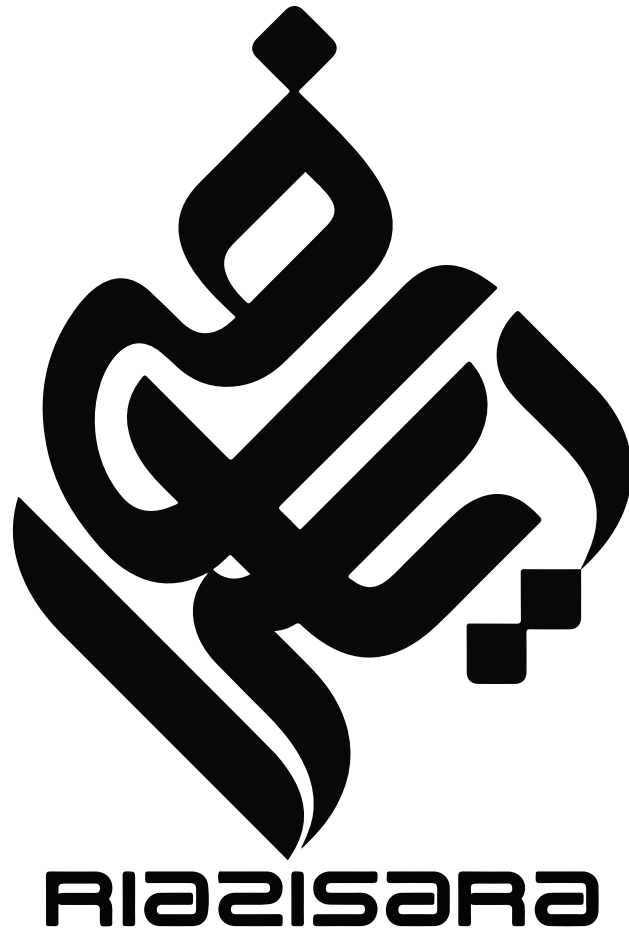




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



حسابان ۱، قدر مطلق و ویژگی های آن

۶۱- اگر $x^2 < 2x$ باشد، حاصل عبارت $|x| + |x - 2|$ کدام است؟

- (۱) $-3x + 2$ (۲) $3x - 2$ (۳) $-x - 2$ (۴) $x + 2$

۶۲- معادله $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x^2 = 1$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۳- نمودار تابع $f(x) = -x + \frac{x}{|x|}$ کدام خط زیر را در دو نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) $y = \frac{1}{3}$ (۲) $y = 3$ (۳) $y = -2$ (۴) $y = 1$

۶۴- اگر مجموعه جواب نامعادله $|2x - 3| < 1$ بازه (a, b) و مجموعه جواب نامعادله $|x - m| \geq n$ به صورت $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ باشد، حاصل $2m - n$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

۶۵- تعداد جواب‌های معادله $|x^4 - 1| + |1 - x^4| = -|x|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۶۶- تعداد جواب‌های معادله $|x - 2| + |x - 3| = 2\sqrt{-x^2 + 5x - 6}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

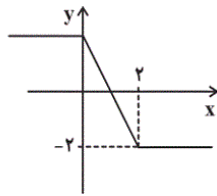
۶۷- در مجموعه جواب معادله $|x^2 - 1| + |x - 1| = |x^2 - x|$ ، چند عدد صحیح یک‌رقمی قرار دارد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۶۸- تعداد جواب‌های معادله $|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - x + 1| = x^2 - 2x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) جواب ندارد.

۶۹- نمودار تابع $y = |x - a| + b|x - c|$ به صورت زیر است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

۷۰- اگر خط $y = m$ نمودار تابع $y = |x - 1| + |x - 2|$ را در دو نقطه قطع کند، یک دوزنقه به مساحت $\frac{3}{2}$ تشکیل می‌شود. مقدار m کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) ۳

۷۱- به ازای چه مقادیری از m معادله $|2x| + mx = 1$ دو جواب دارد؟

(۲) $|m| < 1$

(۱) $|m| > 1$

(۴) $|m| < 2$

(۳) $|m| > 2$

۷۲- اگر $f(x) = (x - 2)(1 - \frac{1}{|x - 2|})$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح k معادله $|f(x)| = k$ دارای ۳ جواب است؟

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ مقدار

حسابان ۱، آشنایی با هندسه تحلیلی - ۸ سوال

۷۳- دو نقطه $(2, a - 3)$ و $(-2a, a + 1)$ دو سر قطر یک دایره می‌باشند و مرکز دایره روی نیمساز ناحیه اول و سوم است. شعاع دایره کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $4\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۱) ۴

۷۴- اگر نقطه $(1, 3)$ یکی از رئوس لوزی $ABCD$ و $y = 3x + 5$ و $0 = 2x - 5y - 1$ معادلات دو ضلع آن باشند، محیط این لوزی کدام است؟

(۲) $\frac{26\sqrt{10}}{5}$

(۱) $4\sqrt{29}$

(۴) ۲۰

(۳) $4\sqrt{5}$

۷۵- نقطه A واقع بر خط $y = 2x - 1$ ، کم‌ترین فاصله را از مبدأ مختصات دارد. طول نقطه تصویر A بر محور x ها کدام است؟

(۲) $-1/2$

(۱) -۱

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $0/4$

۷۶- اگر نقاط $A(2, 3)$ ، $B(6, 2k-3)$ و $C(k, -1)$ رئوس مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) باشند، فاصله پای میانه وارد بر وتر تا مبدأ مختصات چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{26}$ (۲) $\sqrt{29}$ (۳) $\sqrt{34}$ (۴) $\sqrt{37}$

۷۷- خط به معادله $mx + ny = 4$ عمود منصف پاره خط AB است. اگر $A(3, -3)$ و $B(-5, 1)$ باشند، حاصل $\frac{m}{n} + n$ کدام است؟

- (۱) -4 (۲) 4 (۳) صفر (۴) 8

۷۸- اگر فاصله نقطه $A(1, a)$ از خط $y = x - b$ برابر $\sqrt{2}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 1 (۲) 3 (۳) -3 (۴) 2

۷۹- اگر $A(2, m)$ ، $B(4, 2)$ و $C(1, 1)$ رئوس مثلث متساوی‌الساقین ABC باشند ($AB = AC$)، محیط مثلث چند برابر طول ساق آن است؟

- (۱) $3 + \sqrt{3}$ (۲) $2 + \sqrt{2}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) $3 + \sqrt{2}$

۸۰- خط d موازی نیمساز ربع اول و سوم و به فاصله $2\sqrt{2}$ از آن قرار دارد. اگر عرض از مبدأ خط d عددی منفی باشد، این خط، خط $y + 3x = 0$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

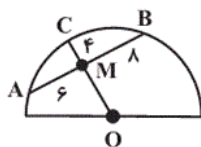
- (۱) 1 (۲) 2 (۳) -1 (۴) -2

هندسه ۲، رابطه های طولی در دایره -

۱۰۱- طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، برابر ۱۲ و طول خط‌المركزین آن‌ها ۱۵ است. شعاع دایره بزرگ‌تر کدام است؟

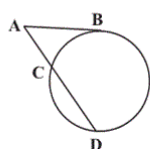
- (۱) 9 (۲) 10 (۳) 11 (۴) 12

۱۰۲- مساحت نیم‌دایره شکل مقابل کدام است؟ (O مرکز نیم‌دایره است.)



- (۱) 32π (۲) 18π (۳) 64π (۴) 36π

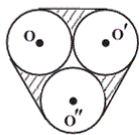
۱۰۳- در شکل زیر، پاره خط AB به طول ۸ در نقطه B بر دایره مماس است. اگر $AC = 4$ و $\widehat{CD} = 120^\circ$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



- (۱) 4 (۲) 5 (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

- ۱۰۴- دو دایره متقاطع $C(O, 5)$ و $C'(O', 3)$ مفروض‌اند. به ازای بیش‌ترین مقدار صحیح OO' ، خطی که از O' و نقطه تقاطع دو دایره می‌گذرد، وتری با کدام طول در دایره بزرگ‌تر ایجاد می‌کند؟
 (۱) $4/5$ (۲) $5/5$ (۳) 5 (۴) 6

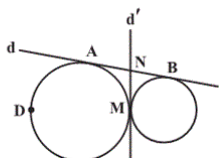
- ۱۰۵- در شکل زیر، O ، O' و O'' مراکز سه دایره با شعاع‌های برابر R هستند. مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟ (دایره‌ها دایره دو بر هم مماس‌اند.)



- (۱) $\frac{3}{2}R^2(4-\pi)$ (۲) $\frac{1}{2}R^2(4-\pi)$
 (۳) $3R^2(4-\pi)$ (۴) $R^2(4-\pi)$

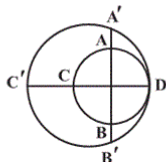
- ۱۰۶- دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 4)$ مماس خارج‌اند. اگر دایره $C''(O'', r)$ کوچک‌ترین دایره‌ای باشد که بر این دو دایره و مماس مشترک خارجی آن‌ها مماس است، آن‌گاه مقدار r کدام است؟
 (۱) $1/44$ (۲) $1/56$ (۳) $1/2$ (۴) $1/8$

- ۱۰۷- در شکل زیر، دو دایره در نقطه M بر هم مماس‌اند و خطوط d و d' به ترتیب مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره هستند. اگر $\widehat{ADM} = 29^\circ$ باشد، اندازه زاویه ABM کدام است؟



- (۱) 20° (۲) 35°
 (۳) 55° (۴) 70°

- ۱۰۸- در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره کوچک‌تر بر هم عمودند. اگر $AA' = 3$ و $CC' = 8$ باشد، طول قطر دایره کوچک‌تر کدام است؟



- (۱) 6
 (۲) 8
 (۳) 9
 (۴) 10

هندسه ۲، چندضلعی محاطی و محیطی - ۲ سوال -

- ۱۰۹- در پنج‌ضلعی محاطی $ABCDE$ ، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $AB = AE$ و $BC = CD = DE$ است. اگر O مرکز دایره محیطی این پنج‌ضلعی باشد، آن‌گاه مجموع فواصل نقطه O از اضلاع AB و AE ، چند برابر مجموع فواصل نقطه O از اضلاع BC ، CD و DE است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

- ۱۱۰- اگر مساحت یک هشت‌ضلعی محیطی برابر $24(\sqrt{2}-1)$ و شعاع دایره محیطی آن برابر $\sqrt{2}$ باشد، آن‌گاه محیط این هشت‌ضلعی کدام است؟
 (۱) $24(\sqrt{2}-1)$ (۲) $24(2-\sqrt{2})$ (۳) $12(\sqrt{2}-1)$ (۴) $12(2-\sqrt{2})$

حسابان ۱- سوالات موازی، معادلات گویا و گنگ - ۸ سوال -

۸۱- مجموع یک عدد با دو برابر معکوسش $\frac{17}{6}$ شده است. سه برابر این عدد کدام می تواند باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۸۲- مجموع یک عدد با جذر دو برابرش، $\frac{5}{8}$ می شود. این عدد کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\frac{1}{32}$ (۴)

$\frac{1}{16}$ (۳)

۸۳- تعداد جواب های معادله $\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{-x+6}{2x^2+2x+2} + \frac{1}{4x-4}$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ معادله جواب ندارد.

