1}{4}\}$

حسابان ۱، آشنایی با هندسه تحلیلی - ۵ سوال

۹۲- معادله یکی از خطوطی که بر خط به معادله $3x + 4y + 3 = 0$ عمود بوده و فاصله مبدأ مختصات از آن برابر $\frac{2}{5}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $3y - 4x - 2 = 0$ (۲) $3y + 4x - 2 = 0$
 (۳) $4x - 3y - 3 = 0$ (۴) $4x - 3y + 3 = 0$

۹۳- اگر نقطه $M(1, 2)$ محل برخورد دو خط عمود بر هم $y = mx + b$ و $(2m - 3)y - mx = a$ باشد، آن‌گاه حاصل $a + 2b$ کدام است؟ ($m < 0$)

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) -۱۰ (۴) -۵

۹۴- اضلاع مثلث ABC روی خطوط $2 = 5x - 3y$ ، $8 = 3x + 5y$ و $1 = x - y$ قرار دارند. مختصات محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کدام است؟

- (۱) $(1, 0)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۹۵- دایره به مرکز $O(3, 2)$ و مماس بر خط $4x - 3y + 9 = 0$ ، چند نقطه مشترک با محورهای مختصات دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۶- دو ضلع از یک لوزی بر دو خط $2y + x = 6$ و $3x - y = 4$ منطبق می‌باشند و نقطه $(-1, 1)$ یکی از رأس‌های لوزی است. طول ضلع این لوزی چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) ۱ (۴) ۲

حسابان ۱، آشنایی بیشتر با تابع - ۱ سوال

۹۷- در تابع $f: [2, +\infty) \rightarrow B$ ، مجموعه B کدام یک نمی‌تواند باشد؟

- (۱) $[-3, +\infty)$ (۲) $[-4, +\infty)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) \mathbb{R}

حسابان ۱، انواع تابع - ۲ سوال

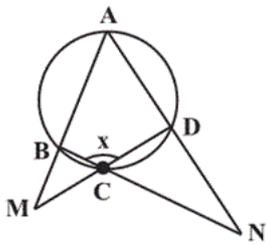
۹۸- اگر توابع $f(x) = x^2 + a$ و $g(x) = \frac{x^2 + 4x^2 + b}{x^2 + 1}$ برابر باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۰- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2 - (a+1)x - b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-1, 6\}$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

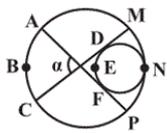
- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

هندسه ۲، مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره - ۲ سوال



۱۲۱- در شکل مقابل، اگر $\hat{M} = 2^\circ$ و $\hat{N} = 25^\circ$ باشد، اندازه x کدام است؟

- (۱) 105° (۲) $112/5^\circ$ (۳) 120° (۴) 125°



۱۲۲- در شکل مقابل، اگر $\widehat{MNP} = 108^\circ$ و $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ باشد، اندازه α کدام است؟

- (۱) 96° (۲) 100° (۳) 104° (۴) 108°

هندسه ۲، رابطه‌های طولی در دایره - ۳ سوال

۱۲۳- از نقطه A که کم‌ترین فاصله آن از نقاط واقع بر دایره $C(O, R)$ برابر ۳ است، دو مماس بر این دایره رسم می‌کنیم. اگر زاویه بین دو

مماس رسم شده برابر 6° باشد، مساحت ناحیه محصور به دو مماس و دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3} - \pi$ (۲) $9\sqrt{3} - \pi$ (۳) $9\sqrt{3} - 3\pi$ (۴) $3\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

۱۲۴- دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۱۵ با هم مماس خارج‌اند. خطی که از نقطه تماس این دو دایره گذشته، وتری به طول ۲۴ در دایره بزرگ‌تر ایجاد می‌کند. طول وتری که این خط در دایره کوچک‌تر ایجاد می‌کند، کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{4}$ (۲) $\frac{4}{8}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۶

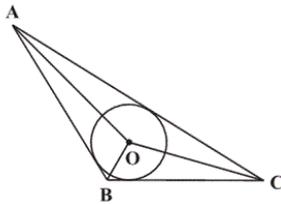
۱۲۵- مماس مشترک‌های داخلی دو دایره متخارج بر هم عمودند و شعاع دایره بزرگ‌تر ۳ برابر شعاع دایره کوچک‌تر است. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره، چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟
 (۱) ۶ (۲) $2\sqrt{7}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

هندسه ۲، چندضلعی محاطی و محیطی - ۵ سوال

۱۲۶- شعاع دایره محاطی یک لوزی به طول قطرهای ۴ و ۱۲ کدام است؟
 (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ (۳) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

۱۲۷- نیمسازهای زوایای داخلی دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و $AD \parallel BC$) در یک نقطه هم‌رس‌اند. اگر $CD = 10$ و $AB = 8$ باشد، فاصله نقطه هم‌رسی نیمسازها از دورترین رأس دوزنقه کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{5}$

۱۲۸- در شکل زیر، نقطه O مرکز دایره محاطی مثلث ABC می‌باشد. اگر $BO = 6$ و $\hat{AOC} = 150^\circ$ باشد، آن‌گاه طول شعاع دایره محاطی داخلی مثلث کدام است؟



- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) $3\sqrt{3}$
- (۴) $2\sqrt{3}$

۱۲۹- مساحت دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر 48π است. محیط این مثلث کدام است؟
 (۱) ۷۲ (۲) ۳۶ (۳) ۲۴ (۴) ۱۴۴

۱۳۰- در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۸ و ۱۰ واحد، دایره محاطی خارجی نظیر ضلع متوسط، این ضلع را به دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت دو قطعه حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{7}$

حسابان ۱- سوالات موازی، مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی - ۲ سوال -

۱۰۱- مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n = n(2n - 3)$ است. جمله دهم این دنباله کدام است؟
 (۱) ۳۵ (۲) ۳۷ (۳) ۳۹ (۴) ۴۱

۱۰۲- اگر $x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{x + x^3 + x^5 + \dots + x^{19}}{x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \dots - x^{20}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{10}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

حسابان ۱ - سوالات موازی ، معادلات درجه دوم - سوال ۲ -

۱۰۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^4 + \beta^4$ کدام است؟

- (۱) ۱۴۱ (۲) ۱۵۱ (۳) ۱۶۱ (۴) ۱۷۱

۱۰۴- با توجه به معادله $x^2 - |x-1| + 1 = 0$ ، کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) حاصل ضرب جواب‌های معادله صفر است. (۲) مجموع جواب‌های معادله منفی است.
 (۳) $x = 0$ تنها جواب معادله است. (۴) معادله جواب مثبت ندارد.

