

سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات

و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی - ۲ سوال -

۸۱- اگر مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله هندسی به صورت  $S_n = 3(1 - 2^{-n})$  باشد، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴)  $-\frac{1}{3}$

۸۲- دنباله های  $a_n = 2 \times 3^{n-1}$  و  $b_n = 6n - 14$  را در نظر بگیرید. چند جمله ابتدایی از دنباله  $a_n$  را با هم جمع کنیم تا با مجموع ۱۱ جمله اول دنباله  $b_n$  برابر شود؟

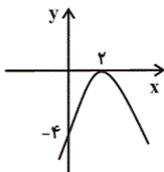
- (۱) ۴      (۲) ۵      (۳) ۶      (۴) ۷

حسابان ۱، معادلات درجه دوم - ۳ سوال

۸۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $x^2 - 7x - 5 = 0$  باشند، حاصل  $|\alpha + \frac{5}{\alpha}|$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{69}$       (۲) ۷      (۳)  $\sqrt{7}$       (۴) ۶۹

۸۵- اگر شکل زیر نمودار تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد، حاصل  $a - b + c$  کدام است؟



- (۱) صفر  
(۲) -۱۲  
(۳) -۹  
(۴) -۶

۸۶- به ازای کدام محدوده از  $m$ ، نمودار تابع  $f(x) = (2 + m)x^2 + 4x + m - 1$  از هر چهار ناحیه محورهای مختصات گذشته و دارای می نیمم است؟

- (۱)  $m > -2$       (۲)  $m > 1$       (۳)  $-2 < m < 1$       (۴)  $m < -2$

حسابان ۱، معادلات گویا و گنگ - ۱۰ سوال

۸۷- به ازای کدام مقدار  $a$ ، مجموع ریشه های معادله  $\frac{2}{x} - \frac{x+a}{x+2} = 1$  دو برابر حاصل ضرب آنهاست؟

- (۱) ۸      (۲) ۴      (۳) -۴      (۴) -۸

۸۸- صد کیلوگرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۵٪ جرمی موجود است. اگر  $\frac{1}{3}$  از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلوگرم باید شکر اضافه کنیم تا

غلظت آن ۶۰٪ جرمی شود؟

- (۱) ۴۰      (۲) ۴۵      (۳) ۵۰      (۴) ۵۵

۸۹- اگر  $\alpha$  جواب معادله  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$  باشد، حاصل  $8\alpha - 1$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{15}$  (۲) ۴ (۳)  $\sqrt{17}$  (۴)  $3\sqrt{2}$

۹۰- علی و مهدی کاری را با هم در ۸ ساعت و ۴۵ دقیقه انجام می‌دهند. اگر هر کدام بخواهند به تنهایی این کار را انجام دهند، علی ۶ ساعت کار را زودتر انجام می‌دهد. مهدی به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می‌دهد؟

(۱) ۲۴ (۲) ۲۱ (۳) ۱۸ (۴) ۱۵

۹۱- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله  $\sqrt{9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} = 3$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۲- تعداد ریشه‌های معادله  $\sqrt{x+3} - \frac{5}{\sqrt{x+3}} = 4$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۳- تعداد جواب‌های معادله  $x + \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۴- مجموع جواب‌های معادله  $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} = -2$  کدام است؟

(۱) -۳ (۲) صفر (۳) -۹ (۴) ۹

۹۵- حداقل مقدار  $a$  که به ازای آن معادله  $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{a-3x} + 1$  دارای جواب باشد، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر برای  $m$  معادله  $x - \sqrt{4x} = m$  دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

(۱)  $\{m \mid 0 < m < 1\}$  (۲)  $\{m \mid m > 1\}$  (۳)  $\{m \mid m < -1\}$  (۴)  $\{m \mid -1 < m \leq 0\}$

۹۶- اگر  $x > 1$  باشد، حاصل  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$  کدام است؟

- (۱)  $x + 1$       (۲)  $3x - 2$   
 (۳)  $x - 2$       (۴)  $x$

۹۷- اگر  $|a + b| = |a| + |b|$  باشد، حاصل عبارت  $C = \frac{2b}{|b|} - \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}$  کدام است؟ ( $a, b \neq 0$ )

- (۱) فقط ۱      (۲) فقط -۱  
 (۳) ۱ یا -۱      (۴) ۲ یا -۲

۹۸- مجموع جواب‌های معادله  $|x + 2| + 2|x| = 14$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{3}$       (۲)  $-\frac{2}{3}$       (۳)  $-\frac{4}{3}$       (۴)  $-\frac{5}{3}$

۹۹- مساحت سطح محصور بین نمودار تابع  $y = ||x| - 2|$  و خط  $y = 1$  کدام است؟

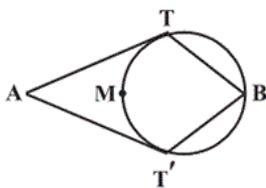
- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) ۳      (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴) ۲

۱۰۰- معادله  $x^2 + |x| = 2x + 1$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

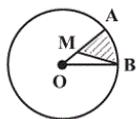
هندسه ۲، مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره - ۵ سوال

۱۲۱- در شکل زیر، دو مماس  $AT$  و  $AT'$  از نقطه  $A$  بر دایره رسم شده‌اند. اگر  $\widehat{TBT'} = 4\hat{A}$  باشد، اندازه کمان  $\widehat{TBT'}$  کدام است؟



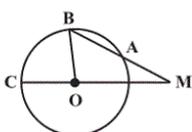
- (۱)  $200^\circ$       (۲)  $210^\circ$   
 (۳)  $220^\circ$       (۴)  $240^\circ$

۱۲۲- در شکل زیر، قطاعی به زاویه  $30^\circ$  از دایره  $C(O, 4)$  مشخص شده است. اگر  $AM = 2OM$  باشد، آن‌گاه مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



- (۱)  $\frac{4}{3}(\pi - 1)$       (۲)  $\frac{2}{3}(\pi - 1)$       (۳)  $\frac{4}{3}(\pi - 2)$       (۴)  $\frac{2}{3}(\pi - 2)$

۱۲۳- دایره  $C(O, 2)$  مفروض است. اگر  $AM = 2$  و  $\hat{ABO} = 40^\circ$  باشد، آن‌گاه  $\hat{BOC}$  کدام است؟

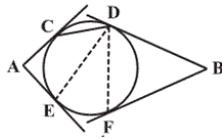


- (۱)  $20^\circ$       (۲)  $40^\circ$   
 (۳)  $60^\circ$       (۴)  $80^\circ$

۱۲۴- خط  $d$  بر دایره‌ای مماس و فاصله آن از مرکز دایره  $۸$  واحد است. خط  $d'$  دو نقطه مشترک با همان دایره دارد و طول وترى که در دایره ایجاد می‌کند،  $۱۲$  واحد است. اگر این دو خط در نقطه  $A$  بر هم عمود باشند، فاصله مرکز دایره از نقطه  $A$  کدام است؟

- (۱)  $۴\sqrt{۷}$  (۲)  $۱۰$  (۳)  $۲\sqrt{۲۳}$  (۴)  $۹$

۱۲۵- در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های  $A$  و  $B$  بر دایره مماس و طول وتر  $CD$  برابر طول شعاع دایره است. اگر  $\hat{A} = ۸^\circ$  و  $\hat{B} = ۵^\circ$  باشد، اندازه زاویه  $EDF$  کدام است؟



- (۱)  $۳^\circ$  (۲)  $۳۵^\circ$  (۳)  $۴۰^\circ$  (۴)  $۴۵^\circ$

هندسه ۲، رابطه های طولی در دایره - ۵ سوال

۱۲۶- دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  مفروض‌اند. اگر بیشترین و کمترین فاصله بین نقاط این دو دایره به ترتیب  $۱۸$  و  $۸$  باشد، طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

- (۱)  $۹$  (۲)  $۱۲$  (۳)  $۱۳$  (۴)  $۱۵$

۱۲۷- دو دایره  $C(O, ۲x+۳)$  و  $C'(O', ۸-x)$  در دو نقطه مشترک می‌باشند، اگر فاصله مراکز آن‌ها  $۳x+۱$  باشد،  $x$  چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱)  $۵$  (۲)  $۶$  (۳)  $۴$  (۴) بی‌شمار

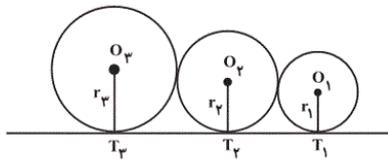
۱۲۸- دو دایره  $C(O, \frac{1}{2}R)$  و  $C'(O', R)$  بر یکدیگر مماس خارج‌اند. از نقطه  $O$ ، خطی رسم می‌کنیم که دایره  $C$  را در نقطه  $A$  و دایره  $C'$  را در نقاط  $B$  و  $D$  قطع کند. اگر  $OD = ۲R$  و  $B$  بین  $A$  و  $D$  باشد، آن‌گاه نسبت  $AB$  به  $BD$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{۸}$  (۲)  $\frac{1}{۹}$  (۳)  $\frac{1}{۱۱}$  (۴)  $\frac{1}{۱۲}$