۳ (۳)

۸۴- تعداد جواب های معادله $1 = \left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)^2$ کدام است؟

۱ (۲)

صفر (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

۸۵- تعداد جواب های معادله $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x-x^2} + 1$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۸۶- مجموع جواب های معادله $5 = \sqrt{x^2+2x-1} + \sqrt{x^2+2x+4}$ کدام است؟

-۳ (۲)

۵ (۱)

-۲ (۴)

-۴ (۳)

۸۷- قدرمطلق تفاضل جواب های معادله $\frac{3x-3}{\sqrt{x+1}} = x+1-2\sqrt{x}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۸۸- جواب‌های معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} = 1$ در کدام محدوده قرار دارند؟

(۲) $x \leq 1$

(۱) $x \geq 3$

(۴) $x \geq 2$

(۳) $1 \leq x \leq 2$

حسابان ۱ - سوالات موازی، قدر مطلق و ویژگی‌های آن - ۱۲ سوال -

۸۹- اگر $x^2 < 2x$ باشد، حاصل عبارت $|x-2| + |x|$ کدام است؟

(۲) $3x-2$

(۱) $-3x+2$

(۴) $x+2$

(۳) $-x-2$

۹۰- معادله $\sqrt{x^2-2x+1} + x^2 = 1$ چند جواب دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۹۱- نمودار تابع $f(x) = -x + \frac{x}{|x|}$ کدام خط زیر را در دو نقطه قطع می‌کند؟

(۴) $y=1$

(۳) $y=-2$

(۲) $y=3$

(۱) $y=\frac{1}{3}$

۹۲- اگر مجموعه جواب نامعادله $|2x-3| < 1$ بازه (a, b) و مجموعه جواب نامعادله $|x-m| \geq n$ به صورت $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

باشد، حاصل $2m-n$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) $\frac{5}{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۲

۹۳- تعداد جواب‌های معادله $|x^4-1| + |1-x^4| = -|x|$ کدام است؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۹۴- تعداد جواب‌های معادله $|x-2| + |x-3| = 2\sqrt{-x^2+5x-6}$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۹۵- در مجموعه جواب معادله $|x^2-1| + |x-1| = |x^2-x|$ ، چند عدد صحیح یکره‌ای قرار دارد؟

(۴) ۸

(۳) ۱۰

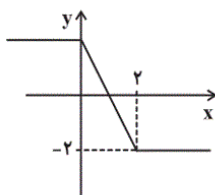
(۲) ۹

(۱) ۱۱

۹۶- تعداد جواب‌های معادله $|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - x + 1| = x^2 - 2x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) جواب ندارد.

۹۷- نمودار تابع $y = |x - a| + b|x - c|$ به صورت زیر است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

۹۸- اگر خط $y = m$ نمودار تابع $y = |x - 1| + |x - 2|$ را در دو نقطه قطع کند، یک ذوزنقه به مساحت $\frac{3}{2}$ تشکیل می‌شود. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$

۹۹- به ازای چه مقادیری از m معادله $|mx + 2x| = 1$ دو جواب دارد؟

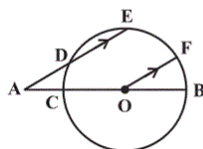
- (۱) $|m| > 1$ (۲) $|m| < 1$ (۳) $|m| > 2$ (۴) $|m| < 2$

۱۰۰- اگر $f(x) = (x - 2)(1 - \frac{1}{|x - 2|})$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح k معادله $|f(x)| = k$ دارای ۳ جواب است؟

- (۱) هیچ مقدار (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

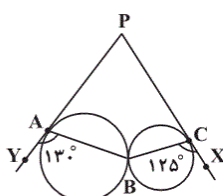
هندسه ۲- سوالات موازی، مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره - ۲ سوال -

۱۲۹- در شکل زیر، O مرکز دایره و $AE \parallel OF$ است. اگر $\hat{A} = 30^\circ$ و $\widehat{DE} = 60^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{CD}$ کدام است؟



- (۱) 20°
(۲) 30°
(۳) 40°
(۴) 45°

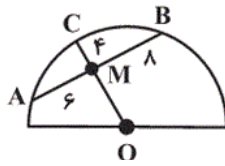
۱۳۰- در شکل زیر، دو دایره در نقطه B مماس خارج هستند و PA و PC بر دایره‌ها مماس‌اند. اگر $\hat{BAY} = 130^\circ$ و $\hat{BCX} = 125^\circ$ باشد، زاویه $\hat{APC}$ کدام است؟



- (۱) 110° (۲) 130°
(۳) 145° (۴) 150°

۱۲۱- طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، برابر ۱۲ و طول خط المרכזین آنها ۱۵ است. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

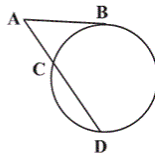
- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲



۱۲۲- مساحت نیم دایره شکل مقابل کدام است؟ (O مرکز نیم دایره است.)

- (۱) 32π (۲) 18π (۳) 64π (۴) 36π

۱۲۳- در شکل زیر، پاره خط AB به طول ۸ در نقطه B بر دایره مماس است. اگر $AC = 4$ و $\widehat{CD} = 120^\circ$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

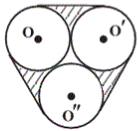


- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۱۲۴- دو دایره متقاطع $C(O, 5)$ و $C'(O', 3)$ مفروض اند. به ازای بیشترین مقدار صحیح OO' ، خطی که از O' و نقطه تقاطع دو دایره می گذرد، وتری با کدام طول در دایره بزرگتر ایجاد می کند؟

- (۱) $4/5$ (۲) $5/5$ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۵- در شکل زیر، O، O' و O'' مراکز سه دایره با شعاع های برابر R هستند. مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟ (دایره ها دایره دو بر هم مماس اند.)

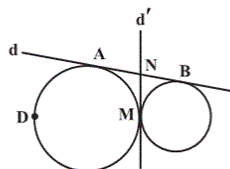


- (۱) $\frac{3}{2}R^2(4-\pi)$ (۲) $\frac{1}{2}R^2(4-\pi)$ (۳) $3R^2(4-\pi)$ (۴) $R^2(4-\pi)$

۱۲۶- دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 4)$ مماس خارج اند. اگر دایره $C''(O'', r)$ کوچک ترین دایره ای باشد که بر این دو دایره و مماس مشترک خارجی آنها مماس است، آنگاه مقدار r کدام است؟

- (۱) $1/44$ (۲) $1/56$ (۳) $1/2$ (۴) $1/8$

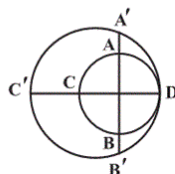
۱۲۷- در شکل زیر، دو دایره در نقطه M بر هم مماس اند و خطوط d و d' به ترتیب مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره هستند.



اگر $\widehat{ADM} = 29^\circ$ باشد، اندازه زاویه ABM کدام است؟

- (۱) 20° (۲) 35° (۳) 55° (۴) 70°

۱۲۸- در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره کوچک تر بر هم عمودند. اگر $AA' = 3$ و $CC' = 8$ باشد، طول قطر دایره کوچک تر کدام است؟



- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۴۱- مجموعه $A = \{3, 7, 10, 12, 15\}$ را در نظر بگیرید. اگر $\{3, 7, x-2\}$ و $\{15, y+5\}$ یک افراز برای A باشد، آن گاه بیشترین مقدار xy کدام است؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۷۸ (۳) ۸۴ (۴) ۸۸

۱۴۵- اگر $A = \{k \in \mathbb{N} \mid |k-1| < 2\}$ ، $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n^3 = 4n\}$ و $C = \{m \in \mathbb{N} \mid \frac{m^2-9}{m-1} < 0\}$ باشند، آن گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $A = B \neq C$ (۲) $A = C \neq B$ (۳) $A \neq B = C$ (۴) $A = B = C$

۱۴۶- اگر A ، B و C سه مجموعه دوه دو متمایز و $A \cup B \subseteq A \cap C$ باشد، آن گاه کدام یک از مجموعه های زیر با سایرین متفاوت است؟

- (۱) $B - A$ (۲) $A - C$ (۳) $B - C$ (۴) $C - B$

۱۴۷- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 4, 5\}$ و $C = \{3, 4, 5, 7\}$ باشد، آن گاه چند مجموعه مانند X وجود دارد به گونه ای که $A \cap X = \emptyset$ ، $|B \cap X| = 1$ و $X \subseteq C$ باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۸- اگر $\forall x \in U; (x \notin C \Rightarrow x \notin A) \wedge (x \notin B \Rightarrow x \in A)$ ؛ آن گاه کدام گزینه همواره درست است؟ (A, B, C) سه مجموعه دلخواه و U مجموعه مرجع است.

- (۱) $\forall x \in U; x \notin C \Rightarrow x \notin B$ (۲) $\forall x \in U; x \notin B \Rightarrow x \notin C$ (۳) $\forall x \in U; x \in C \Rightarrow x \notin B$ (۴) $\forall x \in U; x \notin C \Rightarrow x \in B$

۱۴۹- اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ باشد، چه تعداد از گزاره های زیر همواره درست است؟

(الف) تمام اعضای A ، زیرمجموعه ای از آن نیز هستند.

(ب) تمام زیرمجموعه های A ، عضوی از آن نیز هستند.

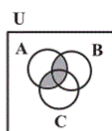
(پ) از میان هر دو عضو دلخواه A ، یکی قطعاً زیرمجموعه دیگری است.

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

آمار و احتمال ، قوانین اعمال بین مجموعه ها (جبرمجموعه ها) - ۴ سوال -

۱۵۰- اگر A ، B و C سه مجموعه غیر تهی و $(A \cap B)' \cap (A \cup B') \cap (B \cup C) = C$ باشد، کدام یک از مجموعه های زیر قطعاً برابر تهی است؟

- (۱) $B \cap C$ (۲) $B - C$ (۳) $A \cap C$ (۴) $A - C$



۱۴۲- قسمت هاشورخورده در نمودار ون مقابل، کدام یک از مجموعه های زیر را نشان می دهد؟

- (۱) $A \cap B' \cap C'$ (۲) $A - (B' \cap C')$ (۳) $A - (B \cap C')$ (۴) $[(A \cap B) - C] \cup [C - (A \cap B)]$

۱۴۳- حاصل عبارت $(A' \cap B) \cup [((A \cap B) - B') \cap (A \cup B)]$ همواره برابر کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) A' (۴) B'

۱۴۴- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، متمم مجموعه $[A' \cap (A \cup B)] \cap [A \cap (A' \cup B')]$ همواره برابر کدام است؟

- (۱) $\emptyset$ (۲) A (۳) A' (۴) U

هندسه ۲- گواه، رابطه های طولی در دایره - ۱۰ سوال -

۱۱۱- فاصله دورترین نقطه دایره ای از نقطه P برابر ۹ سانتی متر و فاصله نقطه P تا مرکز این دایره $\frac{13}{2}$ سانتی متر است. طول مماس رسم شده از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{6}$

۱۱۲- از نقطه M واقع در خارج دایره ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیک ترین نقطه دایره $(\sqrt{2}-1)4$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

۱۱۳- دوزنقه ای با طول قاعده های ۸ و ۱۲ و اندازه یک ساق برابر ۵ واحد، مفروض است. اگر این دوزنقه قابل محاط در دایره باشد، طول قطعه مماسی که از نقطه تلاقی دو ساق بر دایره محیطی آن رسم می شود، کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $5\sqrt{6}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $8\sqrt{3}$