حسابان ۱ - سوالات موازی ، معادلات گویا و گنگ - سوال ۳ -

۱۰۵- اگر مجموع جواب‌های معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = a(1 - \frac{1}{x-2})$ برابر ۴ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۲

۱۰۶- مجموعه جواب معادله $\sqrt{x^2-1} + 2\sqrt{x+1} = 0$ کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{-1, 1\}$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $R - (-1, 1)$

۱۰۷- مجموع جواب‌های معادله $2\sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[3]{x} = 1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) -۱

حسابان ۱ - سوالات موازی ، قدر مطلق و ویژگی های آن - سوال ۶ -

۱۰۸- اگر $|a| + a = 0$ و $|b-1| = 1-b$ باشد، حاصل $|a+b-1| - |b-2|$ همواره کدام است؟

- (۱) $a+2b-3$ (۲) $3-a-2b$ (۳) $a+1$ (۴) $-a-1$

۱۰۹- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب معادله $||x-1|-7| = 3$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۱۱۰- نمودارهای دو تابع $y = x^2 + \frac{x}{|x|}$ و $y = \frac{x^2}{|x|}$ در چند نقطه متقاطع اند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۱- کدام عبارت همواره صحیح نیست؟

- (۱) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (۲) $|a - b| \leq |a| - |b|$
 (۳) $|a - b| + |a - 2b| \geq |b|$ (۴) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

۱۱۲- مساحت سطح محدود به نمودار توابع $y = x + 2$ و $y = |x| + |x - 2|$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۱۳- اگر معادله $|x - 1| - 2x = k - |x - 2|$ دارای جواب باشد، کمترین مقدار ممکن برای k کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

حسابان ۱- سوالات موازی، آشنایی با هندسه تحلیلی - سوال ۷ -

۱۱۴- در مثلث ABC با رئوس $A(1, 1)$ ، $B(2, -1)$ و $C(6, 2)$ ، فاصله ارتفاع رسم شده از رأس A و عمودمنصف وارد بر ضلع BC کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{1}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) ۳

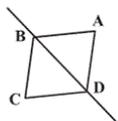
۱۱۵- معادله یکی از خطوطی که بر خط به معادله $3x + 4y + 3 = 0$ عمود بوده و فاصله مبدأ مختصات از آن برابر $\frac{2}{5}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $3y - 4x - 2 = 0$ (۲) $3y + 4x - 2 = 0$
 (۳) $4x - 3y - 3 = 0$ (۴) $4x - 3y + 3 = 0$

۱۱۶- اگر نقطه $M(1, 2)$ محل برخورد دو خط عمود بر هم $y = mx + b$ و $(2m - 3)y - mx = a$ باشد، آن گاه حاصل $a + 2b$ کدام است؟ ($m < 0$)

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) -۱۰ (۴) -۵

۱۱۷- معادله یک قطر لوزی شکل زیر $5x + 12y + 8 = 0$ و مختصات یک رأس آن $A(1, 0)$ می باشد. اگر $|BD| = 10$ باشد، مساحت لوزی



- کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۵ (۴) ۱۵

۱۱۸- نقطه C روی خط $y = x - 2$ قرار دارد و از دو نقطه متمایز $A(-a, 2)$ و $B(-2, a)$ به یک فاصله می باشد. طول نقطه C کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

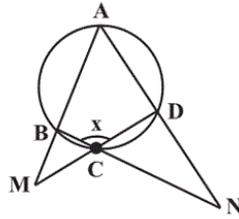
۱۱۹- اضلاع مثلث ABC روی خطوط $5x - 3y = 2$ ، $3x + 5y = 8$ و $x - y = 1$ قرار دارند. مختصات محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کدام است؟

- (۱) $(1, 0)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۱۲۰- دایره به مرکز $O(3, 2)$ و مماس بر خط $4x - 3y + 9 = 0$ ، چند نقطه مشترک با محورهای مختصات دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۱- در شکل مقابل، اگر $\hat{M} = 20^\circ$ و $\hat{N} = 25^\circ$ باشد، اندازه x کدام است؟



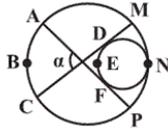
(۱) 105°

(۲) $112/5^\circ$

(۳) 120°

(۴) 125°

۱۳۲- در شکل مقابل، اگر $\widehat{MNP} = 108^\circ$ و $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ باشد، اندازه α کدام است؟



(۲) 100°

(۱) 96°

(۴) 108°

(۳) 104°

هندسه ۲- سوالات موازی ، رابطه های طولی در دایره - سوال ۶ -

۱۳۳- از نقطه A که کمترین فاصله آن از نقاط واقع بر دایره $C(O, R)$ برابر ۳ است، دو مماس بر این دایره رسم می کنیم. اگر زاویه بین دو

مماس رسم شده برابر 60° باشد، مساحت ناحیه محصور به دو مماس و دایره کدام است؟

(۴) $3\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

(۳) $9\sqrt{3} - 3\pi$

(۲) $9\sqrt{3} - \pi$

(۱) $3\sqrt{3} - \pi$

۱۳۴- دو دایره به شعاع های ۳ و ۱۵ با هم مماس خارج اند. خطی که از نقطه تماس این دو دایره گذشته، وترى به طول ۲۴ در دایره بزرگ تر

ایجاد می کند. طول وترى که این خط در دایره کوچک تر ایجاد می کند، کدام است؟

(۴) ۶

(۳) $1/2$

(۲) $4/8$

(۱) $2/4$

۱۳۵- مماس مشترک های داخلی دو دایره متخارج بر هم عمودند و شعاع دایره بزرگ تر ۳ برابر شعاع دایره کوچک تر است. طول مماس مشترک

خارجی این دو دایره، چند برابر شعاع دایره کوچک تر است؟

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) $4\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{7}$

(۱) ۶

۱۳۸- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', r)$ مماس درونی اند. اگر مساحت ناحیه محدود میان آنها 28π و طول خط المרכזین آنها برابر ۴

باشد، طول وترى از دایره بزرگ تر که مماس بر دایره کوچک تر و عمود بر خط المרכזین دو دایره باشد، کدام است؟ ($R > r$)

(۴) $8\sqrt{3}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{6}$

(۱) $4\sqrt{6}$

۱۳۹- از نقطه A خارج دایره ای به شعاع ۳، خطی رسم می کنیم تا دایره را به ترتیب در نقاط B و C قطع کند. اگر $AB = 4$ و $BC = 5$

باشد، فاصله نقطه A از مرکز این دایره، چند برابر طول مماس رسم شده از این نقطه بر دایره است؟

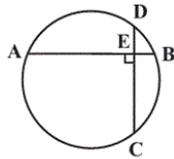
(۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{2}$

۱۴۰- در شکل زیر $AE = 12$ ، $CE = 6$ و $ED = 4$ است. اگر وترهای AB و CD در نقطه E بر هم عمود باشند، آن گاه مساحت دایره



کدام است؟

- (۱) 35π
 (۲) 40π
 (۳) 45π
 (۴) 50π

هندسه ۲- سوالات موازی ، چندضلعی محاطی و محیطی - سوال ۲ -

۱۳۶- شعاع دایره محاطی یک لوزی به طول قطرهای ۴ و ۱۲ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ (۳) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

۱۳۷- نیمسازهای زوایای داخلی دوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و $AD \parallel BC$) در یک نقطه هم‌رس‌اند. اگر $CD = 10$ و $AB = 8$ باشد، فاصله نقطه هم‌رسی نیمسازها از دورترین رأس دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{5}$

آمار و احتمال ، آشنایی با منطق ریاضی - سوال ۲ -

۱۴۱- گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)$ هم‌ارز منطقی با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

- (۱) $\sim p$ (۲) q (۳) $p \Rightarrow q$ (۴) T

۱۴۲- کدام یک از گزاره‌های سوری زیر، دارای ارزش درست است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = x - 2$
 (۲) $\exists x \in \mathbb{N} : 2^x < x^2$
 (۳) $\forall x \in \mathbb{N} ; (x - 1)x(x + 1) = 6k$, $k \in \mathbb{N}$
 (۴) $\exists x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 5x + 4 = 0$

آمار و احتمال ، مجموعه - زیر مجموعه - سوال ۳ -

۱۴۳- اگر ۳ عضو از اعضای مجموعه A کم شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن، ۲۲۴ واحد کاهش می‌یابد. مجموعه A چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

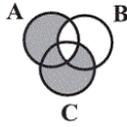
۱۴۴- حاصل عبارت $[A \cap (B \cup C)] - [(B - C) \cup A]$ کدام است؟