۱۲۹- از نقطه  $M$  به فاصله  $۱۰$  از مرکز دایره  $C(O, ۶)$ ، دو مماس  $MA$  و  $MB$  را بر دایره رسم می‌کنیم. اندازه  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $۴/۸$  (۲)  $۵/۲$  (۳)  $۹/۶$  (۴)  $۱۰/۴$

۱۳۰- سه دایره مطابق شکل زیر بر هم مماس می‌باشند و مراکز آن‌ها بر روی یک خط راست قرار دارند. اگر  $r_۲ = ۲r_۱$  و  $T_۱T_۲ = ۲\sqrt{۲}$  باشد، در این صورت اندازه  $r_۳$  کدام است؟



- (۱)  $۳$  (۲)  $۲\sqrt{۳}$  (۳)  $۴$  (۴)  $۳\sqrt{۲}$

حسابان ۱- سوالات موازی، مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی - ۴ سوال

۱۰۱- مجموع هفده جمله اول یک دنباله حسابی  $۲۲۱$  است. مجموع جملات پنجم، هشتم، دهم و سیزدهم

این دنباله کدام است؟

- (۱)  $۲۶$  (۲)  $۱۰۴$  (۳)  $۳۴$  (۴)  $۵۲$

۱۰۲- در یک دنباله حسابی،  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول است. اگر  $S_{n+1} - S_{n-1} = 8n + 6$  باشد ( $n > 1$ )،

جمله پنجم این دنباله کدام است؟

۴۶ (۴)

۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۱ (۱)

۱۰۳- در یک دنباله حسابی با ۱۹ جمله و قدرنسبت ۲، اگر مجموع جملات ردیف فرد و زوج با هم برابر باشند، جمله پانزدهم این دنباله کدام است؟

۱۰ (۴)

۱۸ (۳)

-۱۰ (۲)

-۱۸ (۱)

۱۰۴- دنباله‌های  $a_n = 2 \times 3^{n-1}$  و  $b_n = 6n - 14$  را در نظر بگیرید. چند جمله ابتدایی از دنباله  $a_n$  را با هم جمع کنیم تا با مجموع ۱۱

جمله اول دنباله  $b_n$  برابر شود؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

حسابان ۱- سوالات موازی، معادلات درجه دوم - ۵ سوال

۱۰۵- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند، حاصل عبارت  $(\alpha^2 - 4\alpha + 2)(\beta^2 - 4\beta + 4)$  چقدر است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۸۱ (۱)

۱۰۶- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 7x - 5 = 0$  باشند، حاصل  $|\alpha + \frac{5}{\alpha}|$  کدام است؟

۶۹ (۴)

$\sqrt{7}$  (۳)

۷ (۲)

$\sqrt{69}$  (۱)

۱۰۷- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند، ریشه‌های کدام معادله  $\frac{\alpha}{\beta} + 1$  و  $\frac{\beta}{\alpha} + 1$  است؟

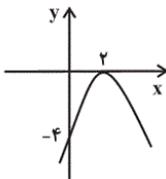
$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 - 8x + 8 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + 8x + 8 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 - 8x + 6 = 0 \quad (۳)$$

۱۰۹- اگر شکل زیر نمودار تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد، حاصل  $a - b + c$  کدام است؟



صفر (۱)

-۱۲ (۲)

-۹ (۳)

-۶ (۴)

۱۱۱- به ازای کدام محدوده از  $m$ ، نمودار تابع  $f(x) = (2+m)x^2 + 4x + m - 1$  از هر چهار ناحیه محورهای مختصات گذشته و دارای

می‌نیم است؟

$m > 1$  (۲)

$m > -2$  (۱)

$m < -2$  (۴)

$-2 < m < 1$  (۳)

۱۱۲- به ازای کدام مقدار  $a$ ، مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{2}{x} - \frac{x+a}{x+2} = 1$  دو برابر حاصل ضرب آن‌هاست؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۸

۱۱۳- صد کیلوگرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۵٪ جرمی موجود است. اگر  $\frac{1}{3}$  از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلوگرم باید شکر اضافه کنیم تا

غلظت آن ۶۰٪ جرمی شود؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۵۵

۱۱۴- اگر  $\alpha$  جواب معادله  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$  باشد، حاصل  $8\alpha - 1$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{15}$  (۲) ۴ (۳)  $\sqrt{17}$  (۴)  $3\sqrt{2}$

۱۱۵- علی و مهدی کاری را با هم در ۸ ساعت و ۴۵ دقیقه انجام می‌دهند. اگر هر کدام بخواهند به تنهایی این کار را انجام دهند، علی ۶ ساعت کار را زودتر انجام می‌دهد. مهدی به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می‌دهد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۱ (۳) ۱۸ (۴) ۱۵

۱۱۶- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله  $\sqrt{9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} = 3$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۷- تعداد ریشه‌های معادله  $\sqrt{x+3} - \frac{5}{\sqrt{x+3}} = 4$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۸- تعداد جواب‌های معادله  $x + \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۹- مجموع جواب‌های معادله  $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} = -2$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) صفر (۳) -۹ (۴) ۹

۱۲۰- حداقل مقدار  $a$  که به ازای آن معادله  $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{a-3x} + 1$  دارای جواب باشد، کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۱۱۰- اگر  $m+n$  و  $m-n$  ریشه‌های معادله  $3x - \frac{1}{x} = 2$  باشند، حاصل  $mn$  کدام است؟

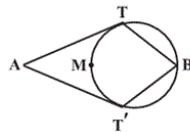
- (۱)  $\pm \frac{1}{3}$   
(۲)  $\pm 1$   
(۳)  $\pm \frac{1}{2}$   
(۴)  $\pm \frac{2}{9}$

۱۰۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر برای  $m$  معادله  $x - \sqrt{4x} = m$  دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

- (۱)  $\{m \mid 0 < m < 1\}$   
(۲)  $\{m \mid m > 1\}$   
(۳)  $\{m \mid m < -1\}$   
(۴)  $\{m \mid -1 < m \leq 0\}$

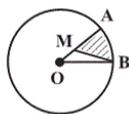
هندسه ۲- سوالات موازی، مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره - ۱۰ سوال -

۱۳۱- در شکل زیر، دو مماس  $AT$  و  $AT'$  از نقطه  $A$  بر دایره رسم شده‌اند. اگر  $\widehat{TBT'} = \widehat{A}$  باشد، اندازه کمان  $\widehat{TBT'}$  کدام است؟



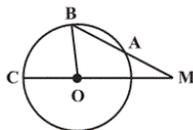
- (۱)  $20^\circ$   
(۲)  $21^\circ$   
(۳)  $22^\circ$   
(۴)  $24^\circ$

۱۳۲- در شکل زیر، قطاعی به زاویه  $30^\circ$  از دایره  $C(O, 4)$  مشخص شده است. اگر  $AM = 2OM$  باشد، آن‌گاه مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



- (۱)  $\frac{4}{3}(\pi - 1)$   
(۲)  $\frac{2}{3}(\pi - 1)$   
(۳)  $\frac{4}{3}(\pi - 2)$   
(۴)  $\frac{2}{3}(\pi - 2)$

۱۳۳- دایره  $C(O, 2)$  مفروض است. اگر  $AM = 2$  و  $\widehat{ABO} = 40^\circ$  باشد، آن‌گاه  $\widehat{BOC}$  کدام است؟

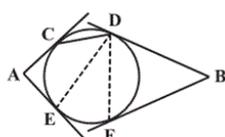


- (۱)  $20^\circ$   
(۲)  $40^\circ$   
(۳)  $60^\circ$   
(۴)  $80^\circ$

۱۳۴- خط  $d$  بر دایره‌ای مماس و فاصله آن از مرکز دایره ۸ واحد است. خط  $d'$  دو نقطه مشترک با همان دایره دارد و طول وترى که در دایره ایجاد می‌کند، ۱۲ واحد است. اگر این دو خط در نقطه  $A$  بر هم عمود باشند، فاصله مرکز دایره از نقطه  $A$  کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{7}$   
(۲) ۱۰  
(۳)  $2\sqrt{23}$   
(۴) ۹

۱۳۵- در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های  $A$  و  $B$  بر دایره مماس و طول وتر  $CD$  برابر طول شعاع دایره است. اگر  $\widehat{A} = 80^\circ$  و  $\widehat{B} = 50^\circ$  باشد، اندازه زاویه  $EDF$  کدام است؟

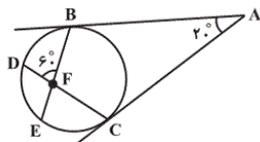


- (۱)  $30^\circ$   
(۲)  $35^\circ$   
(۳)  $40^\circ$   
(۴)  $45^\circ$

۱۳۶- دو دایره هم‌مرکز  $C(O, R)$  و  $C'(O, r)$  مفروض‌اند ( $R > r$ ). اگر مساحت ناحیه محصور بین دو دایره برابر با  $16\pi$  و وتر  $AB$  از دایره بزرگ‌تر بر دایره کوچک‌تر مماس باشد، طول وتر  $AB$  کدام است؟