۱۱۴- اگر شعاع دو دایره C_1 و C_2 به ترتیب $R_1 = 7$ و $R_2 = 1$ و طول خط المרכזین آنها $d = 2$ باشد، اندازه شعاع بزرگترین دایره ای که بر هر دو دایره مماس باشد، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۴

۱۱۵- دو دایره با شعاع های نابرابر و به مرکزهای O و O' مماس خارج اند. دایره ای به قطر OO' ، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) متقاطع (۲) مماس (۳) متخارج (۴) نامشخص

۱۱۶- طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره بزرگ تر است، شعاع دایره بزرگ تر چند برابر شعاع دایره کوچک تر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $1/5$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

۱۱۷- مطابق شکل زیر، دو دایره به شعاع های ۲ و ۸ مماس بیرون هستند و بر اضلاع مستطیل نیز مماس اند. محیط مستطیل کدام است؟



- (۱) ۶۸ (۲) ۷۲ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴

۱۱۸- شعاع دو دایره خارج از هم به ترتیب $\frac{۲۲}{۵}$ و $\frac{۷}{۵}$ سانتی متر است. اگر زاویه بین مماس مشترک داخلی و خط‌المركزین دو دایره ۳۰° درجه باشد، طول خط‌المركزین دو دایره چند سانتی متر است؟

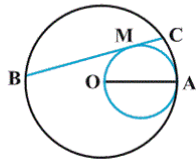
(۴) $\frac{۶۲}{۵}$

(۳) ۶۰

(۲) $\frac{۵۷}{۵}$

(۱) ۵۵

۱۱۹- در دایره‌ای به شعاع OA، وتر BC در نقطه M بر دایره‌ای به قطر OA مماس است. مقدار $MB \times MC$ برابر کدام است؟



(۱) MO^2

(۲) MA^2

(۳) OA^2

(۴) $MA \cdot MO$

۱۲۰- دو دایره با شعاع‌های ۱۲ و ۹ واحد مماس درونی‌اند، اندازه بزرگ‌ترین قطعه مماسی که یک سر آن بر روی دایره بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه تماس) بر روی دایره کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟

(۴) $۸\sqrt{۳}$

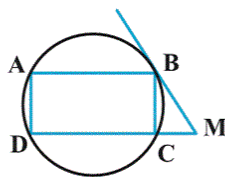
(۳) ۱۲

(۲) $۸\sqrt{۲}$

(۱) ۹

هندسه ۲- گواه-سوالات موازی، مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره - ۲ سوال

۱۳۹- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD مستطیل است. مماس رسم شده در نقطه B بر دایره، امتداد ضلع DC را در نقطه M قطع می‌کند. اگر $\angle BMC = \alpha$ باشد، آن‌گاه زاویه بین دو قطر مستطیل کدام است؟



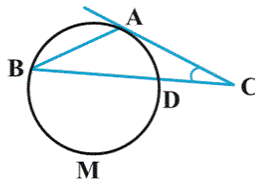
(۱) α

(۲) 2α

(۳) $90^\circ - \alpha$

(۴) $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

۱۴۰- در شکل زیر، مماس AC با وتر AB از دایره برابرند. اگر کمان $\widehat{DMB}$ برابر ۲۲۲° درجه باشد، زاویه C چند درجه است؟



(۱) ۲۱

(۲) ۲۲

(۳) ۲۳

(۴) ۲۴

هندسه ۲- گواه-سوالات موازی، رابطه‌های طولی در دایره - ۸ سوال

۱۳۱- فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی متر و فاصله نقطه P تا مرکز این دایره $\frac{۱۳}{۴}$ سانتی متر است. طول مماس رسم شده از نقطه P بر این دایره کدام است؟

(۴) $\sqrt{۶}$

(۳) $\sqrt{۱۳}$

(۲) ۶

(۱) $۳\sqrt{۲}$

۱۳۲- از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین نقطه دایره $۴(\sqrt{۲} - ۱)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

(۴) ۳

(۳) $۲\sqrt{۲}$

(۲) ۲

(۱) $\sqrt{۲}$

۱۳۳- در یک دایره به شعاع $2\sqrt{6}$ ، نقطه M قطر AB را به نسبت ۱ و ۳ و وتر CD را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. طول وتر CD برابر با کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۳۴- اگر شعاع دو دایره C_1 و C_2 به ترتیب $R_1 = 7$ و $R_2 = 1$ و طول خط‌المركزين آنها $d = 2$ باشد، اندازه شعاع بزرگترین دایره‌ای که بر هر دو دایره مماس باشد، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۴

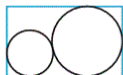
۱۳۵- دو دایره با شعاع‌های نابرابر و به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO'، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) متقاطع (۲) مماس (۳) متخارج (۴) نامشخص

۱۳۶- طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است، شعاع دایره بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $1/5$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

۱۳۷- مطابق شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۸ مماس برون هستند و بر اضلاع مستطیل نیز مماس‌اند. محیط مستطیل کدام است؟



- (۱) ۶۸ (۲) ۷۲ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴

۱۳۸- شعاع دو دایره خارج از هم به ترتیب $22/5$ و $7/5$ سانتی‌متر است. اگر زاویه بین مماس مشترک داخلی و خط‌المركزين دو دایره 30° درجه باشد، طول خط‌المركزين دو دایره چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۵۵ (۲) $57/5$ (۳) ۶۰ (۴) $62/5$

۶۱-

(عمید معنوی)

ابتدا محدوده x را به دست می‌آوریم: $x^2 < 2x \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$

$$2\left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{x-2}{-}\right| = 2x + (2-x) = x+2 \quad \text{پس داریم:}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

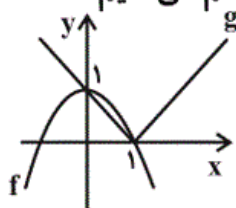
۶۲-

(سینا ممبرپور)

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x-1)^2} = 1-x^2 \Rightarrow |x-1| = 1-x^2$$

نمودار دو تابع $f(x) = 1-x^2$ و $g(x) = |x-1|$ را رسم می‌کنیم:



f و g فقط در دو نقطه به طول‌های $x=0$ و $x=1$ متقاطع‌اند. پس

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

معادله دو جواب دارد.

۴

۳

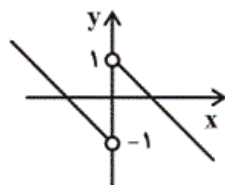
۲ ✓

۱

۶۳-

(امید شیرینی‌نژاد)

ابتدا نمودار $f(x) = -x + \frac{x}{|x|}$ را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x > 0 : f(x) = 1 - x \\ x < 0 : f(x) = -1 - x \end{cases}$$

طبق شکل و با توجه به گزینه‌ها تنها خطی که نمودار را در دو نقطه قطع

می‌کند $y = \frac{1}{3}$ است و خطوط $y = 3$ ، $y = -2$ و $y = 1$ هر یک نمودار

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند.

۴

۳

۲

۱ ✓

$$|2x-3| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-3 < 1 \Rightarrow 2 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$|x-m| \geq n \Rightarrow \begin{cases} x-m \geq n \Rightarrow x \geq m+n \Rightarrow m+n=b=2 \\ x-m \leq -n \Rightarrow x \leq m-n \Rightarrow m-n=a=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n=2 \\ m-n=1 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{3}{2}, n=\frac{1}{2} \Rightarrow 2m-n=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳✓

۲

۱

$|x^4-1|+|x^4-1|=0$ است. بنابراین سمت راست

تساوی نیز باید صفر باشد، یعنی $|x|=0$ در نتیجه $x=0$ باشد. از آنجایی که این جواب در فاصله $[-1, 1]$ قرار دارد، قابل قبول است. از این رو معادله تنها دارای جواب $x=0$ است.

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲✓

۱

(بهانفش نیکنام)

$$-x^2+5x-6 \geq 0 \Rightarrow -(x-2)(x-3) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 \leq x \leq 3$$

حال با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق‌ها وقتی که $2 \leq x \leq 3$ می‌باشد، داریم:

$$(x-2)+(3-x)=2\sqrt{-x^2+5x-6} \Rightarrow 2\sqrt{-x^2+5x-6}=1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} -4x^2+20x-25=0 \Rightarrow 4x^2-20x+25=0$$

$$\Rightarrow (2x-5)^2=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \text{ قابل قبول}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲✓

۱

$|x^2 - 1| + |x - 1| = |x^2 - x| \Rightarrow |x^2 - 1| + |1 - x| = |x^2 - x|$
 توجه کنید که تساوی $|U| + |V| = |U + V|$ تنها در حالتی که U و V مختلف‌العلامت نباشند یعنی $UV \geq 0$ برقرار است. پس:

$$(x^2 - 1)(1 - x) \geq 0 \Rightarrow -(x^2 - 1)(x - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2(x + 1) \leq 0 \xrightarrow{(x-1)^2 \geq 0} \begin{cases} x + 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq -1 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

اعداد صحیح یک رقمی که در مجموعه جواب وجود دارند -1 ، -2 ، $\dots$ ، -9 و عدد $+1$ هستند که در کل 10 عدد صحیح یک رقمی وجود دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳✓

۲

۱

چون عبارت $x^2 - x + 1$ همواره مثبت است ($a > 0$ ، $\Delta < 0$)، بنابراین داریم:

$$|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - x + 1| = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow |x^2 - 3x + 2| + x^2 - x + 1 = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow |x^2 - 3x + 2| = -x - 1 \xrightarrow{\text{شرط معادله}} -x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = -x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 : \text{ جواب ندارد.} \\ x^2 - 3x + 2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

جواب‌های به‌دست آمده در شرط (*) صدق نمی‌کنند، پس معادله جواب ندارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴✓

۳

۲

۱

$$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow -(a - c) = -2$$

$$\begin{cases} a - c = 2 \\ a + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 2 - 1 + 0 = 1$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

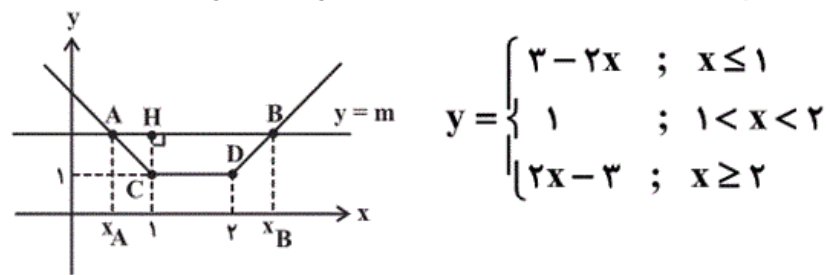
۴

۳✓

۲

۱

ابتدا نمودار تابع $y = |x-1| + |x-2|$ را رسم می‌کنیم:



چون خط $y = m$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند پس $m > 1$ است. محل تقاطع $y = m$ با نمودار، روی دو نیم خط است.

$$\begin{cases} y = 3-2x \\ y = m \end{cases} \Rightarrow m = 3-2x \Rightarrow x_A = \frac{3-m}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2x-3 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow m = 2x-3 \Rightarrow x_B = \frac{m+3}{2}$$

$$S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times CH = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{m+3}{2} - \frac{3-m}{2} \right) + 1 \right) (m-1)$$

$$= \frac{1}{2}(m+1)(m-1) = \frac{3}{2} \Rightarrow m^2 - 1 = 3 \Rightarrow m^2 = 4$$

$$\Rightarrow m = \pm 2 \xrightarrow{m>1} m = 2$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳✓

۲

۱

قدمطلق را به ازای ریشه عبارت داخل آن بازه‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x > 0 : mx + 2x = 1 \Rightarrow (m+2)x = 1 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{m+2} \xrightarrow{x>0} \frac{1}{m+2} > 0 \Rightarrow m > -2 \\ x < 0 : mx - 2x = 1 \Rightarrow (m-2)x = 1 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{m-2} \xrightarrow{x<0} \frac{1}{m-2} < 0 \Rightarrow m < 2 \end{cases}$$

چون می‌خواهیم معادله دو جواب داشته باشد، m باید در هر دو شرط صدق کند پس $-2 < m < 2$ که می‌توانیم به شکل $|m| < 2$ بنویسیم.