- (۱) \emptyset (۲) $A \cap B'$ (۳) B (۴) A

۱۴۵- دو مجموعه $A = \{2k - 1 \mid k = 0, 1, 2\}$ و $B = \{m^2 - 2m \mid m = -1, 0, 1\}$ مفروض‌اند. مجموعه $A \cup B$ را به چند طریق می‌توان

افراز کرد به گونه‌ای که هیچ دو عدد مثبتی در یک زیرمجموعه قرار نگیرند؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰



۱۴۶- ناحیه هاشورخورده در شکل مقابل، معادل کدام یک از مجموعه های زیر است؟

- (۱) $(A \cup B \cup C) - (A \cup C)$
 (۲) $[A - (B \cup C)] \cup (B - A)$
 (۳) $(A - B) \cup (C - A)$
 (۴) $(A \cup B) - (A \cap B \cap C)$

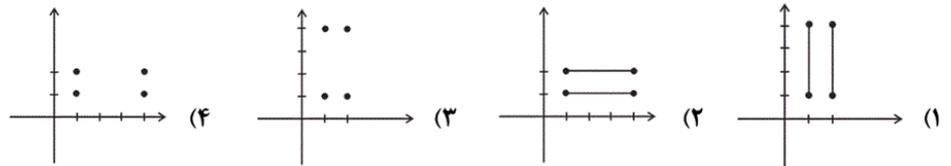
۱۴۷- کدام یک از تساوی های زیر نادرست است؟

- (۱) $A - B = B' - A'$
 (۲) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
 (۳) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
 (۴) $(A \cup B) - (A \cap B) = A - B$

۱۴۸- اگر A ، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، حاصل عبارت $(A - B') \cup (A - C') \cup [A - (B \cup C)]$ همواره برابر کدام است؟

- (۱) A
 (۲) $A \cap B$
 (۳) $B \cup C$
 (۴) $B \cap C$

۱۴۹- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x - 1 < 5\}$ باشد، نمودار ضرب دکارتی $A \times B$ کدام است؟



۱۵۰- اگر $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = x\}$ ، آن گاه فاصله دورترین نقاط در نمودار ضرب دکارتی $B \times A$ کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) $\sqrt{10}$
 (۳) $\sqrt{13}$
 (۴) ۴

-۸۱

(میثم بهرامی بویا)

صورت و مخرج کسر، هر دو دنباله هندسی با قدرنسبت‌های x^2 و $-x^2$ هستند، پس داریم:

$$\text{عبارت} = \frac{\frac{x(1-(x^2)^{10})}{1-x^2}}{\frac{x^2(1-(-x^2)^{10})}{1-(-x^2)}} = \frac{\frac{x(1-x^{20})}{1-x^2}}{\frac{x^2(1-x^{20})}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4})} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{3}$$

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۸۲

(علی شهبازی)

$$S = \alpha + \beta = 3, \quad P = \alpha\beta = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 3^2 - 2(-2) = 13$$

$$\Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 13^2 - 2(-2)^2 = 161$$

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

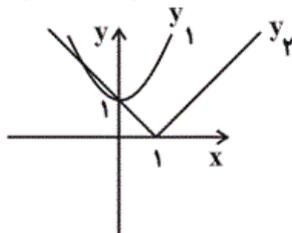
۳ ✓

۲

۱

-۸۳

(محمدمصطفی ابراهیمی)



$$x^2 + 1 = |x - 1| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x^2 + 1 \\ y_2 = |x - 1| \end{cases}$$

گزینه «۳» نادرست است. زیرا هم جواب صفر و هم جواب منفی داریم.

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه ۱۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(میثم بهرامی جويا)

$$\frac{x^2 + 2x - (x^2 - x - 2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{a(x-3)}{x-2}$$

$$\Rightarrow 3x + 2 = ax^2 - ax - 6a \Rightarrow ax^2 + (-a-3)x - 6a - 2 = 0$$

$$\text{مجموع جوابها} = 4 \Rightarrow -\frac{-a-3}{a} = 4 \Rightarrow 4a = a+3 \Rightarrow a=1$$

(مسابان ۱- پیر و معارله- صفحه‌های ۷ تا ۹ و ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲✓

۱

(کیا مقدس نیا)

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{یا} \\ x \leq -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} [1, +\infty) \cup \{-1\}$$

از طرفی می‌دانیم که $2\sqrt{x+1}$ و $\sqrt{x^2-1}$ دو عبارت همواره نامنفی‌اند که با یکدیگر جمع شده‌اند و حاصل برابر صفر شده است، پس حتماً هر دوی آن‌ها برابر صفر هستند.

۴

۳

۲

۱✓

(بهانفش نیکنام)

$$x^2 - 2\sqrt{x^2 - 24} - 24 - 39 = 0 \Rightarrow (x^2 - 24) - 2\sqrt{x^2 - 24} - 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x^2 - 24} = t} t^2 - 2t - 15 = 0 \Rightarrow (t-5)(t+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -3 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 24} = 5 \Rightarrow x^2 - 24 = 25 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌ها برابر است با: -۴۹

(مسابان ۱- پیر و معارله- صفحه‌های ۷ تا ۹، ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲✓

۱

(علی شهبازی)

$$|a| + a = 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow a \leq 0$$

$$|b-1| = 1-b \Rightarrow b-1 \leq 0 \Rightarrow b \leq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a \leq 0 \\ b \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a+b \leq 1 \Rightarrow a+b-1 \leq 0 \Rightarrow |a+b-1| = -a-b+1$$

$$b \leq 1 \Rightarrow b-2 \leq -1 \Rightarrow |b-2| = -b+2$$

$$|a+b-1| - |b-2| = (-a-b+1) - (-b+2) = -a-1$$

پس:

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه های ۲۳ تا ۲۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علی شهبازی)

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-1| - 7 = 3 \Rightarrow |x-1| = 10 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 10 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow \max \\ x-1 = -10 \Rightarrow x = -9 \Rightarrow \min \end{cases} \\ |x-1| - 7 = -3 \Rightarrow |x-1| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 4 \Rightarrow x = 5 \\ x-1 = -4 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\max - \min = 11 - (-9) = 20$$

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(ابراهیم نجفی)

طبق نامساوی مثلثی به بررسی تک تک گزینه ها می پردازیم:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$۱) \xrightarrow{b \rightarrow -b} |a-b| \leq |a| + |-b| \Rightarrow |a-b| \leq |a| + |b|$$

$$۲) \xrightarrow{b \rightarrow -a+b} |a-a+b| \leq |a| + |-a+b|$$

$$\Rightarrow |b| \leq |a| + |a-b| \Rightarrow |a-b| \geq |b| - |a| \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow a-b} |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$$

$$\Rightarrow |a| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a-b| \geq |a| - |b| \quad (۲)$$

$$۳) \xrightarrow{a \rightarrow a-b} |a-b+2b-a| \leq |a-b| + |2b-a|$$

$$\xrightarrow{b \rightarrow 2b-a} |b| \leq |a-b| + |a-2b|$$

$$۴) \xrightarrow{(۲), (۱)} \begin{cases} |a-b| \geq |a| - |b| \\ |a-b| \geq |b| - |a| \end{cases} \Rightarrow |a-b| \geq ||a| - |b||$$

(مسئله ۱- جبر و معادله - صفحه ۲۵)

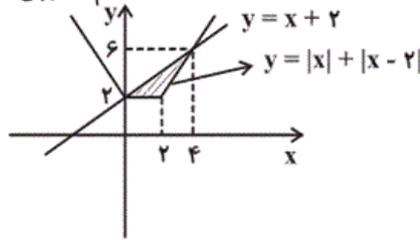
۴

۳

۲ ✓

۱

(قاسم کتابچی)



$$x + 2 = x + x - 2 \Rightarrow x = 4, S_{\Delta} = \frac{2 \times (6 - 2)}{2} = 4$$

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳ ✓

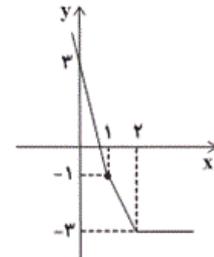
۲

۱

(پوانبش نیکنام)

معادله را به صورت $|x - 2| + |x - 1| - 2x = k$ بازنویسی می‌کنیم. نمودار $y = |x - 2| + |x - 1| - 2x$ را رسم می‌کنیم.

$$y = \begin{cases} 3 - 4x & ; x < 1 \\ 1 - 2x & ; 1 \leq x < 2 \\ -3 & ; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$



با توجه به نمودار درمی‌یابیم اگر $k \geq -3$ باشد، معادله جواب دارد.