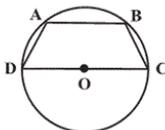
- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۳۷- در شکل زیر، اندازه کمان  $\widehat{DE}$  کدام است؟



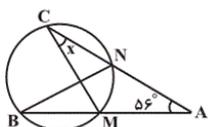
- (۱)  $80^\circ$  (۲)  $70^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $50^\circ$

۱۳۸- مطابق شکل زیر، دوزنقه  $ABCD$  درون دایره  $C(O, R)$  قرار دارد. اگر قاعده  $AB$  برابر با  $10$  و فاصله آن از مرکز دایره برابر با  $12$  باشد، آن‌گاه طول پاره‌خطی که وسط ساق‌های دوزنقه را به هم وصل می‌کند کدام است؟



- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۱۳۹- در شکل زیر نقاط  $M$  و  $N$  به ترتیب وسط پاره‌خط‌های  $AB$  و  $AC$  هستند. اگر  $\widehat{CN} = 50^\circ$  و  $\widehat{AM} = 56^\circ$  باشد،  $x$  کدام است؟



- (۱)  $56^\circ$  (۲)  $37^\circ$  (۳)  $28^\circ$  (۴)  $23^\circ$

۱۴۰- خط  $L_1$ ، دایره  $C(O, 2)$  را قطع کرده و وتر  $AB$  را داخل آن ایجاد می‌کند. خط  $L_2$  در نقطه  $B$  بر دایره مماس است و با خط  $L_1$  زاویه  $60^\circ$  درجه می‌سازد. مساحت مثلث  $OAB$  کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

آمار و احتمال، آشنایی با منطق ریاضی - ۵ سوال -

۱۴۱- اگر گزاره‌های  $q \Rightarrow r$  و  $\sim q \Rightarrow p$  به ترتیب درست و نادرست باشند، آن‌گاه ارزش گزاره‌های  $(\sim r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim p)$  و  $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Leftrightarrow q)$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) نادرست - نادرست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) درست - درست

۱۴۲- حاصل گزاره  $\sim q \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)]$  معادل با کدام یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

- (۱)  $T$  (۲)  $F$  (۳)  $p \Leftrightarrow q$  (۴)  $p \Leftrightarrow \sim q$

۱۴۳- نقیض گزاره «عدد طبیعی  $n$  وجود دارد به طوری که  $n$  عددی اول باشد و عددی فرد نباشد.» کدام است؟

- (۱) عدد طبیعی  $n$  وجود دارد به طوری که  $n$  عددی اول نیست و عددی فرد است.  
 (۲) عدد طبیعی  $n$  وجود دارد به طوری که  $n$  عددی اول نیست یا عددی فرد است.  
 (۳) برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n$  عددی اول نیست و عددی فرد است.  
 (۴) برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n$  عددی اول نیست یا عددی فرد است.

۱۴۴- ارزش کدام یک از گزاره‌های سوری زیر درست است؟

$$\forall x \in \mathbb{R}; \left(x + \frac{1}{x} \leq -2\right) \vee \left(x + \frac{1}{x} \geq 2\right) \quad (۲) \quad \forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 16}{x + 4} = x - 4 \quad (۱)$$

$$\forall x \in \mathbb{N}; x^2 > x \quad (۴) \quad \forall x \in \mathbb{R}; 2x^2 + 5x + 4 \neq 0 \quad (۳)$$

۱۴۵- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، دامنه متغیر گزاره‌ها باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

$$\exists x \in A; x^2 + 5x - 6 = 0 \quad (۲) \quad \forall x \in A; \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2 \quad (۱)$$

$$\exists x \in A; x^2 \leq x \quad (۴) \quad \forall x \in A; |3 - x| < 2 \quad (۳)$$

آمار و احتمال، مجموعه - زیر مجموعه - ۵ سوال

۱۴۶- اگر  $A = \{x + 1, -3, 5, y - 4\}$  و  $B = \{-4, 6, z - 2, t + 3\}$  با هم برابر باشند، در این صورت مقدار  $\frac{z + t}{x + y}$  کدام است؟

(۱) ۰/۱ (۲) ۰/۲ (۳) ۰/۳ (۴) ۰/۴

۱۴۷- برای دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، اگر رابطه  $(A' \cap B) \subseteq (B' \cap A)$  برقرار باشد، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر همواره صحیح است؟

(۱)  $A' \subseteq B'$  (۲)  $A = B$  (۳)  $A \cup B = B$  (۴)  $A \subseteq B'$

۱۴۸- اگر تعداد زیرمجموعه‌های اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، ۱۹۲ واحد بیشتر از زیرمجموعه‌های اشتراک آن‌ها باشد، آن‌گاه  $A$  حداکثر چند زیرمجموعه می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶

۱۴۹- اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه مجموعه دلخواه باشند، آن‌گاه کدام رابطه زیر ممکن است نادرست باشد؟

(۱)  $[(A' \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow C' \subseteq A$   
 (۲)  $[(A \subseteq B) \wedge (A' \subseteq B')] \Rightarrow A = B$   
 (۳)  $[(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq B)] \Rightarrow (A \cup C) \subseteq B$   
 (۴)  $[(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)] \Rightarrow C \subseteq B$

۱۵۰- اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیرتهی از مجموعه مرجع  $U$  و هر کدام شامل حداقل یک عضو باشند که به دیگری تعلق ندارد، آن‌گاه کدام دسته از مجموعه‌های زیر، قطعاً یک افراز برای مجموعه  $U$  است؟

(۱)  $B - A$  و  $B'$  (۲)  $A$  و  $B' - A$   
 (۳)  $A$  و  $A' \cap B'$  (۴)  $A - B$  و  $A \cap B$  و  $A' \cap B'$

-۸۱

(امید شیری نژاد)

$$S_n = 2(1 - 2^{-n}) \Rightarrow \begin{cases} S_2 = a_1 + a_2 \stackrel{n=2}{=} 2(1 - 2^{-2}) = \frac{9}{4} \\ S_1 = a_1 \stackrel{n=1}{=} 2(1 - 2^{-1}) = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ راه حل اول:}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{a_1 = \frac{3}{2}} \frac{3}{2} + a_2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم: در  $S_n$  (مجموع جملات دنباله هندسی)، پایه‌ای که به توان  $n$  می‌رسد همان

قدرنسبت است. در این سؤال پایه  $2^{-1}$  به توان  $n$  رسیده پس  $q = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳

۲

۱

-۸۲

(بهانفش نیکنا)

دنباله  $a_n$  هندسی با جمله اول ۲ و قدرنسبت ۳ می‌باشد و  $b_n$  حسابی با جمله اول ۸- و قدرنسبت ۶ است. مجموع ۱۱ جمله اول دنباله  $b_n$  برابر

$$\frac{11}{2}(2(-8) + 10 \times 6) = 242 \text{ است با:}$$

$$\frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1 \quad \text{مجموع } n \text{ جمله اول دنباله } a_n:$$

$$\Rightarrow 3^n - 1 = 242 \Rightarrow 3^n = 243 \Rightarrow n = 5$$

بنابراین باید ۵ جمله ابتدایی از دنباله  $a_n$  را با هم جمع کنیم.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳

۲

۱

-۸۳

(قاسم کتابچی)

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -5 \Rightarrow \alpha = \frac{-5}{\beta}$$

$$\Rightarrow \left| \alpha + \frac{5}{\alpha} \right| = \left| \frac{-5}{\beta} + \frac{5}{\alpha} \right| = \left| \frac{5(\beta - \alpha)}{\alpha\beta} \right| = \left| \frac{5(\beta - \alpha)}{-5} \right|$$

$$= |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{49 + 20}}{1} = \sqrt{69}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱

(پوریا مهرث)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

سهمی در  $x = 2$  بر محور  $x$  ها مماس است، پس رأس سهمی نقطه  $(2, 0)$  است. داریم:

$$S(2, 0) \in f \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (*)$$

$$f(x) = a(x-2)^2 \quad (0, -4) \in f \rightarrow -4 = a(0-2)^2$$

$$\Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = 4, (0, -4) \in f \Rightarrow c = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b + c = -1 - 4 + (-4) = -9$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

(امیرکشاورز)

برای این که نمودار تابع از هر چهار ناحیه بگذرد باید دو ریشه با علامت‌های مختلف داشته باشد.

$$\text{شرط اول: } \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{2+m} < 0 \Rightarrow -2 < m < 1 \quad (\text{I})$$

$m$	$-2$	$1$
$\frac{m-1}{m+2}$	+	-
	ن. ت.	+

و چون دارای  $\min$  است، پس باید ضریب  $x^2$  مثبت باشد.

$$\text{شرط دوم: } 2 + m > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) \Rightarrow -2 < m < 1$$

توجه کنید که وقتی  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، حتماً شرط  $\Delta > 0$  برقرار است (چرا؟)

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

(میثم بهرامی بویا)

$$\frac{2}{x} = \frac{x+a}{x+2} + 1 \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2x+a+2}{x+2} \Rightarrow 2x^2 + ax + 2x = 2x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + ax - 4 = 0, S = 2P \Rightarrow \frac{-a}{2} = 2 \times \frac{-4}{2} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -4 \Rightarrow a = 8$$

توجه کنید که به ازای  $a = 8$ ، جواب معادله  $x = 0$  یا  $x = -2$  نمی‌شود.