توجه کنید این معادله به ازای $x = 0$ جواب ندارد، پس در بازه‌بندی، $x = 0$ را در نظر نگیریم. (مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴✓

۳

۲

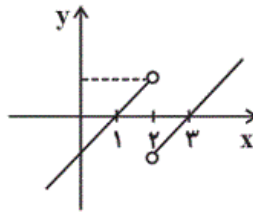
۱

-۷۲

(بهرانبفش نیکنام)

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = (x-2) - \frac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} x-2-1 = x-3, & x > 2 \\ x-2+1 = x-1, & x < 2 \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است:

۴

۳

۲

۱ ✓

-۷۳

(میثم بهرامی بویا)

$$\begin{aligned} (a+1, -2a) &\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1+a-3}{2} = a-1 \\ \frac{-2a+2}{2} = -a+1 \end{cases} \Rightarrow (a-1, -a+1) \\ (a-3, 2) &\Rightarrow \end{aligned}$$

مختصات مرکز دایره

$$a-1 = -a+1 \Rightarrow a=1$$

$$(2, -2) \Rightarrow \text{قطر} = \sqrt{(2+2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$(-2, 2) \Rightarrow \text{شعاع} = 2\sqrt{2}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

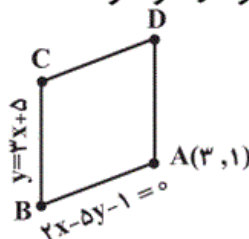
۲ ✓

۱

-۷۴

(پدر، ۳۱ نیلوفر)

معادلات خطوط داده شده با هم موازی نیستند و چون نقطه $(3, 1)$ در معادله $2x - 5y - 1 = 0$ صدق می‌کند، اما در معادله $y = 3x + 5$ جواب نمی‌دهد در نتیجه می‌توان شکل را به صورت زیر در نظر گرفت:



از تلاقی دو خط می‌توان مختصات نقطه B را به دست آورد.

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ 2x - 5y - 1 = 0 \Rightarrow 2x - 15x - 25 - 1 = 0 \Rightarrow -13x = 26 \\ \Rightarrow x_B = -2, \quad y_B = -1 \Rightarrow B(-2, -1) \end{cases}$$

طول ضلع $|AB|$ برابر است با: $|AB| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

در نتیجه محیط این لوزی برابر است با: $P = 4|AB| = 4\sqrt{29}$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

1 ✓ 2 3 4

-۷۵

(امیر غلامی)

نقطه مورد نظر را به صورت $(a, 2a - 1)$ در نظر می‌گیریم که فاصله آن

از مبدا مختصات برابر است با: $\sqrt{a^2 + (2a - 1)^2} = \sqrt{5a^2 - 4a + 1}$

کم‌ترین مقدار عبارت فوق معادل کم‌ترین مقدار سهمی $5a^2 - 4a + 1$

می‌باشد که به ازای طول رأس سهمی به دست می‌آید: $a = +\frac{4}{2(5)} = 0/4$

بنابراین نقطه مورد نظر $(0/4, -0/2)$ و طول تصویر آن روی محور

x ها $0/4$ است. (مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

1 2 3 ✓ 4

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2k-6}{4} = \frac{k-3}{2} \\ m_{AC} = \frac{4}{2-k} \end{cases} \Rightarrow \frac{k-3}{2} = \frac{k-2}{4} \Rightarrow k=4$$

پای میانه وارد بر وتر همان وسط پاره خط BC است.

$$\Rightarrow \begin{cases} B(6, 5) \\ C(4, -1) \end{cases} \Rightarrow BC \text{ وسط پاره خط}$$

و در نهایت فاصله این نقطه تا مبدأ برابر است با: $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$
(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

۷۷-

(امید شیری‌نژاد)

عمود منصف AB از وسط AB می‌گذرد و بر AB عمود است. بنابراین:

$$S \Rightarrow S\left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (-1, -1) \text{ وسط AB است.}$$

خط $mx + ny = 4$ از S می‌گذرد پس:

$$m(-1) + n(-1) = 4 \Rightarrow m + n = -4 \quad (1)$$

$$\text{شیب خط عمود} = \frac{1 - (-3)}{-5 - 3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب AB} = 2$$

از طرفی شیب خط $mx + ny = 4$ برابر $-\frac{m}{n}$ است، پس:

$$-\frac{m}{n} = 2 \Rightarrow m = -2n \quad (2)$$

با جای گذاری (۲) در (۱) داریم:

$$m + n = -4 \xrightarrow{m=-2n} -2n + n = -4 \Rightarrow n = 4, m = -8$$

$$-4 + 4 = 0 \quad \text{پس } \frac{m}{n} + n \text{ برابر است با:}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(پدرام نیکوکار)

$$y = x - b \Rightarrow x - y - b = 0$$

$$AH = \frac{|1 - a - b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |1 - a - b| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - a - b = 2 \Rightarrow a + b = -1 \\ 1 - a - b = -2 \Rightarrow a + b = 3 \end{cases}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲✓

۱

(پوانبش نیکنام)

ابتدا مقدار m را تعیین می‌کنیم:

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{4 + (m - 2)^2} = \sqrt{1 + (m - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4 + m^2 - 4m + 4 = 1 + m^2 - 2m + 1$$

$$\Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow AB = AC = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\text{طول ساق}} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(2 + \sqrt{2})}{\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{2}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲✓

۱

(علی شهرابی)

خط d را به صورت $y = x + b$ در نظر می‌گیریم. فاصله d تاخط $y = x$ برابر با $2\sqrt{2}$ است، پس:

$$\frac{|b - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |b| = 4 \xrightarrow{b < 0} b = -4$$

پس خط d به صورت $y = x - 4$ است. این خط را با خط $y = -3x$

قطع می‌دهیم:

$$-3x = x - 4 \Rightarrow x = 1$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱✓

اگر R و R' به ترتیب شعاع دایره‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر و TT' طول مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، آن‌گاه داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 12 = \sqrt{15^2 - (R - R')^2} \Rightarrow R - R' = 9$$

از طرفی در دو دایره مماس خارج، طول خط‌المركزین برابر مجموع دو شعاع است، پس $R + R' = 15$ است و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} R - R' = 9 \\ R + R' = 15 \end{cases} \Rightarrow 2R = 24 \Rightarrow R = 12$$

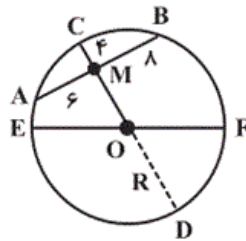
(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴ ✓

۳

۲

۱



طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$CM \cdot MD = BM \cdot MA \Rightarrow 4 \times MD = 8 \times 6 \Rightarrow MD = 12$$

مطابق شکل، CD قطر دایره است، بنابراین داریم:

$$CD = CM + MD = 4 + 12 = 16 \Rightarrow 2R = 16 \Rightarrow R = 8$$

$$S_{\text{نیم دایره}} = \frac{S_{\text{دایره}}}{2} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \times 8^2}{2} = 32\pi$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

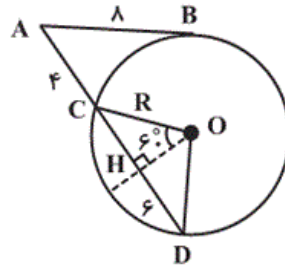
۴

۳

۲

۱ ✓

(میثم بهرامی بویا)



طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$AB^2 = AC \times AD \Rightarrow 8^2 = 4 \times (4 + CD)$$

$$\Rightarrow 64 = 16 + 4CD \Rightarrow 4CD = 48 \Rightarrow CD = 12$$

قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند. از طرفی

در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر

است، بنابراین داریم:

$$\frac{\Delta}{OCH} : CH = \frac{\sqrt{3}}{2} OC \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} R = 6 \Rightarrow R = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

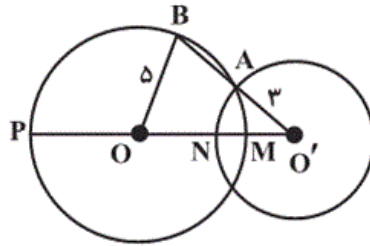
۴ ✓

۳

۲

۱

از متقاطع بودن دو دایره نتیجه می‌شود $2 < OO' < 8$ و بیشترین مقدار صحیح OO' برابر ۷ است. مطابق شکل AB وتر مطلوب است. طول MN برابر اختلاف مجموع دو شعاع دایره و فاصله مراکز دو دایره می‌باشد. یعنی:



$$MN = R + R' - OO' = 5 + 3 - 7 = 1$$

حال طبق روابط طولی در دایره بزرگ‌تر و با در نظر گرفتن دو قاطع $O'B$ و $O'P$ داریم:

$$O'M \times O'P = O'A \times O'B$$

$$O'M = O'N - MN = 3 - 1 = 2$$

$$O'P = O'O + OP = 7 + 5 = 12$$

$$\Rightarrow 2 \times 12 = 3 \times O'B \Rightarrow O'B = 8 \Rightarrow AB = 8 - 3 = 5$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

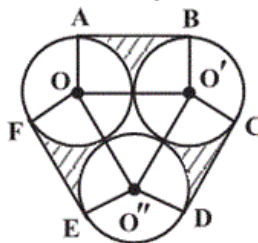
۴

۳✓

۲

۱

مطابق شکل زیر، چهار ضلعی‌های $ABO'O$ ، $CDO'O'$ و $EFO'O''$ مستطیل‌هایی به طول $2R$ و عرض R هستند. مساحت ناحیه هاشورخورده معادل مجموع مساحت‌های این سه مستطیل منهای مساحت شش قطاع 90° از یک دایره به شعاع R است، بنابراین داریم:



$$S (\text{هاشورخورده}) = 3 \times 2R \times R - 6 \times \frac{1}{4} \pi R^2$$

$$= 6R^2 - \frac{3}{2} \pi R^2 = \frac{3}{2} R^2 (4 - \pi)$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

۲

۱✓

$$(C'' \text{ و } C' \text{ دایره‌های مشترک خارجی مماس مشترک } T'T'' = 2\sqrt{4r} = 4\sqrt{r}$$

$$TT' = TT'' + T'T'' \Rightarrow 12 = 6\sqrt{r} + 4\sqrt{r}$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{r} = 12 \Rightarrow \sqrt{r} = \frac{6}{5} \Rightarrow r = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مبشره ضرایبه)

-۱۰۷

$$\widehat{ADM} = 29^\circ \Rightarrow \widehat{AM} = 36^\circ - 29^\circ = 7^\circ$$

$$\widehat{ANM} = \frac{\widehat{ADM} - \widehat{AM}}{2} = \frac{29^\circ - 7^\circ}{2} = 11^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BNM} = 18^\circ - 11^\circ = 7^\circ$$

مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج یک دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$\Delta NBM : NB = NM \Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{NMB} = \frac{18^\circ - 7^\circ}{2} = 5.5^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = 5.5^\circ$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

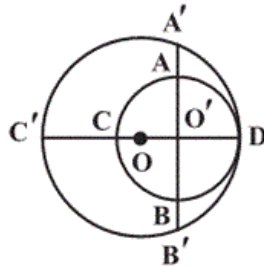
۴

۳ ✓

۲

۱

فرض کنید R و R' به ترتیب شعاع دایره‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر و O و O' مراکز این دو دایره باشند.