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

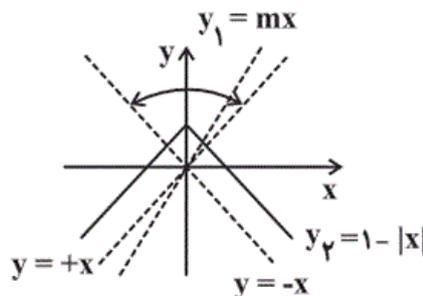
۳

۲ ✓

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

معادله را به صورت $mx = 1 - |x|$ می‌نویسیم. توابع $y_1 = mx$ و $y_2 = 1 - |x|$ را رسم می‌کنیم.



برای آن که معادله یک جواب داشته باشد، y_1 و y_2 باید در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند، پس شیب خط $y_1 = mx$ یعنی m باید در محدوده $-1 \leq m \leq 1$ باشد یعنی: $|m| \leq 1$

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

(ابراهیم نبفی)

$$3x + 4y + 3 = 0 \Rightarrow 4y = -3x - 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

شیب خط برابر $-\frac{3}{4}$ است و شیب خطی که بر این خط عمود باشد

$$m \times m' = -1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{4}\right) \times m' = -1 \quad \text{به صورت مقابل به دست می آید:}$$

$$\Rightarrow m' = \frac{4}{3} \xrightarrow{y = m'x + b'} y = \frac{4}{3}x + b'$$

$$\Rightarrow 3y - 4x - b = 0, O(0,0) \Rightarrow d = \frac{|3(0) - 4(0) - b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-b|}{5}$$

$$\xrightarrow{d = \frac{2}{5}} \frac{|-b|}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow |-b| = 2 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4x - 2 = 0 \\ 3y - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

(مسئله ۱- فیبر و معادله - صفحه‌های ۳۱، ۳۳ و ۳۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(پدر، مانیل کور)

$$y = mx + b \Rightarrow \text{شیب خط} = m$$

$$(2m - 3)y = mx + a \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{m}{2m - 3}$$

$$\Rightarrow m \times \frac{m}{2m - 3} = -1 \Rightarrow m^2 = -2m + 3$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -3 & \checkmark \\ m = 1 & \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -3x + b \\ -9y = -3x + a \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری نقطه } M \text{ در دو معادله}}$$

$$\begin{cases} 2 = -3 + b \Rightarrow b = 5 \\ -18 = -3 + a \Rightarrow a = -15 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = -15 + 10 = -5$$

(مسئله ۱- فیبر و معادله - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۹۴

(امیر هوشنگ فمسه)

چون دو خط $3x + 5y = 8$ و $5x - 3y = 2$ بر هم عمودند، مثلث حاصل قائم‌الزاویه است، لذا محل تلاقی سه ارتفاع روی رأس قائمه یعنی محل تلاقی همین دو خط است.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$$

$$x = 1, y = 1 \Rightarrow (1, 1)$$

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

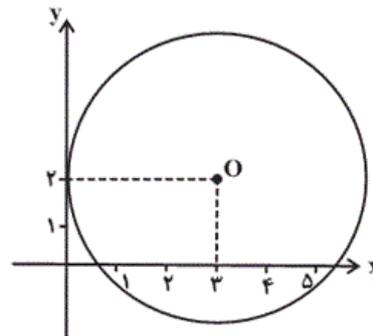
-۹۵

(محمد مصطفی ابراهیمی)

فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است:

$$r = \frac{|4(3) - 3(2) + 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

حالا نمودار دایره را رسم می‌کنیم:



این دایره دو نقطه مشترک با محور x ها و یک نقطه مشترک با محور y ها دارد.

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۹۶

(میثم بهرامی پویا)

نقطه $(1, -1)$ روی خط $3x - y = 4$ است و دو خط داده شده موازی نیستند.

$$3x - y = 4 \quad 2y + x = 6$$

$$\begin{cases} 2y + x = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, 2) \text{ رأس دیگر لوزی}$$

$$\text{طول ضلع} : \sqrt{(2-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

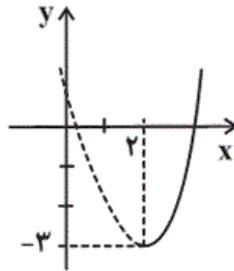
۳

۲

۱ ✓

(امید غلامی)

مطابق نمودار زیر، برد تابع $f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$ با دامنه $[2, +\infty)$ برابر $[-3, +\infty)$ است. بنابراین هم دامنه یعنی مجموعه B بایستی شامل این بازه باشد. بازه گزینه «۳» چنین شرایطی ندارد.



(مسئله ۱- تابع - صفحه های ۳۸ تا ۴۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مثیم بهرامی بویا)

$$g(x) = \frac{x^4 + 4x^2 + b}{x^2 + 1} = x^2 + a \Rightarrow x^4 + 4x^2 + b = (x^2 + a)(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1=4 \\ b=a \end{cases} \Rightarrow a=b=3$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه های ۴۱ تا ۴۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عمیر معنوی)

دو عدد ۶ و ۱- در دامنه تابع قرار ندارند، پس $x=6$ و $x=-1$ ریشه های مخرج ضابطه تابع هستند.

$$x=6 \xrightarrow{\text{در مخرج}} 36 - (a+1)6 - b = 0 \Rightarrow b = 30 - 6a$$

$$x=-1 \xrightarrow{\text{در مخرج}} 1 + (a+1) - b = 0 \Rightarrow b = a + 2$$

$$30 - 6a = a + 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین:

$$a + b = 4 + 6 = 10$$

در نتیجه:

(مسئله ۱- تابع - صفحه های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیرحسین ابومحبوب)

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 40^\circ \quad (1)$$

$$\hat{N} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{CD} = 50^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\widehat{AB} + \widehat{AD}) - (\widehat{BC} + \widehat{CD}) = 90^\circ \\ \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = 360^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 2(\widehat{AB} + \widehat{AD}) = 450^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{AD} = 225^\circ \Rightarrow x = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} = 112.5^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(رضا بفشیره)

اگر $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = x$ باشد، آن گاه داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{MNP}}{2} = \frac{x + 108^\circ}{2} \Rightarrow 2\alpha = x + 108^\circ \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\widehat{DNF} - \widehat{DEF}}{2} = \frac{(360^\circ - x) - x}{2} \Rightarrow \alpha = 180^\circ - x \quad (2)$$

۴

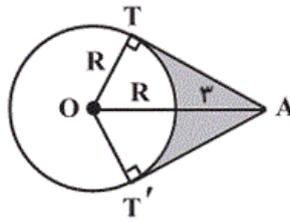
۳

۲

۱ ✓

(امیررضا عمزه‌ای)