(مسابان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امید شیرینی‌نژاد)

چون غلظت آن ۲۵٪ جرمی است پس ۲۵ کیلوگرم از محلول اولیه، شکر و ۷۵ کیلوگرم از آن آب است. اگر  $\frac{1}{3}$  از آب را تبخیر

کنیم ( $\frac{1}{3} \times 75 = 25$ )، ۵۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر  $x$  کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم جرم شکر  $25 + x$  کیلوگرم و جرم محلول  $75 + x$  کیلوگرم خواهد شد. (توجه کنید چون ۲۵ کیلوگرم از آب تبخیر شده پس جرم محلول دیگر ۱۰۰ کیلوگرم نیست بلکه ۷۵ کیلوگرم است). حالا برای آن که غلظت به ۶۰٪ برسد داریم:

$$\frac{25+x}{75+x} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \Rightarrow 125 + 5x = 225 + 3x \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(پوانبش نیکنام)

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = 0 \quad (x > -1, x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2x} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2x} \Rightarrow 2x = \sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{x > 0} 4x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \text{ غ ق} \\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \Rightarrow 8\alpha - 1 = \sqrt{17} \end{cases}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۷ و ۱۷ تا ۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۹۰

(علی شهرابی)

۸ ساعت و ۴۵ دقیقه یعنی  $۸\frac{۳}{۴}$  ساعت که می‌شود  $\frac{۳۵}{۴}$  ساعت.

نکته: اگر شخص اول کاری را در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم آن کار را در C ساعت انجام دهند، داریم:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

اگر فرض کنیم مهدی کار را در x ساعت انجام می‌دهد، علی آن کار را ۶ ساعت زودتر یعنی در x-۶ ساعت انجام می‌دهد. با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{35}{4}} \Rightarrow \frac{x+x-6}{x^2-6x} = \frac{4}{35}$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 24x = 70x - 210 \Rightarrow 2x^2 - 47x + 105 = 0$$

دلته را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = (-47)^2 - 4(2)(105) = 1369$$

$$x = \frac{47 \pm \sqrt{1369}}{4} = \frac{47 \pm 37}{4} \quad x > 6 \rightarrow \begin{cases} x = 2/5 & \times \\ x = 21 & \checkmark \end{cases}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷ و ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲✓

۱

-۹۱

(پوریا مهرث)

$$\frac{2}{\text{به توان ۲}} \rightarrow 9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} = 9 \Rightarrow \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x^2 - 2x + 1)} = 0 \Rightarrow x(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{هر دو در معادله اولیه صدق می‌کنند.}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳✓

۲

۱

-۹۲

(پوریا مهرث)

$$\sqrt{x+3} = t \Rightarrow t - \frac{5}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 - 5 = 4t$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 5 \end{cases} \text{ غ ق ق} \Rightarrow \sqrt{x+3} = 5 \Rightarrow x = 22$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷، ۱۳ و ۱۷ تا ۲۲)

۴

۳

۲✓

۱

-۹۳

(علی کردی)

با توجه به رادیکال‌ها،  $x$  تنها در مجموعه  $[2, +\infty) \cup \{0\}$  تعریف شده است.

$$x + \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}\sqrt{x-2} - \sqrt{x} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2} - 1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 \end{array} \right.$$

۴

۳

۲✓

۱

-۹۴

(میلاد سبازی لاریجانی)

$$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt{(x-1)^2} = -2 \xrightarrow{\sqrt[3]{x-1}=t} t - t^2 = -2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t=2 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1}=2 \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow x=9 \\ t=-1 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1}=-1 \Rightarrow x-1=-1 \Rightarrow x=0 \end{array} \right.$$

هر ۲ ریشه در معادله صدق می‌کنند، پس:  $9+0=9$ : مجموع جواب‌ها

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷، ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

۴✓

۳

۲

۱

-۹۵

(امید غلامی)

با توجه به رادیکال‌ها، باید محدوده تعریف شدن  $x$  بررسی شود:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

$$\sqrt{a-3x} \geq 0 \Rightarrow 3x \leq a \Rightarrow x \leq \frac{a}{3} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که حداقل مقدار ممکن برای  $\frac{a}{3}$  می‌تواند ۱باشد، به عبارتی  $a=3$ . با قرار دادن مقدار  $a$ ، جواب قابل قبول  $x=1$  در معادله صدق می‌کند. بنابراین  $a=3$ ، حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳✓

۲

۱

(میلاد سبازی لاریبانی)

$x - \sqrt{4x} = m \Rightarrow x - 2\sqrt{x} - m = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t - m = 0$   
 برای این که معادله دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، با توجه به تغییر متغیر هر دو ریشه باید نامنفی باشند:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4(1)(-m) > 0 \Rightarrow 4 + 4m > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m}{1} > 0 \Rightarrow m < 0 \\ S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2}{1} > 0 \quad \checkmark \end{array} \right. \Rightarrow -1 < m < 0$$

در حالت  $m = 0$  نیز معادله به شکل زیر درمی آید که دو جواب دارد.

$$x - 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر برای  $m$  به صورت  $\{m \mid -1 < m \leq 0\}$  است.

(مسایان ۱- صفحه های ۷ تا ۱۶ و ۲۰ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(پوریا مهرث)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 &= (2x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| \\ x^2 - 2x + 1 &= (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \\ \Rightarrow |2x-1| - |x-1| &\xrightarrow{x>1} 2x-1 - (x-1) = x \end{aligned}$$

(مسایان ۱- صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شهرابی)

از تساوی  $|a+b| = |a| + |b|$  نتیجه می گیریم که  $a$  و  $b$  هم علامتند.  
 پس در دو حالت حاصل عبارت  $C$  را حساب می کنیم:  
 (۱)  $a$  و  $b$  هر دو مثبت باشند:

$$C = \frac{2b}{|b|} - \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{2b}{|b|} - \frac{|a|}{a} = \frac{2b}{b} - \frac{a}{a} = 2 - 1 = 1$$

(۲)  $a$  و  $b$  هر دو منفی باشند:

$$C = \frac{2b}{|b|} - \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{2b}{|b|} - \frac{|a|}{a} = \frac{2b}{-b} - \frac{-a}{a} = -2 + 1 = -1$$

(مسایان ۱- صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شهبازی)

$$x > 0: x + 2 + 2x = 14 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \quad \checkmark$$

$$-2 \leq x \leq 0: x + 2 - 2x = 14 \Rightarrow x = -12 \quad \times$$

$$x < -2: -x - 2 - 2x = 14 \Rightarrow -3x = 16 \Rightarrow x = -\frac{16}{3} \quad \checkmark$$

$$4 + \frac{-16}{3} = \frac{-4}{3}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با:

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

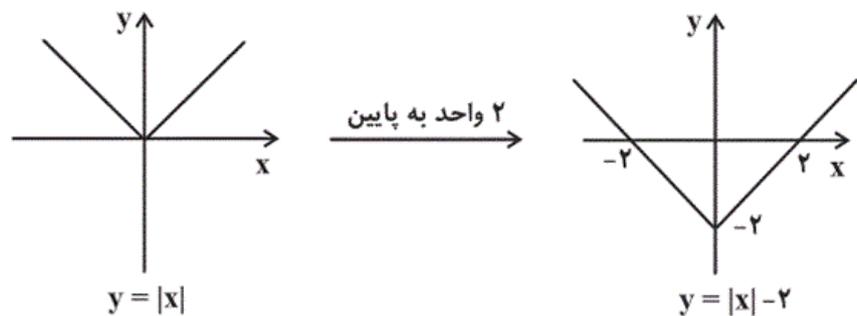
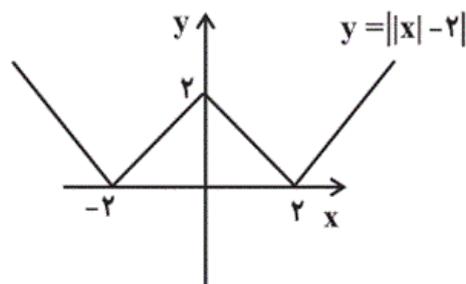
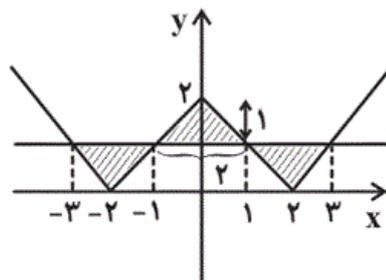
۴

۳✓

۲

۱

(علی شهبازی)