مطابق شکل $O'A = O'B$ و $O'A' = O'B'$ است، بنابراین
 $BB' = AA' = ۳$ بوده و در نتیجه طبق روابط طولی در دایره بزرگ‌تر داریم:

$$O'C \times O'D = O'A' \times O'B' \Rightarrow (R' + ۸) \times R' = (R' + ۳)^2$$

$$\Rightarrow R'^2 + ۸R' = R'^2 + ۶R' + ۹ \Rightarrow ۲R' = ۹$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

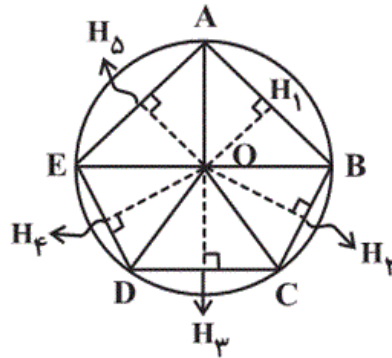
۴

۳✓

۲

۱

زاویه محاطی A برابر 90° است، پس مطابق شکل زیر، BE قطر دایره است. در نتیجه داریم:



$$BC = CD = DE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = 60^\circ$$

$$AB = AE \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AE} = 90^\circ$$

بنابراین مثلث‌های OBC، OCD و ODE متساوی‌الاضلاع و مثلث‌های OAB و OAE قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند. اگر شعاع دایره محیطی پنج‌ضلعی ABCDE را با R نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} OH_1 = OH_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2} R \\ OH_2 = OH_3 = OH_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2} R \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{OH_1 + OH_5}{OH_2 + OH_3 + OH_4} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} R}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} R} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

(هنرسه ۲- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ ، شعاع دایره محاطی

از رابطه $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\sqrt{2} = \frac{24(\sqrt{2}-1)}{P}$$

$$\Rightarrow P = \frac{24(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{24(2-\sqrt{2})}{2}$$

$$\Rightarrow \text{محیط هشت ضلعی} = 2P = 24(2-\sqrt{2})$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

۳

۲✓

۱

(علی شهرابی)

-۸۱

عدد را x در نظر می‌گیریم، پس معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$x + 2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{17}{6} \Rightarrow x + \frac{2}{x} = \frac{17}{6} \Rightarrow \frac{x^2 + 2}{x} = \frac{17}{6}$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 17x + 12 = 0$$

$$\Delta = 289 - 4(6)(12) = 1 \Rightarrow x = \frac{17 \pm 1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x = 4/5 \\ x = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x = 4 \end{cases}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴✓

۳

۲

۱

(علی شهبازی)

$$x + \sqrt{2x} = \frac{5}{8} \Rightarrow \sqrt{2x} = \frac{5}{8} - x \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$2x = \frac{25}{64} + x^2 - \frac{5}{4}x \Rightarrow x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{25}{64} = 0 \xrightarrow{\times 64}$$

$$(8x)^2 - 26(8x) + 25 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}}$$

$$(8x - 25)(8x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{8} & \times \\ x = \frac{1}{8} & \checkmark \end{cases}$$

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهدی مصطفی ابراهیمی)

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{-x+6}{2(x^2+x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} = \frac{2(-x+6)(x-1)+1(x^2+x+1)}{4(x^2+x+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{2(-x^2+7x-6)+x^2+x+1}{4(x^3-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{-x^2+15x-11}{4(x^3-1)} \xrightarrow{\times 4} \frac{4x^2+4}{x^3-1} = \frac{-x^2+15x-11}{x^3-1}$$

$$\Rightarrow 4x^2+4 = -x^2+15x-11 \Rightarrow 5x^2-15x+15=0 \Rightarrow x^2-3x+3=0$$

در این معادله $\Delta < 0$ است و معادله جواب ندارد.

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(امید غلامی)

$$(x-1+\frac{1}{x})^2 + (x-2+\frac{1}{x})^2 = 1 \xrightarrow{t=x+\frac{1}{x}} (t-1)^2 + (t-2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1 & \text{جواب ندارد.} \\ x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله یک جواب دارد.}$$

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

۸۵-

(امید غلامی)

جواب‌های معادله بایستی در دامنهٔ رادیکال‌ها صدق کنند.

$$\begin{aligned} 2-x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 2 \\ x-1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \\ x-x^2 \geq 0 &\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{اشتراک دامنه‌ها}} \{1\}$$

بنابراین جواب معادله تنها می‌تواند عدد ۱ باشد که با جایگذاری در معادله این جواب قابل قبول است. (مسابقه ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲✓

۱

۸۶-

(پدرام نیکوکار)

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+2x-1} + \sqrt{x^2+2x+4} &= 5 \xrightarrow{x^2+2x-1=t} \sqrt{t} + \sqrt{t+5} = 5 \Rightarrow \sqrt{t+5} = 5 - \sqrt{t} \\ \sqrt{t+5} &= 5 - \sqrt{t} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} t+5 = 25 + t - 10\sqrt{t} \Rightarrow 10\sqrt{t} = 20 \Rightarrow \sqrt{t} = 2 \Rightarrow t = 4 \\ x^2+2x-1 &= 4 \Rightarrow x^2+2x-5 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -2 \end{aligned}$$

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴✓

۳

۲

۱

۸۷-

(سپهر حقیقت‌افشار)

$$\begin{aligned} \frac{3x-3}{\sqrt{x}+1} &= x+1-2\sqrt{x} \Rightarrow 3x-3 = x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1-2x-2\sqrt{x} \\ \Rightarrow 4x-4 &= (x-1)\sqrt{x} \Rightarrow (x-1)\sqrt{x} - 4(x-1) = 0 \\ \Rightarrow (x-1)(\sqrt{x}-4) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x_1=1 \\ \sqrt{x}-4=0 \Rightarrow x_2=16 \end{cases} \\ |x_1-x_2| &= 16-1=15 \end{aligned}$$

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۲)

۴✓

۳

۲

۱

می‌دانیم زیر رادیکال با فرجه زوج، عدد منفی نمی‌تواند قرار گیرد، پس:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x \geq 1}_{(1)}$$

برای حل، پس از انتقال $\sqrt{x-1}$ به سمت دیگر تساوی طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1 - \sqrt{x-1} \quad (*)$$

$$x-2\sqrt{x-1} = 1-2\sqrt{x-1}+x-1 \Rightarrow x-2\sqrt{x-1} = x-2\sqrt{x-1} \Rightarrow 0=0 \quad \checkmark$$

شرط دامنه معادله را بررسی می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(*)} 1 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow \underbrace{x \leq 2}_{(2)}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 1 \leq x \leq 2$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳✓

۲

۱

ابتدا محدوده x را به دست می‌آوریم: $x^2 < 2x \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$

$$2|x| + |\underbrace{x-2}_{-}| = 2x + (2-x) = x+2 \quad \text{پس داریم:}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴✓

۳

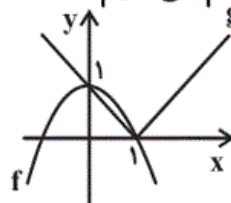
۲

۱

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x-1)^2} = 1-x^2 \Rightarrow |x-1| = 1-x^2$$

نمودار دو تابع $f(x) = 1-x^2$ و $g(x) = |x-1|$ را رسم می‌کنیم:



f و g فقط در دو نقطه به طول‌های $x=1$ و $x=0$ متقاطع‌اند. پس

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

معادله دو جواب دارد.

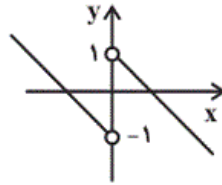
۴

۳

۲✓

۱

ابتدا نمودار $f(x) = -x + \frac{x}{|x|}$ را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x > 0 : f(x) = 1 - x \\ x < 0 : f(x) = -1 - x \end{cases}$$

طبق شکل و با توجه به گزینه‌ها تنها خطی که نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند $y = \frac{1}{3}$ است و خطوط $y = 3$ ، $y = -2$ و $y = 1$ هر یک نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند. (مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱✓

$$|2x - 3| < 1 \Rightarrow -1 < 2x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < 2x < 4 \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$|x - m| \geq n \Rightarrow \begin{cases} x - m \geq n \Rightarrow x \geq m + n \Rightarrow m + n = b = 2 \\ x - m \leq -n \Rightarrow x \leq m - n \Rightarrow m - n = a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + n = 2 \\ m - n = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{2}, n = \frac{1}{2} \Rightarrow 2m - n = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳✓

۲

۱

با توجه به آن که سمت راست معادله همواره نامثبت (منفی یا صفر) است، سمت چپ نیز باید نامثبت باشد.

$$\Rightarrow x^4 - 1 + |1 - x^4| \leq 0 \xrightarrow{x^4 - 1 = u} x^4 - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

در این حالت الزاماً $x^4 - 1 + |x^4 - 1| = 0$ است. بنابراین سمت راست تساوی نیز باید صفر باشد، یعنی $|x| = 0$ در نتیجه $x = 0$ باشد. از آنجایی که این جواب در فاصله $[-1, 1]$ قرار دارد، قابل قبول است. از این رو معادله تنها دارای جواب $x = 0$ است. (مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲✓

۱

-۹۴

(پهانبفش نیکنام)

$$\begin{aligned}
 & -x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Rightarrow -(x-2)(x-3) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 \leq x \leq 3 \\
 & \text{حال با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق‌ها وقتی که } 2 \leq x \leq 3 \text{ می‌باشد،} \\
 & \text{داریم: } (x-2) + (3-x) = 2\sqrt{-x^2 + 5x - 6} \Rightarrow 2\sqrt{-x^2 + 5x - 6} = 1 \\
 & \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -4x^2 + 20x - 25 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \\
 & \Rightarrow (2x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ قابل قبول}
 \end{aligned}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

۴

۳

۲✓

۱

-۹۵

(میثم بهرامی بویا)

$$\begin{aligned}
 & |x^2 - 1| + |x - 1| = |x^2 - x| \Rightarrow |x^2 - 1| + |1 - x| = |x^2 - x| \\
 & \text{توجه کنید که تساوی } |U| + |V| = |U + V| \text{ تنها در حالتی که } U \\
 & \text{و } V \text{ مختلف‌العلامت نباشند یعنی } UV \geq 0 \text{ برقرار است. پس:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (x^2 - 1)(1 - x) \geq 0 \Rightarrow -(x^2 - 1)(x - 1) \geq 0 \\
 & \Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 1) \leq 0 \\
 & \Rightarrow (x - 1)^2(x + 1) \leq 0 \xrightarrow{(x-1)^2 \geq 0} \begin{cases} x + 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq -1 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