خطی که نقطه A را به مرکز دایره وصل می‌کند، نیمساز زاویه بین دو مماس است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های ۳۰° و ۶۰°، به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است، بنابراین داریم:



$$\Delta AOT : \widehat{OAT} = 30^\circ \Rightarrow OT = \frac{1}{2} OA$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}(R + 3) \Rightarrow R = 3 \Rightarrow OA = 6$$

$$\widehat{AOT} = 60^\circ \Rightarrow AT = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$S_{OTAT'} = 2S_{\Delta AOT} = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{OTT'} \text{ قطاع} = \frac{\pi R^2 \times 120^\circ}{360^\circ} = \pi \times 3^2 \times \frac{1}{3} = 3\pi$$

بنابراین مساحت ناحیه محصور به دو مماس و دایره، برابر است با:

$$S = S_{OTAT'} - S_{OTT'} \text{ قطاع} = 9\sqrt{3} - 3\pi$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

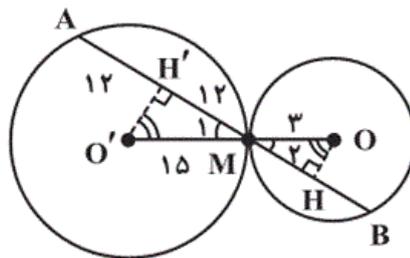
۴

۳ ✓

۲

۱

(امسان فی‌اللعنی)



می‌دانیم در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند؛ پس

$MH' = 12$ است. دو مثلث OMH و $O'MH'$ به حالت تساوی دو

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{MH}{MH'} \Rightarrow \frac{3}{15} = \frac{MH}{12}$$

زاویه با هم متشابه‌اند، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow MH = \frac{12}{5} = 2/4 \Rightarrow MB = 2 \times 2/4 = 4/8$$

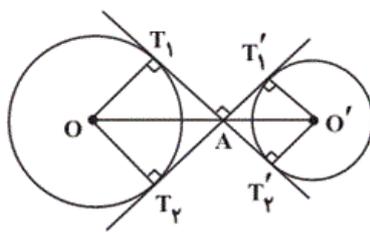
(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ و ۲۰)

۴

۳

۲ ✓

۱



$$O\hat{A}T_1 = 45^\circ \Rightarrow OT_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} OA \xrightarrow{OT_1=R} OA = \sqrt{2} R \quad (1)$$

$$O'\hat{A}T'_1 = 45^\circ \Rightarrow O'T'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} O'A \xrightarrow{O'T'_1=R'} O'A = \sqrt{2} R' \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow OO' = \sqrt{2}(R + R')$$

$$\begin{aligned} \text{طول مماس مشترک خارجی} &= \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \\ &= \sqrt{2(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{2(4R')^2 - (2R')^2} \\ &= \sqrt{32R'^2 - 4R'^2} = \sqrt{28R'^2} = 2\sqrt{7}R' \end{aligned}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۲۶

(امیرحسین ابومحبوب)

در لوزی قطرهای عمود منصف یکدیگرند، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه OAB

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow AB = 2\sqrt{10} \quad \text{داریم:}$$



اگر S و $2P$ به ترتیب مساحت و محیط این لوزی باشد، آن‌گاه داریم:

$$S = \frac{4 \times 12}{2} = 24$$

$$2P = 4 \times 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10} \Rightarrow P = 4\sqrt{10}$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{24}{4\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

(شعاع دایره محاطی)

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۲۹

(امسان فیراللهی)

اگر S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث باشد، شعاع دایره محاطی داخلی آن برابر $r = \frac{S}{P}$ است. اگر ضلع مثلث متساوی الاضلاع را a در نظر

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3}{2} a} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

بگیریم، داریم:

مساحت دایره محاطی داخلی برابر 48π است. داریم:

$$\pi r^2 = 48\pi \Rightarrow r^2 = 48 \Rightarrow r = 4\sqrt{3} \Rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} a \Rightarrow a = 24$$

بنابراین محیط مثلث برابر $3 \times 24 = 72$ می‌باشد.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

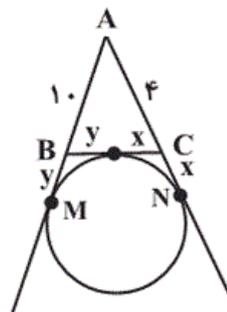
۲

۱ ✓

-۱۳۰

(امسان فیراللهی)

اگر طول قطعات ایجاد شده روی ضلع متوسط را با x و y نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:



$$\begin{cases} BC = 8 \Rightarrow x + y = 8 \\ AN = AM \Rightarrow 4 + x = 10 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 7, y = 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{7}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۰۱

(پوریامهرث)

راه حل اول:

$$S_1 = a_1 = 1(2(1) - 3) = -1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2(2(2) - 3) = 2 \Rightarrow a_1 + a_2 = 2$$

$$\Rightarrow -1 + a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = a_1 + d \Rightarrow 3 = -1 + d \Rightarrow d = 4$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -1 + 9(4) = 35$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = 10(20 - 3) - 9(18 - 3) = 170 - 135 = 35$$

راه حل دوم:

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\text{عبارت} = \frac{\frac{x(1-(x^2)^{10})}{1-x^2}}{x^2 \frac{(1-(-x^2)^{10})}{1-(-x^2)}} = \frac{x(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{10}{3}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۰۳

(علی شهبازی)

$$S = \alpha + \beta = 3, \quad P = \alpha\beta = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 3^2 - 2(-2) = 13$$

$$\Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 13^2 - 2(-2)^2 = 161$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

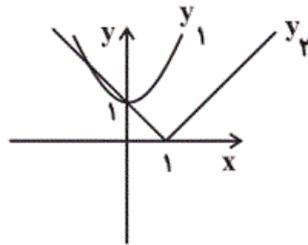
۳ ✓

۲

۱

-۱۰۴

(مهدرمصطفی ابراهیمی)



$$x^2 + 1 = |x - 1| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x^2 + 1 \\ y_2 = |x - 1| \end{cases}$$

گزینه «۳» نادرست است، زیرا هم جواب صفر و هم جواب منفی داریم.

(مسایان ۱- صفحه ۱۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(میثم بهرامی بویا)

$$\frac{x^2 + 2x - (x^2 - x - 2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{a(x-2)}{x-2}$$

$$\Rightarrow 3x + 2 = ax^2 - ax - 6a \Rightarrow ax^2 + (-a-3)x - 6a - 2 = 0$$

$$\text{مجموع جوابها} = 4 \Rightarrow -\frac{-a-3}{a} = 4 \Rightarrow 4a = a+3 \Rightarrow a=1$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۹ و ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کیا مقدس‌نیا)

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{یا} \\ x \leq -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} [1, +\infty) \cup \{-1\}$$

از طرفی می‌دانیم که $2\sqrt{x+1}$ و $\sqrt{x^2-1}$ دو عبارت همواره نامنفی‌اند که با یکدیگر جمع شده‌اند و حاصل برابر صفر شده است، پس حتماً هر دوی آن‌ها برابر صفر هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 2\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = -1$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیر هوشنگ فمسه)