نمودار  $y = ||x| - 2|$  را رسم می‌کنیم:حال قسمت‌های زیر محور  $x$  ها را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تانمودار تابع  $y = ||x| - 2|$  به دست آید:حالا خط  $y = 1$  را رسم می‌کنیم:

$$S = 3 \times \frac{1 \times 2}{2} = 3$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

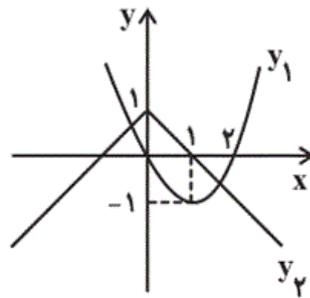
۲✓

۱

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^2 + |x| = 2x + 1 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x}_{y_1} = \underbrace{1 - |x|}_{y_2}$$

برای رسم  $y_2$ ، کافی است  $y = |x|$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه و سپس یک واحد به بالا منتقل کنیم و برای رسم  $y_1$  به کمک تجزیه، ریشه‌ها را یافته و از طول رأس نیز استفاده می‌کنیم:



$$y_1 = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

$x$	$\circ$	$\frac{-b}{2a} = 1$	$2$
$y$	$\circ$	$-1$	$\circ$

دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع کرده‌اند، پس این معادله دو جواب دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمر فندان)

-۱۲۱

اگر  $\widehat{TBT'} = \alpha$  فرض شود، آن‌گاه داریم:

$$\widehat{TBT'} = \widehat{AT'} \Rightarrow \frac{\widehat{TMT'}}{2} = 4 \times \frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TMT'}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{TMT'} = 4\widehat{TBT'} - 4\widehat{TMT'} \Rightarrow 5\widehat{TMT'} = 4\widehat{TBT'}$$

$$\Rightarrow 5(36^\circ - \alpha) = 4\alpha \Rightarrow 180^\circ - 5\alpha = 4\alpha \Rightarrow 9\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه ۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$AM = 2OM \Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{OM}{OA} = \frac{1}{3}$$

اگر در مثلث OAB، ارتفاع BH را رسم کنیم، آن گاه در مثلث قائم الزاویه OBH، ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$  است، پس طول آن

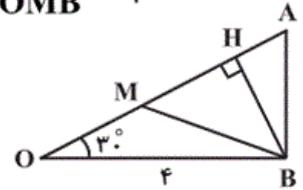
$$OH = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \quad \text{نصف طول وتر است و در نتیجه داریم:}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}BH \times OA = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta OMB}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{OM}{OA} \Rightarrow \frac{S_{\Delta OMB}}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\Delta OMB} = \frac{4}{3}$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{قطاع OAB}} - S_{\Delta OMB}$$

$$= \frac{\pi \times 4^2 \times 30^\circ}{360^\circ} - \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}(\pi - 1)$$



(هندسه ۲ - صفحه ۱۲)

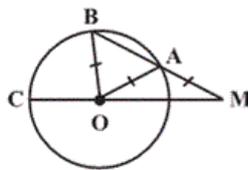
۴

۳

۲

۱ ✓

مطابق شکل  $OA = OB$  است، پس  $\hat{OAB} = \hat{ABO} = 40^\circ$  و در نتیجه



در مثلث OAB،  $\hat{AOB} = 100^\circ$  است.

از طرفی زاویه OAM، زاویه خارجی

مثلث OAB است و در نتیجه داریم:

$$\hat{OAM} = \hat{AOB} + \hat{ABO} = 100^\circ + 40^\circ = 140^\circ$$

$$\Delta OAM : OA = AM = 2 \Rightarrow \hat{AMO} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$$

از طرفی زاویه BOC، زاویه خارجی مثلث OMB است، پس داریم:

$$\hat{BOC} = \hat{AMO} + \hat{ABO} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر طول شعاع دایره است، پس  $R = 8$

$$\Delta \text{OHN} : \text{OH}^2 = \text{ON}^2 - \text{NH}^2 = 8^2 - 6^2 = 28 \quad \text{است و داریم:}$$

چهارضلعی  $\text{OHAH}'$  مستطیل است، بنابراین  $\text{OH} = \text{AH}'$  و در نتیجه داریم:

$$\Delta \text{OH}'\text{A} : \text{OA}^2 = \text{OH}'^2 + \text{AH}'^2 = 6^2 + 28 = 92 \Rightarrow \text{OA} = 2\sqrt{23}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ و ۱۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۲۵-

(معیار بفعری نوره)

طول وتر  $CD$  برابر طول شعاع دایره است، بنابراین در صورتی که از نقطه  $O$  (مرکز دایره) به نقاط  $C$  و  $D$  وصل کنیم، مثلث  $OCD$  متساوی‌الاضلاع خواهد بود و در نتیجه  $\widehat{CD} = 60^\circ$  است. اگر  $\widehat{CE} = x$ ،  $\widehat{DF} = z$  و  $\widehat{EF} = y$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$\widehat{A} = \frac{(60^\circ + z + y) - x}{2} = 80^\circ \Rightarrow 60^\circ + z + y - x = 160^\circ$$

$$\Rightarrow z + y - x = 100^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{B} = \frac{(60^\circ + x + y) - z}{2} = 50^\circ \Rightarrow 60^\circ + x + y - z = 100^\circ$$

$$\Rightarrow x + y - z = 40^\circ \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 2y = 140^\circ \Rightarrow y = 70^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = \frac{y}{2} = 35^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

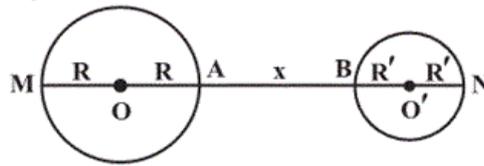
۴

۳

۲ ✓

۱

(مسئله هجری)

مطابق شکل زیر، اگر کمترین فاصله تقاطع دو دایره برابر  $AB = x$  باشد، آن گاه داریم:

$$\text{بیشترین فاصله دو دایره} = MN = R + R + x + R' + R'$$

$$= 2R + 2R' + x = 18 \xrightarrow{x=8} 2R + 2R' + 8 = 18 \Rightarrow R + R' = 5$$

$$d = OO' = R + R' + x = 5 + 8 = 13$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی دو دایره} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میثم بهرامی بویا)

اگر دو دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند، دو دایره متقاطع هستند و رابطه زیر برقرار است:

$$|R - R'| < OO' < R + R'$$

$$|R - R'| = |2x + 3 - (8 - x)| = |3x - 5|$$

$$R + R' = 2x + 3 + 8 - x = x + 11$$

با توجه به مقادیر فوق، نامساوی به صورت  $|3x - 5| < 3x + 1 < x + 11$  درمی‌آید. داریم:

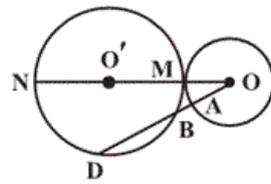
$$\left. \begin{array}{l} 1) |3x - 5| < 3x + 1 \xrightarrow{x \geq \frac{5}{3}} 3x - 5 < 3x + 1 \Rightarrow -5 < 1 \text{ بدیهی است} \\ |3x - 5| < 3x + 1 \xrightarrow{x < \frac{5}{3}} -3x + 5 < 3x + 1 \Rightarrow 6x > 4 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

۴

۳ ✓

۲

۱



مطابق شکل  $OA = OM = \frac{1}{2}R$  و  $OD = MN = 2R$  است. طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$OB \times OD = OM \times ON \Rightarrow OB \times 2R = \frac{1}{2}R \times \frac{5}{2}R \Rightarrow OB = \frac{5}{8}R$$

$$AB = OB - OA = \frac{5}{8}R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{8}R$$

$$BD = OD - OB = 2R - \frac{5}{8}R = \frac{11}{8}R \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{\frac{1}{8}R}{\frac{11}{8}R} = \frac{1}{11}$$

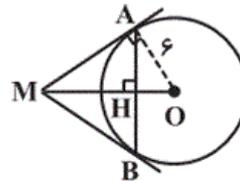
(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۴

۳ ✓

۲

۱



می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر دایره برابر یکدیگرند، پس  $MA = MB$  است. از طرفی  $OA = OB$  است، بنابراین  $OM$  عمود منصف پاره خط  $AB$  می‌باشد، یعنی  $AH = HB$  و  $OM \perp AB$ . مطابق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $OAM$  داریم:

$$\Delta OAM : AM^2 = OM^2 - AO^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AM = 8$$

$$AH \times OM = AO \times AM \Rightarrow AH \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow AH = 4/8$$

$$\Rightarrow AB = 2 \times 4/8 = 9/6$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

۳ ✓

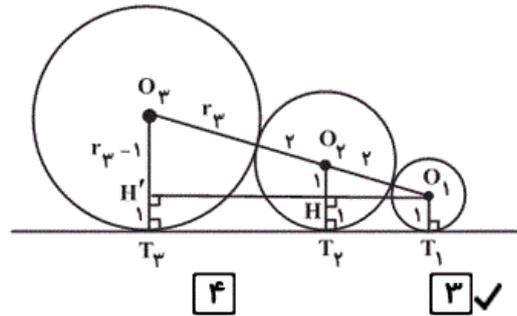
۲

۱

(امسان فیبرالعی)

$$T_1 T_2 = 2\sqrt{r_1 r_2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{r_1 \times 2r_1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2r_1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow r_1 = 1 \Rightarrow r_2 = 2$$