اعداد صحیح یک رقمی که در مجموعه جواب وجود دارند -۱، -۲، ...،
 -۹ و عدد ۱+ هستند که در کل ۱۰ عدد صحیح یک رقمی وجود دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳✓

۲

۱

چون عبارت $x^2 - x + 1$ همواره مثبت است ($a > 0$, $\Delta < 0$)، بنابراین داریم:

$$|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - x + 1| = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow |x^2 - 3x + 2| + x^2 - x + 1 = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow |x^2 - 3x + 2| = -x - 1 \xrightarrow{\text{شرط معادله}} -x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = -x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 : \text{ جواب ندارد.} \\ x^2 - 3x + 2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

جواب‌های به دست آمده در شرط (*) صدق نمی‌کنند، پس معادله جواب ندارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به نقاط شکستگی نمودار که در نقاط ۲ و $x = 0$ اتفاق افتاده است،

بایستی $a + c = 2$. از طرفی به ازای $x > 2$ الزاماً عوامل $x - a$ و $x - c$

مثبت هستند و مقدار تابع در این حالت، عدد ثابت ۲- است. بنابراین:

$$|x - a| + b|x - c| = x - a + b(x - c) = (1 + b)x - (a + bc) = -2$$

$$\Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow -(a - c) = -2$$

$$\begin{cases} a - c = 2 \\ a + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 2 - 1 + 0 = 1$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

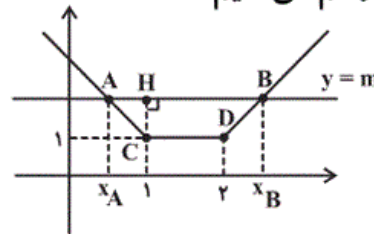
۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا نمودار تابع $y = |x-1| + |x-2|$ را رسم می‌کنیم:



$$y = \begin{cases} 3-2x & ; x \leq 1 \\ 1 & ; 1 < x < 2 \\ 2x-3 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

چون خط $y = m$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند پس $m > 1$ است. محل تقاطع $y = m$ با نمودار، روی دو نیم خط است.

$$\begin{cases} y = 3-2x \\ y = m \end{cases} \Rightarrow m = 3-2x \Rightarrow x_A = \frac{3-m}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2x-3 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow m = 2x-3 \Rightarrow x_B = \frac{m+3}{2}$$

$$S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times CH = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{m+3}{2} - \frac{3-m}{2} \right) + 1 \right) (m-1)$$

$$= \frac{1}{2}(m+1)(m-1) = \frac{3}{2} \Rightarrow m^2 - 1 = 3 \Rightarrow m^2 = 4$$

$$\Rightarrow m = \pm 2 \xrightarrow{m>1} m = 2$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳✓

۲

۱

قدرمطلق را به ازای ریشه عبارت داخل آن بازه‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x > 0 : mx + 2x = 1 \Rightarrow (m+2)x = 1 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{m+2} \xrightarrow{x>0} \frac{1}{m+2} > 0 \Rightarrow m > -2 \\ x < 0 : mx - 2x = 1 \Rightarrow (m-2)x = 1 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{m-2} \xrightarrow{x<0} \frac{1}{m-2} < 0 \Rightarrow m < 2 \end{cases}$$

چون می‌خواهیم معادله دو جواب داشته باشد، m باید در هر دو شرط صدق کند پس $-2 < m < 2$ که می‌توانیم به شکل $|m| < 2$ بنویسیم.

توجه کنید این معادله به ازای $x = 0$ جواب ندارد، پس در بازه‌بندی، $x = 0$ را در نظر نگیریم.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴✓

۳

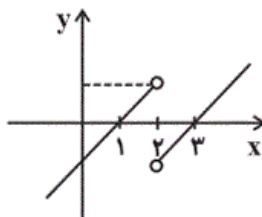
۲

۱

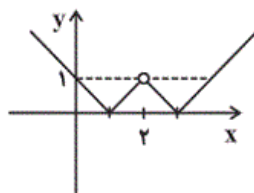
ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = (x-2) - \frac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} x-2-1 = x-3, & x > 2 \\ x-2+1 = x-1, & x < 2 \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



بنابراین نمودار $|f|$ به صورت زیر می‌باشد:



با توجه به نمودار $|f|$ ، خط $y = k$ هیچ گاه نمی‌تواند نمودار $|f|$ را در ۳ نقطه قطع کند.
(مسایان ۱- صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱✓

اگر $\widehat{CD} = x$ و $\widehat{BE} = y$ باشد، آن گاه داریم:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BE} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 3^\circ = \frac{y - x}{2}$$

$$\Rightarrow y - x = 6^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x + 6^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 174^\circ \quad (2)$$

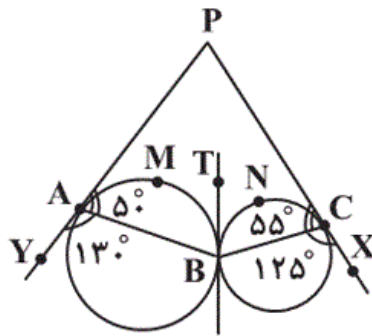
۴

۳

۲✓

۱

با توجه به شکل، $\hat{PAB} = 5^\circ$ و $\hat{PCB} = 55^\circ$ و چون این دو زاویه
ظلی هستند:



$$\widehat{\text{AMB}} = 100^\circ, \quad \widehat{\text{BNC}} = 110^\circ$$

اگر مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم کنیم، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}BT = \frac{\widehat{AMB}}{2} = 55^\circ \\ \hat{C}BT = \frac{\widehat{BNC}}{2} = 55^\circ \end{array} \right.$$

بنابراین $\hat{A}BC = 50^\circ + 55^\circ = 105^\circ$ است. اکنون در
چهارضلعی $APCB$ داریم:

$$50^{\circ} + 10^{\circ} + 55^{\circ} + \hat{P} = 360^{\circ} \Rightarrow \hat{P} = 360^{\circ} - 115^{\circ} = 245^{\circ}$$

(هفته ۲ - هفته های ۱۵ و ۲۲)

☒ ✓

۳

۲

1

(رضا عباسی اصل)

اگر R و R' به ترتیب شعاع دایره‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر و TT' طول مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، آنگاه داریم:

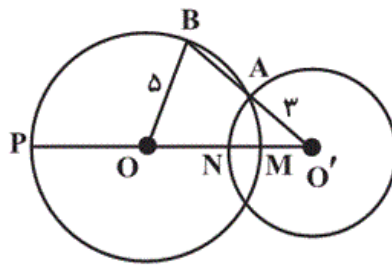
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 12 = \sqrt{15^2 - (R - R')^2} \Rightarrow R - R' = 9$$

☒ ✓

3

۲

1



$$MN = R + R' - OO' = 5 + 3 - 7 = 1$$

حال طبق روابط طولی در دایره بزرگ‌تر و با در نظر گرفتن دو قاطع $O'B$ و $O'P$ داریم:

$$O'M \times O'P = O'A \times O'B$$

$$O'M = O'N - MN = 3 - 1 = 2$$

$$O'P = O'O + OP = 7 + 5 = 12$$

$$\Rightarrow 2 \times 12 = 3 \times O'B \Rightarrow O'B = 8 \Rightarrow AB = 8 - 3 = 5$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۴

۳✓

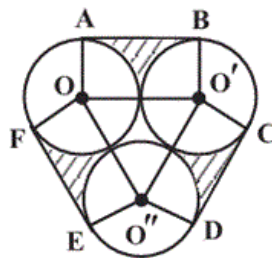
۲

۱

-۱۲۵

(سپار عابر)

مطابق شکل زیر، چهارضلعی‌های $ABO'O$ ، $CDO''O'$ و $EFOO''$ مستطیل‌هایی به طول $2R$ و عرض R هستند. مساحت ناحیه هاشورخورده معادل مجموع مساحت‌های این سه مستطیل منهای مساحت شش قطاع 90° از یک دایره به شعاع R است، بنابراین داریم:



$$S_{\text{(هاشورخورده)}} = 3 \times 2R \times R - 6 \times \frac{1}{4} \pi R^2$$

$$= 6R^2 - \frac{3}{2} \pi R^2 = \frac{3}{2} R^2 (4 - \pi)$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

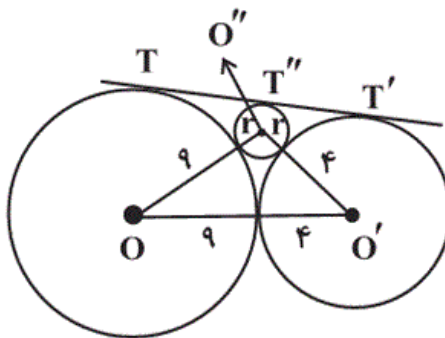
۴

۳

۲

۱✓

مطابق شکل زیر، دایره‌ها دایره دو مماس خارج‌اند، بنابراین داریم:



$$TT' = 2\sqrt{9 \times 4} = 12 \quad (\text{مماس مشترک خارجی دایره‌های } C \text{ و } C')$$

$$TT'' = 2\sqrt{9r} = 6\sqrt{r} \quad (\text{مماس مشترک خارجی دایره‌های } C \text{ و } C'')$$

$$T'T'' = 2\sqrt{4r} = 4\sqrt{r} \quad (\text{مماس مشترک خارجی دایره‌های } C' \text{ و } C'')$$

$$TT' = TT'' + T'T'' \Rightarrow 12 = 6\sqrt{r} + 4\sqrt{r}$$

۴

۳

۲

۱ ✓

(مبشره ضرابیه)

-۱۲۷

$$\widehat{ADM} = 29^\circ \Rightarrow \widehat{AM} = 36^\circ - 29^\circ = 7^\circ$$

$$\widehat{ANM} = \frac{\widehat{ADM} - \widehat{AM}}{2} = \frac{29^\circ - 7^\circ}{2} = 11^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BNM} = 18^\circ - 11^\circ = 7^\circ$$

مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج یک دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$\triangle NBM : NB = NM \Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{NMB} = \frac{18^\circ - 7^\circ}{2} = 5.5^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = 5.5^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

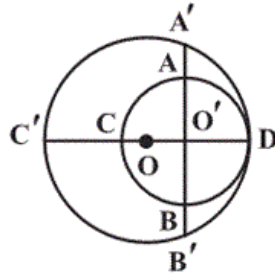
۴

۳ ✓

۲

۱

فرض کنید R و R' به ترتیب شعاع دایره‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر و O و O' مراکز این دو دایره باشند.