اگر $\sqrt[3]{x^2} = A$ باشد، $\sqrt[3]{x^4} = A^2$ و $x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^4} = A^2$ می‌باشد. با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$2A - A^2 = 1 \Rightarrow A^2 - 2A + 1 = 0 \Rightarrow (A-1)^2 = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۹، ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی شهبازی)

$$|a| + a = 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow a \leq 0$$

$$|b-1| = 1-b \Rightarrow b-1 \leq 0 \Rightarrow b \leq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a \leq 0 \\ b \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a+b \leq 1 \Rightarrow a+b-1 \leq 0 \Rightarrow |a+b-1| = -a-b+1$$

$$b \leq 1 \Rightarrow b-2 \leq -1 \Rightarrow |b-2| = -b+2$$

$$|a+b-1| - |b-2| = (-a-b+1) - (-b+2) = -a-1 \quad \text{پس:}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علی شهبازی)

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-1| - 7 = 3 \Rightarrow |x-1| = 10 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 10 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow \max \\ x-1 = -10 \Rightarrow x = -9 \Rightarrow \min \end{cases} \\ |x-1| - 7 = -3 \Rightarrow |x-1| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 4 \Rightarrow x = 5 \\ x-1 = -4 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\max - \min = 11 - (-9) = 20$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

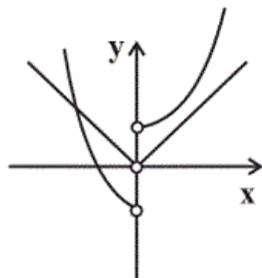
(علی شهبازی)

توابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = x^2 + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x > 0 \\ x^2 - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{|x|} = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

با رسم این دو نمودار داریم:


 \Rightarrow در یک نقطه متقاطع هستند

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

طبق نامساوی مثلثی به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$۱) \xrightarrow{b \rightarrow -b} |a - b| \leq |a| + |-b| \Rightarrow |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$۲) \xrightarrow{b \rightarrow -a+b} |a - a + b| \leq |a| + |-a + b|$$

$$\Rightarrow |b| \leq |a| + |a - b| \Rightarrow |a - b| \geq |b| - |a| \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow a-b} |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

$$\Rightarrow |a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b| \quad (۲)$$

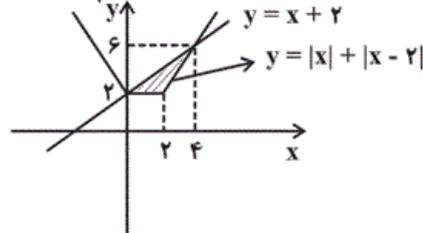
۴

۳

۲ ✓

۱

(قاسم کتابچی)



$$x + 2 = x + x - 2 \Rightarrow x = 4, \quad S_{\Delta} = \frac{2 \times (6 - 2)}{2} = 4$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳ ✓

۲

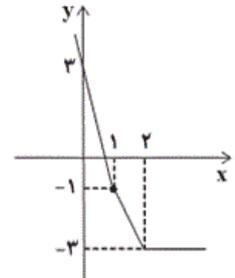
۱

(بوانبش نیکنام)

معادله را به صورت $|x - 2| + |x - 1| - 2x = k$ بازنویسی می‌کنیم.

نمودار $y = |x - 2| + |x - 1| - 2x$ را رسم می‌کنیم.

$$y = \begin{cases} 3 - 4x & ; x < 1 \\ 1 - 2x & ; 1 \leq x < 2 \\ -3 & ; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$



با توجه به نمودار درمی‌یابیم اگر $k \geq -3$ باشد، معادله جواب دارد.

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

ابتدا معادله عمودمنصف BC را می نویسیم:

$$C \text{ و } B \text{ : نقطهٔ وسط } M = \left(\frac{۲+۶}{۲}, \frac{-۱+۲}{۲} \right) = \left(۴, \frac{۱}{۲} \right)$$

$$m_{BC} = \frac{-۱-۲}{۲-۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow m' = -\frac{۴}{۳}$$

$$y - \frac{۱}{۲} = -\frac{۴}{۳}(x - ۴) \xrightarrow{\times ۶} ۸x + ۶y - ۳۵ = ۰$$

فاصله ارتفاع از عمودمنصف برابر با فاصله نقطه A از خط عمودمنصف است:

$$\frac{|۸(۱) + ۶(۱) - ۳۵|}{\sqrt{۶۴ + ۳۶}} = ۲/۱$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\Rightarrow m' = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{y=m'x+b'} y = \frac{۴}{۳}x + b'$$

$$\Rightarrow ۳y - ۴x - b = ۰, O(۰,۰) \Rightarrow d = \frac{|۳(۰) - ۴(۰) - b|}{\sqrt{۳^2 + ۴^2}} = \frac{|-b|}{۵}$$

$$\xrightarrow{d=\frac{۲}{۵}} \frac{|-b|}{۵} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow |-b| = ۲ \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۳y - ۴x - ۲ = ۰ \\ ۳y - ۴x + ۲ = ۰ \end{cases}$$

(مسایان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۳۱، ۳۳ و ۳۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$y = mx + b \Rightarrow \text{شیب خط} = m$$

$$(۲m - ۳)y = mx + a \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{m}{۲m - ۳}$$

$$\Rightarrow m \times \frac{m}{۲m - ۳} = -۱ \Rightarrow m^2 = -۲m + ۳$$

$$\Rightarrow m^2 + ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۳ & \checkmark \\ m = ۱ & \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -۳x + b \\ -۹y = -۳x + a \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری نقطه } M \text{ در دو معادله}}$$

$$\begin{cases} ۲ = -۳ + b \Rightarrow b = ۵ \\ -۱۸ = -۳ + a \Rightarrow a = -۱۵ \end{cases} \Rightarrow a + ۲b = -۱۵ + ۱۰ = -۵$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴ ✓

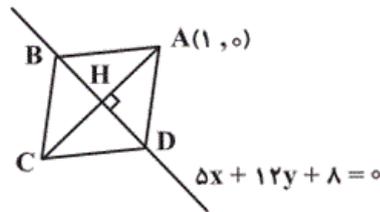
۳

۲

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

مطابق شکل زیر، فاصله رأس A تا قطر، برابر با ارتفاع مثلث ABD است. مساحت لوزی دو برابر مساحت مثلث ABD است.



$$AH = \frac{|\Delta(1) + 12(0) + 8|}{\sqrt{\Delta^2 + 12^2}} = \frac{13}{13} = 1$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABD} = \frac{1 \times 10}{2} = 5 \Rightarrow S_{\text{لوزی}} = 5 \times 2 = 10$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی کردی)

هر نقطه روی خط $y = x - 2$ به صورت $C(k, k - 2)$ است. بنابراین داریم:

$$|AC| = |BC| \Rightarrow \sqrt{(k+a)^2 + (k-4)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (k-a-2)^2}$$

$$\Rightarrow (k+a)^2 + (k-4)^2 = (k+2)^2 + (k-a-2)^2$$

$$\Rightarrow (k+a)^2 - (k-a-2)^2 = (k+2)^2 - (k-4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2a+2)(2k-2) = (6)(2k-2)$$

$$\Rightarrow 4(a+1)(k-1) - 12(k-1) = 0$$

$$\Rightarrow 4(k-1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 & \text{ق. ق.} \\ a=2 & \text{غ. ق. ق.} \end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $a=2$ ، A و B برهم منطبق می‌شوند.