۴

۳✓

۲

۱

(امسن باطنی)

$$S_{17} = 221 \Rightarrow \frac{17(a_1 + a_{17})}{2} = 221 \Rightarrow a_1 + a_{17} = 26$$

$$a_1 + a_{17} = a_5 + a_{13} = a_8 + a_{10}$$

$$\Rightarrow a_5 + a_{13} + a_8 + a_{10} = 26 + 26 = 52$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

می‌دانیم:

۴✓

۳

۲

۱

(امیر غلامی)

$$S_{n+1} - S_{n-1} = a_{n+1} + a_n = \lambda n + 6$$

$$\Rightarrow a_1 + nd + a_1 + (n-1)d = \lambda n + 6$$

$$\Rightarrow 2a_1 - d + 2dn = \lambda n + 6 \Rightarrow \begin{cases} 2d = \lambda \\ 2a_1 - d = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = 5 + 4(4) = 21$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱✓

-۱۰۳

(میلاد سفاری لاریبانی)

دنباله ۱۹ جمله دارد که ۹ جمله با ردیف زوج و ۱۰ جمله با ردیف فرد می‌باشند و قدرنسبت هر یک از ردیف‌های زوج و فرد برابر  $4 = 2d$  می‌باشد. همچنین جمله اول دنباله با ردیف زوج  $a_2$  می‌باشد.

$$S_{\text{فرد}} = S_{\text{زوج}}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 4) = \frac{9}{2}(\underbrace{(2a_2)}_{2(a_1+2)} + 8 \times 4)$$

$$\Rightarrow 10(2a_1 + 36) = 9(2a_1 + 36) \Rightarrow 2a_1 + 36 = 0$$

$$\Rightarrow 2a_1 = -36 \Rightarrow a_1 = -18$$

$$\Rightarrow a_{15} = -18 + (14) \times (2) \Rightarrow a_{15} = 10$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۰۴

(جهانبخش نیکنام)

دنباله  $a_n$  هندسی با جمله اول ۲ و قدرنسبت ۳ می‌باشد و  $b_n$  حسابی با جمله اول -۸ و قدرنسبت ۶ است. مجموع ۱۱ جمله اول دنباله  $b_n$  برابر

$$\frac{11}{2}(2(-8) + 10 \times 6) = 242 \quad \text{است با:}$$

$$\frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1 \quad \text{مجموع } n \text{ جمله اول دنباله } a_n:$$

$$\Rightarrow 3^n - 1 = 242 \Rightarrow 3^n = 243 \Rightarrow n = 5$$

باید ۵ جمله ابتدایی از دنباله  $a_n$  را با هم جمع کنیم.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۰۵

(پورییا مهرث)

ریشه‌های معادله ( $\alpha$  و  $\beta$ ) در خود معادله صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} \beta^2 - 4\beta = -1 \\ \alpha^2 - 4\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow (-1 + 4)(-1 + 2) = 3$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(قاسم کتابچی)

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -5 \Rightarrow \alpha = \frac{-5}{\beta}$$

$$\Rightarrow \left| \alpha + \frac{5}{\alpha} \right| = \left| \frac{-5}{\beta} + \frac{5}{\alpha} \right| = \left| \frac{5(\beta - \alpha)}{\alpha\beta} \right| = \left| \frac{5(\beta - \alpha)}{-5} \right|$$

$$= |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{49 + 20}}{1} = \sqrt{69}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی شعرابی)

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را حساب می‌کنیم:

$$S' = \frac{\alpha}{\beta} + 1 + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2 = \frac{S^2 - 2P}{P} + 2 = \frac{4 - 1}{\frac{1}{2}} + 2 = 8$$

$$P' = \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)\left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right) = 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = S' = 8$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$$

پس:

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(پوریا مهرث)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

سهمی در  $x = 2$  بر محور  $x$  ها مماس است، پس رأس سهمی نقطه  $(2, 0)$  است. داریم:

$$S(2, 0) \in f \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (*)$$

$$f(x) = a(x-2)^2 \xrightarrow{(0, -4) \in f} -4 = a(0-2)^2$$

$$\Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = 4, (0, -4) \in f \Rightarrow c = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b + c = -1 - 4 + (-4) = -9$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

برای این که نمودار تابع از هر چهار ناحیه بگذرد باید دو ریشه با علامت‌های مختلف داشته باشد.

$$\text{شرط اول: } \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{2+m} < 0 \Rightarrow -2 < m < 1 \quad (\text{I})$$

m	-2	1
$\frac{m-1}{m+2}$	+	-
	ت. ن.	+

و چون دارای min است، پس باید ضریب  $x^2$  مثبت باشد.

$$\text{شرط دوم: } 2+m > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) \Rightarrow -2 < m < 1$$

توجه کنید که وقتی  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، حتماً شرط  $\Delta > 0$  برقرار است (چرا؟)

(مسئله‌ها ۷ تا ۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

$$\frac{2}{x} = \frac{x+a}{x+2} + 1 \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2x+a+2}{x+2} \Rightarrow 2x^2 + ax + 2x = 2x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + ax - 4 = 0 \Rightarrow S = 2P \Rightarrow \frac{-a}{2} = 2 \times \frac{-4}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{2} = -4 \Rightarrow a = 8$$

توجه کنید که به ازای  $a = 8$ ، جواب معادله  $x = 0$  یا  $x = -2$  نمی‌شود.

(مسئله‌ها ۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱✓

چون غلظت آن ۲۵٪ جرمی است پس ۲۵ کیلوگرم از محلول اولیه، شکر و ۷۵ کیلوگرم از آن آب است. اگر  $\frac{1}{3}$  از آب را تبخیر کنیم ( $25 = \frac{1}{3} \times 75$ )، ۵۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند.

۴

۳✓

۲

۱

(موانبش نیکنام)

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = 0 \quad (x > -1, x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2x} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2x} \Rightarrow 2x = \sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{x > 0} 4x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{17}}{8} & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \Rightarrow 8\alpha - 1 = \sqrt{17} \end{cases}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۷ و ۱۷ تا ۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شهرابی)

۸ ساعت و ۴۵ دقیقه یعنی  $8\frac{3}{4}$  ساعت که می‌شود  $\frac{35}{4}$  ساعت.

نکته: اگر شخص اول کاری را در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم آن کار را در C ساعت انجام دهند، داریم:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

اگر فرض کنیم مهدی کار را در x ساعت انجام می‌دهد، علی آن کار را ۶ ساعت زودتر یعنی در x-۶ ساعت انجام می‌دهد. با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{35}{4}} \Rightarrow \frac{x+x-6}{x^2-6x} = \frac{4}{35}$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 24x = 70x - 210 \Rightarrow 2x^2 - 47x + 105 = 0$$

دلتا را حساب می‌کنیم:  $\Delta = (-47)^2 - 4(2)(105) = 1369$

$$x = \frac{47 \pm \sqrt{1369}}{4} = \frac{47 \pm 37}{4} \xrightarrow{x > 6} \begin{cases} x = 2/5 & \times \\ x = 21 & \checkmark \end{cases}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۷ و ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(پوریا مهرش)

$$\begin{aligned} \text{به توان ۲} \rightarrow 9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} = 9 &\Rightarrow \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} = 0 \\ \Rightarrow \sqrt{x(x^2 - 2x + 1)} = 0 &\Rightarrow x(x-1)^2 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} &\Rightarrow \text{هر دو در معادله اولیه صدق می‌کنند.} \end{aligned}$$

(مسایبان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳✓

۲

۱

(پوریا مهرش)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} = t &\Rightarrow t - \frac{5}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 - 5 = 4t \\ \Rightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 5 \end{cases} \text{ غ ق ق} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = 5 \Rightarrow x = 22$$

(مسایبان ۱- صفحه‌های ۷، ۱۳ و ۱۷ تا ۲۲)

۴

۳

۲✓

۱

(علی کردی)

با توجه به رادیکال‌ها،  $x$  تنها در مجموعه  $(2, +\infty) \cup \{0\}$  تعریف شده است.