مطابق شکل $O'A = O'B$ و $O'A' = O'B'$ است، بنابراین
 $BB' = AA' = 3$ بوده و در نتیجه طبق روابط طولی در دایره بزرگ‌تر داریم:

$$O'C \times O'D = O'A' \times O'B' \Rightarrow (R' + 8) \times R' = (R' + 3)^2$$

$$\Rightarrow R'^2 + 8R' = R'^2 + 6R' + 9 \Rightarrow 2R' = 9$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱

دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

$$\text{حالت اول: } \begin{cases} x - 2 = 10 \Rightarrow x = 12 \\ y + 5 = 12 \Rightarrow y = 7 \end{cases} \Rightarrow xy = 12 \times 7 = 84$$

$$\text{حالت دوم: } \begin{cases} x - 2 = 12 \Rightarrow x = 14 \\ y + 5 = 10 \Rightarrow y = 5 \end{cases} \Rightarrow xy = 14 \times 5 = 70$$

(آمار و احتمال - صفحه ۲۱)

۴

۳✓

۲

۱

$$|k-1| < 2 \Rightarrow -2 < k-1 < 2 \Rightarrow -1 < k < 3 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} A = \{1, 2\}$$

$$n^3 = 4n \Rightarrow n^3 - 4n = 0 \Rightarrow n(n^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow n = 0, 2, -2 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} B = \{2\}$$

$$m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3, \quad m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

m	-3	1	3
$m^2 - 9$	+ ○ -	- ○ +	- ○ +
$m - 1$	-	- ○ +	+
$m^2 - 9$	- ○ +	- ○ +	- ○ +
$m - 1$	-	+	+

ت. ن

۴

۳✓

۲

۱

(مرتضی فحیم علوی)

$$B \subseteq A \cup B \xrightarrow{A \cup B \subseteq A \cap C} B \subseteq A \cap C \xrightarrow{A \cap C \subseteq A} B \subseteq A \quad (1)$$

$$A \subseteq A \cup B \xrightarrow{A \cup B \subseteq A \cap C} A \subseteq A \cap C \xrightarrow{A \cap C \subseteq C} A \subseteq C \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow B \subseteq A \subseteq C$$

بنابراین مجموعه‌های $B - A$ ، $A - C$ و $B - C$ برابر تهی هستند.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۴✓

۳

۲

۱

(نرا صالح پور)

اشتراک دو مجموعه A و X تهی است، پس مجموعه X شامل هیچ یک از عضوهای ۱، ۲ و ۳ نمی‌باشد. از طرفی مجموعه X دارای یک عضو مشترک با مجموعه B است، پس دقیقاً یکی از دو عضو ۴ یا ۵ به مجموعه X تعلق دارد. همچنین مجموعه X زیرمجموعه C است، پس اعضای آن لزوماً در مجموعه C نیز وجود دارند، پس عضو ۷ می‌تواند در مجموعه X وجود داشته باشد یا نداشته باشد (عضو ۳ در مجموعه X وجود ندارد). بنابراین مجموعه‌های ممکن برای X عبارت‌اند از: $\{4\}$ ، $\{5\}$ ، $\{4, 7\}$ ، $\{5, 7\}$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۴✓

۳

۲

۱

فرض کنید M یک مجموعه دلخواه باشد. اگر $x \in U$ و $x \notin M$ ، آن‌گاه $x \in M'$ ، بنابراین داریم:

$$\forall x \in U ; (x \notin C \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow C' \subseteq A' \Leftrightarrow A \subseteq C \quad (۱)$$

$$\forall x \in U ; (x \notin B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B' \subseteq A \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow B' \subseteq C \Rightarrow C' \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U ; (x \notin C \Rightarrow x \in B)$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

گزاره «الف» درست است، چون هر یک از اعضای A ، یعنی $\emptyset$ ، $\{\emptyset\}$ ، $\{\{\emptyset\}\}$ ، $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه A نیز هستند. گزاره «ب» نادرست است، زیرا به عنوان مثال نقض، $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه A است ولی چنین عضوی در مجموعه A وجود ندارد. گزاره «پ» نادرست است، زیرا به عنوان مثال نقض، اگر دو عضو $\{\emptyset\}$ و $\{\{\emptyset\}\}$ را از مجموعه A انتخاب کنیم، آن‌گاه هیچ کدام از این دو عضو، زیرمجموعه دیگری نیست.

(آمار و احتمال - صفحه ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$(A \cap B)' \cap (A \cup B') \cap (B \cup C) = C$$

$$\Rightarrow [(A' \cup B') \cap (A \cup B')] \cap (B \cup C) = C$$

$$\Rightarrow [(\underbrace{A' \cap A}_{\emptyset}) \cup B'] \cap (B \cup C) = C$$

$$\Rightarrow B' \cap (B \cup C) = C \Rightarrow (\underbrace{B' \cap B}_{\emptyset}) \cup (B' \cap C) = C$$

$$\Rightarrow B' \cap C = C \Rightarrow C \subseteq B' \Rightarrow B \cap C = \emptyset$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

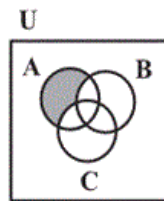
۴

۳

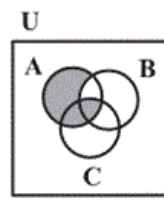
۲

۱ ✓

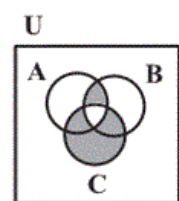
نمودار ون بقیه گزینه‌ها به صورت زیر است:



گزینه «۱»



گزینه «۳»



گزینه «۴»

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیررضا همزه‌ای)

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
 & (A' \cap B) \cup [((A \cap B) - B') \cap (A \cup B)] \\
 &= (A' \cap B) \cup [((A \cap B) \cap B) \cap (A \cup B)] \\
 & \quad (A \cap B) \subseteq B \\
 &= (A' \cap B) \cup [(A \cap B) \cap (A \cup B)] \\
 & \quad (A \cap B) \subseteq (A \cup B) \\
 &= (A' \cap B) \cup (A \cap B) = \underbrace{(A' \cup A)}_U \cap B = B
 \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهمربهری)

$$\begin{aligned}
 & [A' \cap (A \cup B)] \cap [A \cap (A' \cup B')] \\
 &= [(A' \cap A) \cup (A' \cap B)] \cap [(A \cap A') \cup (A \cap B')] \\
 &= [\emptyset \cup (A' \cap B)] \cap [\emptyset \cup (A \cap B')] \\
 &= (B \cap A') \cap (A \cap B') = (B - A) \cap (A - B) = \emptyset \xrightarrow{\text{متمم}} U
 \end{aligned}$$

تذکر: دو مجموعه $(A - B)$ و $(B - A)$ ، دو مجموعه جدا از هم هستند.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

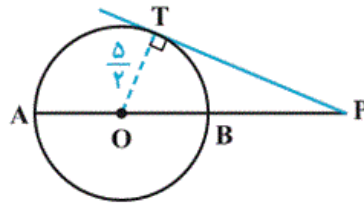
۴ ✓

۳

۲

۱

(کتاب آبی)



طبق فرض‌های مسئله $PA = 9$ و $PO = \frac{13}{2}$ است، پس اگر شعاع

دایره برابر R باشد، آن‌گاه:

$$R = OA = AP - OP = 9 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow OT = R = \frac{5}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه OTP با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$PT^2 = OP^2 - OT^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{169 - 25}{4}$$

$$PT^2 = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow PT = 6$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

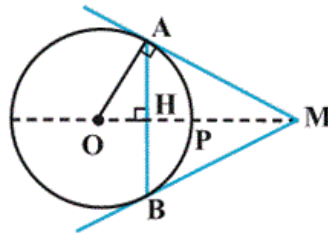
۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به شکل زیر، P نزدیک‌ترین نقطه دایره به M است، پس داریم:



$$MP = 4(\sqrt{2} - 1)$$

$$OM = OP + MP = 4 + (4\sqrt{2} - 4) = 4\sqrt{2}$$

از طرفی چون OM بر AB عمود است (چرا؟) پس در مثلث قائم‌الزاویه AOM، پاره خط AH ارتفاع وارد بر وتر است و می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$OA^2 = OH \cdot OM \Rightarrow OH = \frac{OA^2}{OM} = \frac{4^2}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

۳✓

۲

۱

طبق فرض در شکل زیر داریم: $AB = ۸$ و $CD = ۱۲$ و $AD = ۵$. چون $AB \parallel CD$ است، پس طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{SA}{SD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{SA}{SA + ۵} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow ۱۲SA = ۸SA + ۴۰$$

$$\Rightarrow ۴SA = ۴۰ \Rightarrow SA = ۱۰ \Rightarrow SD = ۱۰ + ۵ = ۱۵$$

۴

۳

۲✓

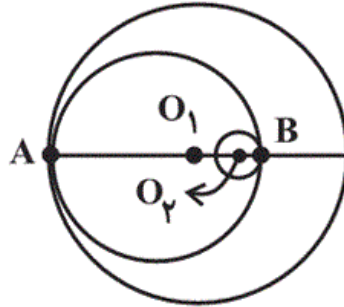
۱

با توجه به فرض سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:

$$O_1O_2 = 2, R_1 = 7, R_2 = 1 \Rightarrow O_1O_2 < |R_1 - R_2|$$

$\Rightarrow$ دو دایره متداخل هستند

مطابق شکل زیر، بزرگ‌ترین دایره مماس بر هر دو دایره C_1 و C_2 ، در نقاط A و B به ترتیب بر دایره‌های C_1 و C_2 مماس می‌باشد. داریم:



$$AB = R_1 + O_1O_2 + R_2 = 7 + 2 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره مورد نظر} = \frac{10}{2} = 5$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

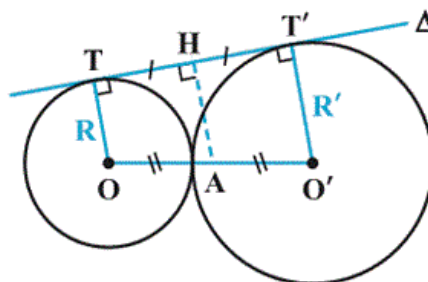
۳

۲

۱✓

مرکز دایره‌ای به قطر OO' ، وسط این پاره‌خط است که آن را A می‌نامیم. برای بررسی وضعیت دایره‌ای به مرکز A با خط Δ (که شامل مماس مشترک خارجی دو دایره است)، فاصله A را از این خط به دست آورده و با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

در دوزنقه $TOO'T'$ ، از وسط ضلع OO' خطی به موازات قاعده‌های دوزنقه رسم کرده‌ایم، طبق قضیه تالس H وسط ضلع TT' است. از سال قبل می‌دانیم که طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر با میانگین طول دو قاعده است، پس:



۴

۳

۲✓

۱

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج به شعاع‌های R و R' برابر $2\sqrt{RR'}$ است. پس اگر $R > R'$ باشد، طبق فرض سؤال داریم:

$$\sqrt{2}R = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow 2R^2 = 4RR' \Rightarrow R = 2R'$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

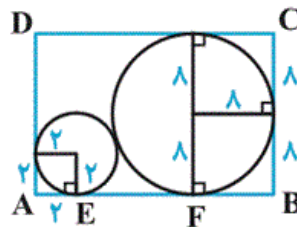
۴ ✓

۳

۲

۱

اگر $R = 2$ و $R' = 8$ شعاع‌های دو دایره باشند، آن گاه چون EF مماس مشترک خارجی دو دایره است، داریم:



$$EF = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{2 \times 8} = 8$$

$$AB = AE + EF + BF = 2 + 8 + 8 = 18$$

$$BC = 8 + 8 = 16$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(18 + 16) = 2 \times 34 = 68$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