(مسابان ۱- صفحه‌های ۷، ۲۰ تا ۲۲ و ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

چون دو خط $3x + 5y = 8$ و $5x - 3y = 2$ بر هم عمودند، مثلث حاصل قائم‌الزاویه است، لذا محل تلاقی سه ارتفاع روی رأس قائمه یعنی محل تلاقی همین دو خط است.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$$

$$x = 1, y = 1 \Rightarrow (1, 1)$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

 ۴

 ۳

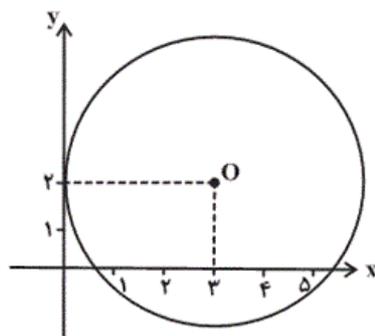
 ۲

 ۱

فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است:

$$r = \frac{|4(3) - 3(2) + 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

حالا نمودار دایره را رسم می‌کنیم:



این دایره دو نقطه مشترک با محور x ها و یک نقطه مشترک با محور y ها دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرحسین ابومحبوب)

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 40^\circ \quad (1)$$

$$\hat{N} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{CD} = 50^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\widehat{AB} + \widehat{AD}) - (\widehat{BC} + \widehat{CD}) = 90^\circ \\ \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = 360^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 2(\widehat{AB} + \widehat{AD}) = 450^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{AD} = 225^\circ \Rightarrow x = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} = 112.5^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(رضا بفشند)

اگر $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = x$ باشد، آن گاه داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{MNP}}{2} = \frac{x + 108^\circ}{2} \Rightarrow 2\alpha = x + 108^\circ \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\widehat{DNF} - \widehat{DEF}}{2} = \frac{(360^\circ - x) - x}{2} \Rightarrow \alpha = 180^\circ - x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2\alpha + \alpha = (x + 108^\circ) + (180^\circ - x) \Rightarrow 3\alpha = 288^\circ \Rightarrow \alpha = 96^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۴

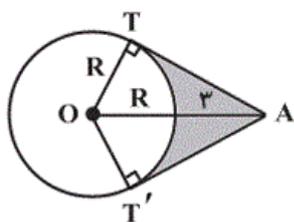
۳

۲

۱ ✓

(امروزه نما ممزه ای)

خطی که نقطه A را به مرکز دایره وصل می کند، نیمساز زاویه بین دو مماس است. از طرفی در مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع روبه رو به زاویه های ۳۰° و ۶۰°، به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است، بنابراین داریم:



$$\Delta AOT : O\hat{A}T = 30^\circ \Rightarrow OT = \frac{1}{2}OA$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}(R + 3) \Rightarrow R = 3 \Rightarrow OA = 6$$

$$A\hat{O}T = 60^\circ \Rightarrow AT = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$S_{OTAT'} = 2S_{\Delta AOT} = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{OTT'} \text{ قطاع} = \frac{\pi R^2 \times 120^\circ}{360^\circ} = \pi \times 3^2 \times \frac{1}{3} = 3\pi$$

بنابراین مساحت ناحیه محصور به دو مماس و دایره، برابر است با:

$$S = S_{OTAT'} - S_{OTT'} \text{ قطاع} = 9\sqrt{3} - 3\pi$$

(هندسه ۲ - صفحه های ۱۹ و ۲۰)

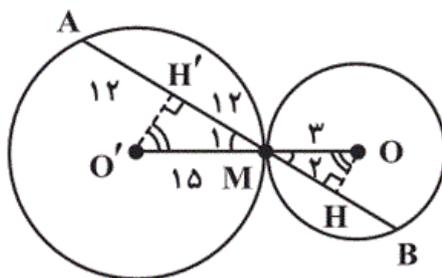
۴

۳ ✓

۲

۱

(امسان فیراللهی)



می دانیم در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می کند؛ پس $MH' = 12$ است. دو مثلث OMH و $O'MH'$ به حالت تساوی دو

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{MH}{MH'} \Rightarrow \frac{3}{15} = \frac{MH}{12}$$

زاویه با هم متشابه اند، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow MH = \frac{12}{5} = 2/4 \Rightarrow MB = 2 \times 2/4 = 4/8$$

(هندسه ۲ - صفحه های ۱۳ و ۲۰)

۴

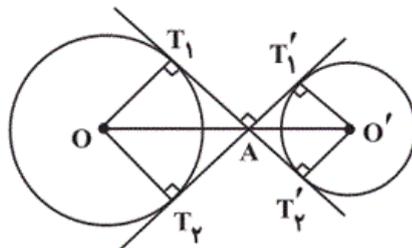
۳

۲ ✓

۱

(مفسر مفسر کریمی)

دو مثلث قائم‌الزاویه OAT_1 و OAT_2 به حالت وتر و یک ضلع
هم‌نهشت هستند، پس OA نیمساز زاویه T_1AT_2 است، یعنی هر کدام از
زوایای OAT_1 و OAT_2 برابر 45° هستند. به دلیل مشابه هر کدام از
زوایای $O'AT'_1$ و $O'AT'_2$ نیز برابر 45° هستند و در نتیجه داریم:



$$O\hat{A}T_1 = 45^\circ \Rightarrow OT_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} OA \xrightarrow{OT_1=R} OA = \sqrt{2} R \quad (1)$$

$$O'\hat{A}T'_1 = 45^\circ \Rightarrow O'T'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} O'A \xrightarrow{O'T'_1=R'} O'A = \sqrt{2} R' \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow OO' = \sqrt{2}(R + R')$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$= \sqrt{2(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{2(4R')^2 - (2R')^2}$$

$$= \sqrt{32R'^2 - 4R'^2} = \sqrt{28R'^2} = 2\sqrt{7} R'$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

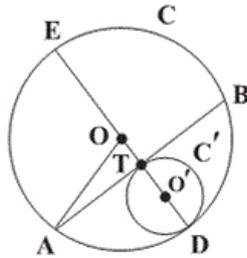
۴

۳

۲ ✓

۱

(اعداد رضا همزه‌ای)



$$S = S_{\text{دایره } C} - S_{\text{دایره } C'} = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$= \pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R + r) = 28\pi$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (R - r)(R + r) &= 28 \\ \text{خط‌المركزين } OO' &= R - r = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R + r = 7 \Rightarrow \begin{cases} R + r = 7 \\ R - r = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = 5/5 \\ r = 1/5 \end{cases}$$

$$OA = R = 5/5, \quad OT = R - 2r = 2/5$$

$$\Delta ATO: AT^2 = OA^2 - OT^2 = (5/5)^2 - (2/5)^2$$

$$= (5/5 - 2/5)(5/5 + 2/5) = 24 \Rightarrow AT = 2\sqrt{6} \Rightarrow AB = 4\sqrt{6}$$

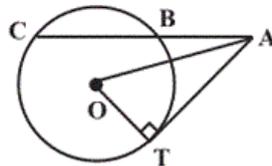
(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓



$$AT^2 = AB \times AC = 4 \times (4 + 5) = 36$$

$$\Rightarrow AT = 6$$

$$\Delta OAT: OA^2 = AT^2 + OT^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow OA = 3\sqrt{5}$$

$$\frac{OA}{AT} = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۴ ✓

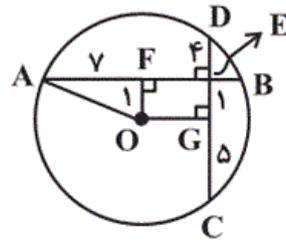
۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

از نقطه O (مرکز دایره) بر دو وتر AB و CD، عمودهای OF و OG را رسم می‌کنیم. طبق روابط طولی در دایره داریم:



$$AE \times EB = CE \times ED$$

$$\Rightarrow 12 \times EB = 6 \times 4 \Rightarrow EB = 2$$

بنابراین $AB = 12 + 2 = 14$ است. با توجه به این که قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $AF = FB = 7$ است. از طرفی $CD = 4 + 6 = 10$ و در نتیجه $CG = GD = 5$ می‌باشد. بنابراین $GE = 6 - 5 = 1$ است. مطابق شکل، $OF = GE = 1$ و داریم:

$$\Delta OAF : OA^2 = OF^2 + AF^2 = 1 + 49 = 50 \Rightarrow R^2 = 50$$

$$\Rightarrow S_{\text{دایره}} = 50\pi$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ و ۱۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$S = \frac{4 \times 12}{2} = 24$$

$$2P = 4 \times 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10} \Rightarrow P = 4\sqrt{10}$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{24}{4\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