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x} &\Rightarrow (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}\sqrt{x-2} - \sqrt{x} = 0 \\ \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2} - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 \end{cases}$$

چون  $x \geq 2$ ، لذا  $\sqrt{x} > 1$  و چون  $\sqrt{x-2} \geq 0$  بنابراین

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-2} > 1 \text{ لذا معادله } \sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 \text{ جواب ندارد.}$$

(مسایبان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲✓

۱

(میلاد سجادی لاریجانی)

$$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = -2 \xrightarrow{\sqrt[3]{x-1}=t} t - t^2 = -2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1}=2 \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow x=9 \\ t=-1 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1}=-1 \Rightarrow x-1=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

هر ۲ ریشه در معادله صدق می‌کنند. پس:  $9 + 0 = 9$ : مجموع جواب‌ها  $\Rightarrow$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷، ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(امید غلامی)

با توجه به رادیکال‌ها، باید محدوده تعریف شدن  $x$  بررسی شود:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

$$\sqrt{a-3x} \geq 0 \Rightarrow 3x \leq a \Rightarrow x \leq \frac{a}{3} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که حداقل مقدار ممکن برای  $\frac{a}{3}$  می‌تواند ۱

باشد، به عبارتی  $a = 3$ . با قرار دادن مقدار  $a$ ، جواب قابل قبول  $x = 1$  در

معادله صدق می‌کند. بنابراین  $a = 3$ ، حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سینا ممبرپور)

$$3x - \frac{1}{x} = 2 \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{طرفین را در } x \neq 0} 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

حال با توجه به روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم داریم:

$$S = (m + n) + (m - n) = \frac{2}{3} \Rightarrow 2m = \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$P = (m + n)(m - n) = -\frac{1}{3} \Rightarrow m^2 - n^2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow n^2 = m^2 + \frac{1}{3} \Rightarrow n^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow n = \pm \frac{2}{3}$$

$$mn = \begin{cases} \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

(مسئله ۱- صفحه‌های ۸ و ۹ و ۱۷ تا ۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(میلاد سفادی لاریجانی)

$$x - \sqrt{4x} = m \Rightarrow x - 2\sqrt{x} - m = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t - m = 0$$

برای این که معادله دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، با توجه به تغییر متغیر هر دو ریشه باید نامنفی باشند:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4(1)(-m) > 0 \Rightarrow 4 + 4m > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m}{1} > 0 \Rightarrow m < 0 \\ S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2}{1} > 0 \quad \checkmark \end{array} \right. \Rightarrow -1 < m < 0$$

در حالت  $m = 0$  نیز معادله به شکل زیر درمی‌آید که دو جواب دارد.

$$x - 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر برای  $m$  به صورت  $\{m \mid -1 < m \leq 0\}$  است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۶ و ۲۰ تا ۲۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر  $\widehat{TBT'} = \alpha$  فرض شود، آن گاه داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{TBT'} = 4\hat{A} &\Rightarrow \frac{\widehat{TMT'}}{2} = 4 \times \frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TMT'}}{2} \\ \Rightarrow \widehat{TMT'} &= 4\widehat{TBT'} - 4\widehat{TMT'} \Rightarrow \widehat{\Delta TMT'} = 4\widehat{TBT'} \\ \Rightarrow \widehat{\Delta(36^\circ - \alpha)} &= 4\alpha \Rightarrow 180^\circ - \Delta\alpha = 4\alpha \Rightarrow 9\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ \end{aligned}$$

(هندسه ۲ - صفحه ۱۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

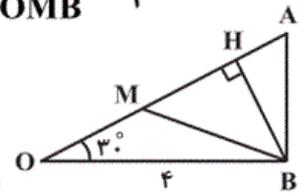
اگر در مثلث  $OAB$ ، ارتفاع  $BH$  را رسم کنیم، آن گاه در مثلث قائم الزاویه  $OBH$ ، ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$  است، پس طول آن

$$OH = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \quad \text{نصف طول وتر است و در نتیجه داریم:}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}BH \times OA = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta OMB}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{OM}{OA} \Rightarrow \frac{S_{\Delta OMB}}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\Delta OMB} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{هاشورخورده}} &= S_{\text{قطاع } OAB} - S_{\Delta OMB} \\ &= \frac{\pi \times 4^2 \times 30^\circ}{360^\circ} - \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}(\pi - 1) \end{aligned}$$



(هندسه ۲ - صفحه ۱۲)

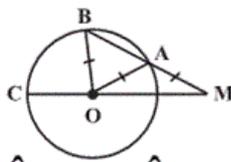
۴

۳

۲

۱ ✓

(رعیع مشتاق نظم)

مطابق شکل  $OA = OB$  است، پس  $\hat{OAB} = \hat{ABO} = 40^\circ$  و در نتیجهدر مثلث  $OAB$ ،  $\hat{AOB} = 100^\circ$  است.  
از طرفی زاویه  $\hat{OAM}$ ، زاویه خارجی  
مثلث  $OAB$  است و در نتیجه داریم:

$$\hat{OAM} = \hat{AOB} + \hat{ABO} = 100^\circ + 40^\circ = 140^\circ$$

$$\Delta OAM : OA = AM = 2 \Rightarrow \hat{AMO} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$$

از طرفی زاویه  $\hat{BOC}$ ، زاویه خارجی مثلث  $OMB$  است، پس داریم:

$$\hat{BOC} = \hat{AMO} + \hat{ABO} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۴

۳✓

۲

۱

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر طول شعاع دایره است، پس  $R = 8$ 

$$\Delta OHN : OH^2 = ON^2 - NH^2 = 8^2 - 6^2 = 28$$
 است و داریم:
   
چهارضلعی  $OHAH'$  مستطیل است، بنابراین  $OH = AH'$  و در نتیجه داریم:

$$\Delta OH'A : OA^2 = OH'^2 + AH'^2 = 64 + 28 = 92 \Rightarrow OA = 2\sqrt{23}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ و ۱۳)

۴

۳✓

۲

۱

(معیار جعفری نوده)

طول وتر  $CD$  برابر طول شعاع دایره است، بنابراین در صورتی که از  
نقطه  $O$  (مرکز دایره) به نقاط  $C$  و  $D$  وصل کنیم، مثلث  $OCD$   
متساوی‌الاضلاع خواهد بود و در نتیجه  $\widehat{CD} = 60^\circ$  است. اگر  $\widehat{CE} = x$ ،  
 $\widehat{DF} = z$  و  $\widehat{EF} = y$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$\hat{A} = \frac{(60^\circ + z + y) - x}{2} = 80^\circ \Rightarrow 60^\circ + z + y - x = 160^\circ$$

$$\Rightarrow z + y - x = 100^\circ \quad (1)$$

$$\hat{B} = \frac{(60^\circ + x + y) - z}{2} = 50^\circ \Rightarrow 60^\circ + x + y - z = 100^\circ$$

$$\Rightarrow x + y - z = 40^\circ \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 2y = 140^\circ \Rightarrow y = 70^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = \frac{y}{2} = 35^\circ$$

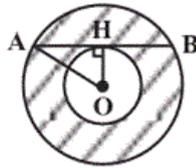
(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۴

۳

۲✓

۱



اگر S و S' به ترتیب مساحت دایره‌های بزرگ و کوچک باشند، آن گاه داریم:

$$S - S' = \pi R^2 - \pi r^2 = 16\pi \Rightarrow \pi(R^2 - r^2) = 16\pi$$

$$\Rightarrow R^2 - r^2 = 16$$

مطابق شکل شعاع OH از دایره کوچک‌تر در نقطه H بر وتر AB از دایره

بزرگ‌تر عمود است، بنابراین داریم:

$$\Delta OHA : OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = OA^2 - OH^2 = R^2 - r^2 = 16 \Rightarrow AH = 4 \Rightarrow AB = 2 \times 4 = 8$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ریم مشتاق نظم)

$$\widehat{DFB} = 60^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BD} + \widehat{EC}}{2} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{EC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{DE} = 240^\circ$$

$$\frac{(\widehat{BD} + \widehat{DE} + \widehat{EC}) - \widehat{BC}}{2} = 20^\circ \Rightarrow 120^\circ + \widehat{DE} - \widehat{BC} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BC} - \widehat{DE} = 80^\circ$$

$$\begin{cases} \widehat{BC} - \widehat{DE} = 80^\circ \\ \widehat{BC} + \widehat{DE} = 240^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BC} = 160^\circ \Rightarrow \widehat{DE} = 80^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$AH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$\Delta AHO : AO^2 = AH^2 + OH^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AO = 13$$

AO همان شعاع دایره است پس داریم: DO = AO = R = 13  $\Rightarrow$  CD = 26  
طول پاره‌خطی که وسط ساق‌های یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر میانگین طول‌های دو قاعده ذوزنقه است، در نتیجه داریم:

$$MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{10 + 26}{2} = 18$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ و ۱۳)

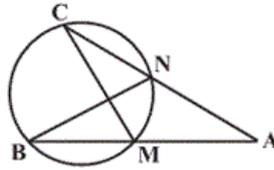
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سیدسروش کریمی مداحی)



$$\widehat{N\hat{C}M} = \widehat{N\hat{B}M} = \frac{\widehat{MN}}{2} \left. \vphantom{\widehat{N\hat{C}M}} \right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \triangle ABN \sim \triangle ACM$$

$$\hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{AB=2AM, AC=2AN} \frac{AN}{AM} = \frac{2AM}{2AN}$$

$$\Rightarrow 2AM^2 = 2AN^2 \Rightarrow AM = AN \Rightarrow BM = CN$$

اگر در دایره‌ای طول دو وتر برابر باشد، آن‌گاه اندازه کمان‌های نظیر آن

$$\widehat{BM} = \widehat{CN} = 5^\circ \quad (1) \quad \text{دو وتر نیز با هم برابرند، یعنی:}$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} - \widehat{MN} = 112^\circ$$

$$\widehat{BC} + \widehat{CN} + \widehat{MN} + \widehat{BM} = 360^\circ \xrightarrow{(1)} \widehat{BC} + \widehat{MN} = 260^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MN} = 74^\circ$$

$$x = \widehat{N\hat{C}M} = \frac{\widehat{MN}}{2} = \frac{74^\circ}{2} = 37^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۴

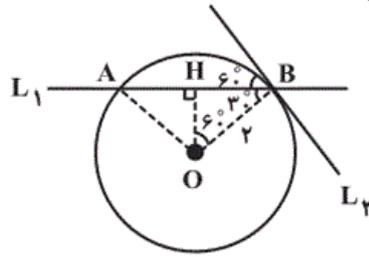
۳

۲ ✓

۱

(امسان فیراللهی)

از آنجایی که زاویه B ظلی است، بنابراین  $\widehat{AB} = 120^\circ$  و در نتیجه  $\widehat{AOB} = 120^\circ$  و  $\widehat{HOB} = 60^\circ$  است.