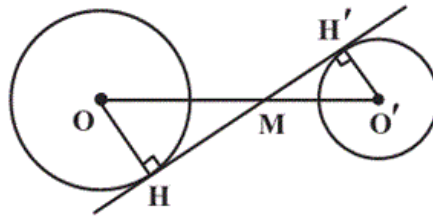
۴

۳

۲

۱ ✓

در مثلث قائم الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف طول وتر است، بنابراین داریم:



$$\Delta OHM : \widehat{OMH} = 30^\circ \Rightarrow OH = \frac{OM}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 22/5 = \frac{OM}{\frac{1}{2}} \Rightarrow OM = 45$$

$$\Delta O'H'M : \widehat{O'MH'} = 30^\circ \Rightarrow O'H' = \frac{O'M}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 7/5 = \frac{O'M}{\frac{1}{2}} \Rightarrow O'M = 15$$

$$\text{طول خط‌المركزين} = OO' = OM + O'M = 45 + 15 = 60$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

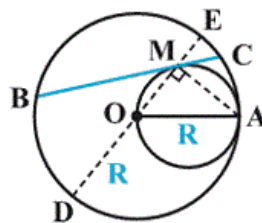
۴

۳✓

۲

۱

وتر گذرنده از M و O را در دایره بزرگ رسم می‌کنیم و آن را DE می‌نامیم، طبق روابط طولی در دایره داریم:



$$MB \times MC = MD \times ME$$

اگر شعاع دایره بزرگ را با R نشان دهیم، از رابطه بالا داریم:

$$MB \times MC = (R + OM) \times (R - OM)$$

$$\Rightarrow MB \times MC = R^2 - OM^2 \quad (*)$$

اگر از A به M وصل کنیم، از آن‌جا که OA قطر دایره کوچک است، زاویه AMO روبه‌رو به قطر و در نتیجه قائمه است، پس داریم:

$$MA^2 = R^2 - OM^2 \xrightarrow{(*)} MA^2 = MB \times MC$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

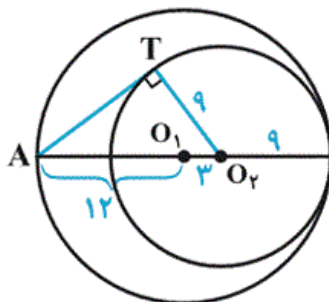
۴

۳

۲✓

۱

چون دو دایره مماس داخل هستند پس $O_1O_2 = R_1 - R_2 = 12 - 9 = 3$.
اگر A نقطه‌ای روی محیط دایره بزرگ‌تر باشد و از آن نقطه مماس AT را
بر دایره کوچک رسم کنیم، داریم:



$$\Delta AO_2T : \hat{T} = 90^\circ \Rightarrow AT = \sqrt{AO_2^2 - TO_2^2}$$

در عبارت بالا، TO_2 شعاع دایره کوچک و همواره مقدار ثابتی است.
پس AT زمانی دارای بیشترین مقدار است که AO_2 بیشترین
مقدار باشد، این اتفاق نیز زمانی رخ می‌دهد که A در امتداد
خط‌المركزین باشد که در این صورت مقدار AT برابر است با:

$$AT = \sqrt{AO_2^2 - TO_2^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱

$$\widehat{BCM} = 90^\circ \quad \text{و} \quad \widehat{BMC} = \alpha \Rightarrow \widehat{CBM} = 90^\circ - \alpha$$

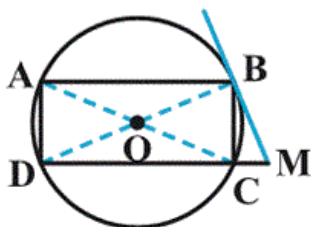
زاویه CBM ظلی بوده و روبه‌روی کمان $\widehat{BC}$ است، پس:

$$\widehat{BC} = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha$$

با توجه به قائمه بودن زوایای مستطیل، قطرهای مستطیل، همان قطرهای

دایره هستند، پس در مرکز دایره (نقطه O) متقاطع‌اند و در نتیجه زاویه

BOC که یک زاویه مرکزی است، برابر است با:



$$\widehat{BOC} = \widehat{BC} = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{BOC} = 2\alpha$$

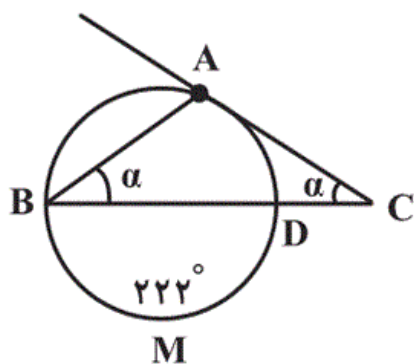
(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳

۲ ✓

۱



$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \alpha$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 2\alpha$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{AB} - 2\alpha}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 4\alpha$$

$$\widehat{AD} + \widehat{AB} + 222^\circ = 360^\circ \Rightarrow 6\alpha = 138^\circ \Rightarrow \alpha = 23^\circ$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

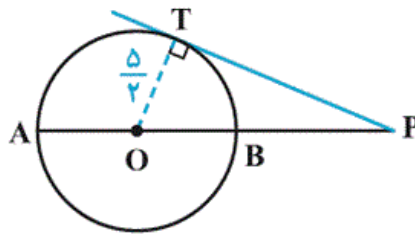
۴

۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی)



طبق فرض‌های مسئله $PA = 9$ و $PO = \frac{13}{2}$ است، پس اگر شعاع دایره برابر R باشد، آن‌گاه:

$$R = OA = AP - OP = 9 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow OT = R = \frac{5}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه OTP با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$PT^2 = OP^2 - OT^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{169 - 25}{4}$$

$$PT^2 = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow PT = 6$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

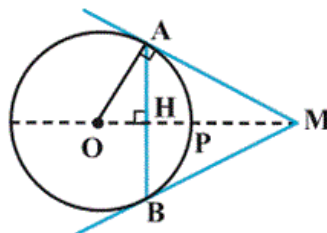
۳

۲✓

۱

(کتاب آبی)

با توجه به شکل زیر، P نزدیک‌ترین نقطه دایره به M است، پس داریم:



$$MP = 4(\sqrt{2} - 1)$$

$$OM = OP + MP = 4 + (4\sqrt{2} - 4) = 4\sqrt{2}$$

از طرفی چون OM بر AB عمود است (چرا؟) پس در مثلث قائم‌الزاویه AOM ، پاره خط AH ارتفاع وارد بر وتر است و می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$OA^2 = OH \cdot OM \Rightarrow OH = \frac{OA^2}{OM} = \frac{4^2}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

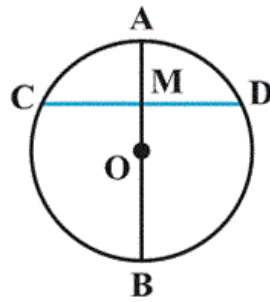
(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

۳✓

۲

۱



رابطه طولی در دایره:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

$$MA = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4} \times 2R = \sqrt{6}$$

$$MB = \frac{3}{4}AB = 3\sqrt{6}$$

$$MC = \frac{1}{2}CD, \quad MD = \frac{1}{2}CD$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} \times 3\sqrt{6} = \frac{1}{2}CD \times \frac{1}{2}CD$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}CD^2 = 18, \quad CD = 6\sqrt{2}$$

(هندسه ۲ - صفحه ۲۳)

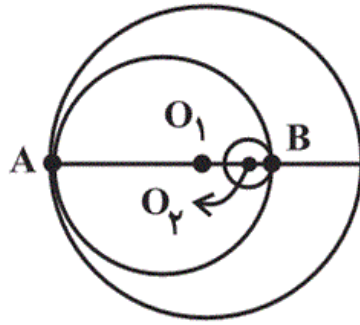
۴

۳

۲ ✓

۱

مطابق شکل زیر، بزرگ‌ترین دایره مماس بر هر دو دایره C_1 و C_2 ، در نقاط A و B به ترتیب بر دایره‌های C_1 و C_2 مماس می‌باشد. داریم:



$$AB = R_1 + O_1O_2 + R_2 = 7 + 2 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره مورد نظر} = \frac{10}{2} = 5$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

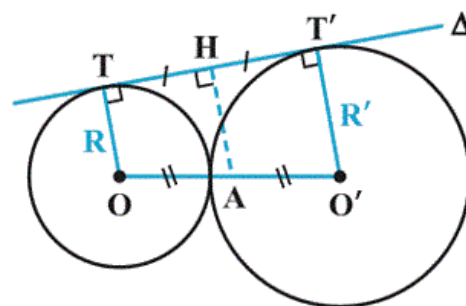
۳

۲

۱ ✓

مرکز دایره‌ای به قطر OO' ، وسط این پاره‌خط است که آن را A می‌نامیم. برای بررسی وضعیت دایره‌ای به مرکز A با خط Δ (که شامل مماس مشترک خارجی دو دایره است)، فاصله A را از این خط به دست آورده و با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

در ذوزنقه $TOO'T'$ ، از وسط ضلع OO' خطی به موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم کرده‌ایم، طبق قضیه تالس H وسط ضلع TT' است. از سال قبل می‌دانیم که طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر با میانگین طول دو قاعده است، پس:



$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{OT + O'T'}{2} = \frac{R + R'}{2} \\ r &= \frac{OO'}{2} = \frac{R + R'}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH = r$$

OO' شعاع دایره‌ای به قطر OO'

پس فاصله مرکز دایره مورد نظر تا مماس مشترک خارجی دو دایره، برابر با شعاع آن دایره است، بنابراین مماس مشترک خارجی دو دایره بر دایره مورد نظر مماس است.

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

۲✓

۱

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج به شعاع‌های R و R' برابر $2\sqrt{RR'}$ است. پس اگر $R > R'$ باشد، طبق فرض سؤال داریم:

$$\sqrt{2}R = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow 2R^2 = 4RR' \Rightarrow R = 2R'$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

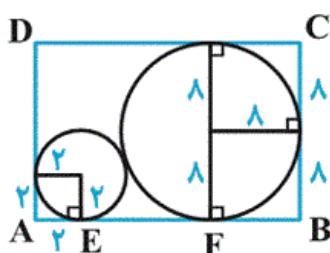
☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

اگر $R = 2$ و $R' = 8$ شعاع‌های دو دایره باشند، آن گاه چون EF مماس مشترک خارجی دو دایره است، داریم:



$$EF = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{2 \times 8} = 8$$

$$AB = AE + EF + BF = 2 + 8 + 8 = 18$$

$$BC = 8 + 8 = 16$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(18 + 16) = 2 \times 34 = 68$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

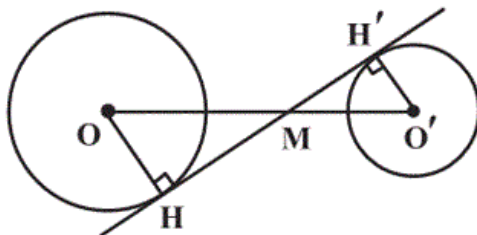
☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

در مثلث قائم الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف طول وتر است، بنابراین داریم:



$$\Delta_{OHM} : \widehat{OMH} = 30^\circ \Rightarrow OH = \frac{OM}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 22/5 = \frac{OM}{\frac{1}{2}} \Rightarrow OM = 45$$

$$\Delta_{O'H'M} : \widehat{O'MH'} = 30^\circ \Rightarrow O'H' = \frac{O'M}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 7/5 = \frac{O'M}{\frac{1}{2}} \Rightarrow O'M = 15$$

$$\text{طول خط‌المركزين} = OO' = OM + O'M = 45 + 15 = 60$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