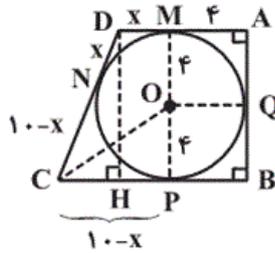
۳ ✓

۲

۱

(مهرداد ملوندی)

طبق فرض چهارضلعی ABCD محیطی است. از طرفی طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر دایره برابر یکدیگرند، بنابراین اگر $DN = x$ باشد، آن‌گاه $DM = x$ و $CP = CN = 10 - x$ است. با توجه به شکل داریم:



$$\begin{aligned} \Delta DHC : CH^2 &= CD^2 - DH^2 \\ &= 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow CH = 6 \end{aligned}$$

$$CP = CH + PH \Rightarrow 10 - x = 6 + x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

مطابق شکل رأس C دورترین رأس ذوزنقه نسبت به مرکز دایره محاطی (نقطه هم‌رسی نیمسازها) است، بنابراین داریم:

$$\Delta OPC : OC^2 = OP^2 + CP^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow OC = 4\sqrt{5}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

۳

۲

۱

(امیر حسین ابومصوب)

گزاره $(p \wedge \sim q)$ تنها در صورتی درست است که هر دو گزاره p و $\sim q$ درست باشند. در این صورت گزاره q نادرست و در نتیجه $\sim p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است. با توجه به درستی هر دو گزاره $(p \wedge \sim q)$ و $(q \Rightarrow \sim p)$ ، ارزش ترکیب شرطی آن‌ها نیز درست است. در سایر حالت‌ها گزاره $p \wedge \sim q$ نادرست و در نتیجه گزاره شرطی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)$ به انتفای مقدم درست است، پس ارزش این گزاره همواره درست است.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱

گزینه «۲»: گزاره سوری درست است، چون $x = 3$ در این عبارت صدق می‌کند. گزینه «۳»: گزاره سوری نادرست است، چون به ازای $x = 1$ ، k برابر صفر می‌شود که عضو \mathbb{N} نیست.

گزینه «۴»: گزاره سوری نادرست است، چون در معادله $\Delta = -23$ ، $3x^2 - 5x + 4 = 0$ است و معادله ریشه ندارد.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴

۳

۲

۱

-۱۴۳

(نرا صالح پور)

فرض کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد. می‌دانیم تعداد

زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، برابر 2^n است، پس داریم:

$$2^{n-3} = 2^n - 224 \Rightarrow 2^n - 2^{n-3} = 224 \Rightarrow 2^{n-3}(2^3 - 1) = 224$$

$$\Rightarrow 7 \times 2^{n-3} = 224 \Rightarrow 2^{n-3} = 32 \Rightarrow n-3 = 5 \Rightarrow n = 8$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۴۴

(امسان فیراللهی)

$$[A \cap (B \cup C)] \subseteq A \quad (1) \quad A \subseteq [(B - C) \cup A] \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow [A \cap (B \cup C)] \subseteq [(B - C) \cup A]$$

$$\Rightarrow [A \cap (B \cup C)] - [(B - C) \cup A] = \emptyset$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۴

۳

۲

۱✓

-۱۴۵

(نوید مبینی)

طبق تعریف دو مجموعه A و B داریم:

$$A = \{-1, 1, 3\}, B = \{3, 0, -1\} \Rightarrow A \cup B = \{-1, 0, 1, 3\}$$

افزاده‌هایی از مجموعه $A \cup B$ که در آن دو عدد ۱ و ۳ در یک

زیرمجموعه قرار نگیرند، عبارت‌اند از:

۱) $\{1\} \{3\} \{0\} \{-1\}$

۲) $\{1\} \{3\} \{0, -1\}$

۳) $\{1\} \{0\} \{3, -1\}$

۴) $\{1\} \{-1\} \{0, 3\}$

۵) $\{3\} \{0\} \{1, -1\}$

۶) $\{3\} \{-1\} \{0, 1\}$

۷) $\{1\} \{-1, 0, 3\}$

۸) $\{3\} \{1, 0, -1\}$

۹) $\{1, -1\} \{0, 3\}$

۱۰) $\{1, 0\} \{3, -1\}$

(آمار و احتمال - صفحه ۲۱)

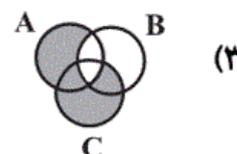
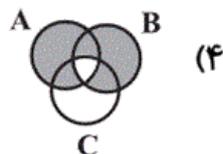
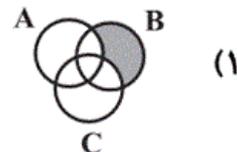
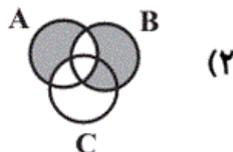
۴✓

۳

۲

۱

شکل هر گزینه را رسم می کنیم:



همان طور که مشاهده می شود، ناحیه هاشورخورده در شکل صورت سؤال معادل ناحیه هاشورخورده در گزینه «۳» است.

(آمار و احتمال - صفحه های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱

بررسی گزینه ها:

$$B' - A' = B' \cap A = A \cap B' = A - B$$

گزینه «۱»:

$$(A - B) \cap (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A')$$

گزینه «۲»:

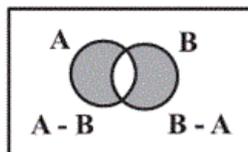
$$= \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} \cap \underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} = \emptyset$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$

گزینه «۳»:

$$= A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A$$

گزینه «۴»: مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ ، معادل ناحیه هاشورخورده در نمودار ون شکل زیر است که این ناحیه برابر اجتماع دو مجموعه $(B - A)$ و $(A - B)$ می باشد.



(آمار و احتمال - صفحه های ۲۶ تا ۳۲)

۴

۳

۲

۱

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} & (A - B') \cup (A - C') \cup [A - (B \cup C)] \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup [A \cap (B \cup C)'] \\ &= [A \cap (B \cup C)] \cup [A \cap (B \cup C)'] = A \cap \underbrace{[(B \cup C) \cup (B \cup C)']}_U = A \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

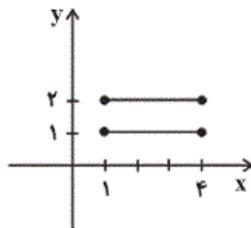
۲

۱ ✓

(نزا صالح‌پور)

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow A = [1, 4]$$

$$2x - 1 < 5 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} B = \{1, 2\}$$

پس نمودار $A \times B$ به صورت زیر خواهد شد:

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(فرشاد فرامرزی)

ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را می‌نویسیم:

$$A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\} \Rightarrow A = \{1, 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = x\} \Rightarrow B = \{-1, 0, 1\}$$

سپس $B \times A$ را تشکیل داده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$B \times A = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (-1, 4), (0, 4), (1, 4)\}$$

اگر نقاط دورتر را رئوس یک مستطیل در نظر بگیریم، فاصله دورترین نقاط نسبت به هم، برابر طول قطر مستطیل می‌باشد:

۴

۳ ✓

۲

۱