در مثلث قائم‌الزاویه OHB، طول ضلع BH (ضلع روبه‌رو به زاویه  $60^\circ$ ).

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ طول وتر است، پس داریم: } BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

همچنین طول ضلع OH (ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$ )، نصف طول وتر

است، پس  $OH = \frac{1}{2} \times 2 = 1$  است. در نتیجه داریم:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \times OH \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

(هنرسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیرحسین ابومحبوب)

گزاره  $\sim q \Rightarrow p$  نادرست است، پس گزاره  $p$  درست و گزاره  $\sim q$

نادرست است و در نتیجه گزاره  $q$  درست است. از طرفی دو گزاره  $q$

و  $q \Rightarrow r$  درست هستند، پس گزاره  $r$  نیز لزوماً درست است. حال برای

دو گزاره داده شده داریم:

$$(\sim r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim p) \equiv (F \Rightarrow T) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Leftrightarrow q) \equiv (T \wedge T) \Rightarrow (F \Leftrightarrow T) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow \sim q \equiv [(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow \sim q$$

$$\equiv [(\sim p \wedge p) \vee q] \Leftrightarrow \sim q \equiv (F \vee q) \Leftrightarrow \sim q \equiv q \Leftrightarrow \sim q \equiv F$$

توجه کنید که چون  $q$  و  $\sim q$  همواره دارای ارزش‌های متفاوت می‌باشند،

گزاره  $\sim q \Leftrightarrow q$  هم‌ارز با  $F$  است.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم نقیض سور وجودی، سور عمومی است. از طرفی نقیض

گزاره  $(p \wedge q)$  به صورت گزاره  $(\sim p \vee \sim q)$  است. پس اگر

گزاره‌های  $p$  و  $q$  به ترتیب به صورت « $n$  عددی اول است» و « $n$

عددی فرد نیست» تعریف شوند، آن‌گاه داریم:

$$\sim(\exists n \in \mathbb{N} ; p \wedge q) \equiv \forall n \in \mathbb{N} ; \sim p \vee \sim q$$

بنابراین نقیض گزاره مورد نظر عبارت است از: «برای هر عدد طبیعی  $n$ ،

$n$  عددی اول نیست یا  $n$  عددی فرد است.»

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزینهٔ «۱»: رابطه به ازای  $x = -4$  برقرار نیست، پس گزارهٔ سوری نادرست است.

گزینهٔ «۲»: رابطه به ازای  $x = 0$  برقرار نیست، پس گزارهٔ سوری نادرست است.

گزینهٔ «۳»: در معادلهٔ  $2x^2 + 5x + 4 = 0$ ،  $\Delta = -7$  است، پس معادله فاقد ریشهٔ حقیقی است و در نتیجه گزارهٔ سوری درست است.

گزینهٔ «۴»: رابطه به ازای  $x = 1$  برقرار نیست، پس گزارهٔ سوری نادرست است.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزینه «۱»: معادله  $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$  به ازای  $x \neq -2$  و در نتیجه برای

همه اعضای مجموعه  $A$  برقرار است، پس این گزاره سوری درست است.

گزینه «۲»:  $x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 1 \end{cases}$

$1 \in A$ ، پس این گزاره سوری درست است.

گزینه «۳»:

$$|3 - x| < 2 \Rightarrow |x - 3| < 2 \Rightarrow -2 < x - 3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$$

بنابراین نامساوی به ازای مقادیر  $x = 1$  و  $x = 5$  برقرار نیست و در نتیجه

گزاره سوری نادرست است.

گزینه «۴»:  $x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow x(x - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

بنابراین نامساوی به ازای  $x = 1$  برقرار است و در نتیجه گزاره سوری

درست است.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

از آنجایی که  $A = B$  است بنابراین باید دارای اعضای برابر باشند. پس

از بین  $(x+1)$  و  $(y-4)$  یکی برابر  $(-4)$  و دیگری برابر  $6$  است. داریم:

$$(x+1) + (y-4) = (-4) + 6 = 2 \Rightarrow x+y-3=2 \Rightarrow x+y=5$$

همچنین از بین  $(z-2)$  و  $(t+3)$  یکی برابر  $(-3)$  و دیگری برابر  $5$

است. داریم:

$$(z-2) + (t+3) = (-3) + 5 = 2 \Rightarrow z+t+1=2 \Rightarrow z+t=1$$

$$\text{بنابراین } \frac{z+t}{x+y} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ است.}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$(A' \cap B) \subseteq (B' \cap A) \xrightarrow[\frac{A \cap B' = A - B}{B \cap A' = B - A}]{} (B - A) \subseteq (A - B)$$

$$\xrightarrow[\text{از هم هستند}]{\text{جدا } B - A \text{ و } A - B} B - A = \emptyset \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq B'$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فرض کنید تعداد اعضای مجموعه‌های  $A - B$ ،  $B - A$  و  $A \cap B$ ، به ترتیب برابر  $x$ ،  $y$  و  $z$  باشد. در این صورت تعداد اعضای مجموعه  $A \cup B$ ، برابر  $x + y + z$  است و داریم:

$$2^{x+y+z} - 2^z = 192 \Rightarrow 2^z(2^{x+y} - 1) = 2^6 \times 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 6 \\ 2^{x+y} - 1 = 3 \Rightarrow 2^{x+y} = 4 = 2^2 \Rightarrow x + y = 2 \end{cases}$$

بنابراین حداکثر مقدار  $x$ ، برابر ۲ است و در نتیجه حداکثر تعداد اعضای مجموعه  $A$ ، برابر است با:

$$\max |A| = \max(|A - B| + |A \cap B|) = 2 + 6 = 8$$

پس حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های  $A$ ، برابر  $2^8 = 256$  است.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left. \begin{matrix} A' \subseteq B \\ B \subseteq C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A' \subseteq C \Rightarrow C' \subseteq A$$

گزینه «۱»:

$$\left. \begin{matrix} A' \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq A \\ A \subseteq B \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = B$$

گزینه «۲»:

گزینه «۳»:

$$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq B \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup B \xrightarrow{B \cup B = B} A \cup C \subseteq B$$

گزینه «۴»: به عنوان مثال نقض، اگر  $A = \{1\}$ ،  $B = \{1, 2\}$  و  $C = \{1, 3\}$  باشند، آن‌گاه  $A \subseteq B$  و  $A \subseteq C$  است ولی  $C \not\subseteq B$ .

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزینه «۱»: اشتراک دو مجموعه  $(A' \cap B')$  و  $B'$ ، برابر مجموعه  $A' \cap B'$  است. اگر این مجموعه برابر تهی باشد، آن گاه یکی از قطعات افراز تهی است و در صورتی که تهی نباشد، اشتراک دو قطعه از افراز، ناتهی است که در هر دو صورت مخالف تعریف افراز است.

گزینه «۲»: اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B'$ ، برابر مجموعه  $A \cap B'$  یا  $A - B$  است که چون  $A$  حداقل دارای یک عضو است که به  $B$  تعلق ندارد، پس مجموعه  $A - B$  غیرتهی است که مخالف تعریف افراز است.

گزینه «۳»: اشتراک دوبه دوی مجموعه‌ها تهی است و داریم:

$$\begin{aligned} A \cup (A' \cap B') \cup (B - A) &= A \cup [(B' \cap A') \cup (B \cap A')] \\ &= A \cup [\underbrace{(B' \cup B)}_U \cap A'] = A \cup A' = U \end{aligned}$$

پس این سه مجموعه یک افراز برای مجموعه  $U$  هستند.

گزینه «۴»: مجموعه  $B$  حداقل یک عضو دارد که به مجموعه  $A$  تعلق ندارد. این عضو قطعاً به هیچ کدام از مجموعه‌های  $A - B$ ،  $A \cap B$  و  $A' \cap B'$  نیز تعلق ندارد، پس اجتماع این سه مجموعه نمی‌تواند برابر مجموعه  $U$  باشد.

(آمار و احتمال - صفحه ۲۱)

۴

۳ ✓

۲

۱