ریاضی پایه ، معادله و نامعادله ، تعیین علامت - ۱۰ سوال

۱۱۱-مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^2+x+4} = x^2+x-8$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۱

۱۱۲-اگر $\sqrt{2x+3}-2=3x$ باشد، حاصل $9x+3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۳-چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} > x-1$ صدق می‌کند؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۱۱۴-اگر جدول تعیین علامت عبارت $f(x)=-3x^2+4ax+b$ به‌صورت زیر باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

x		2	
$f(x)$	$-$	$\vdots$	$-$

۱) صفر ۲) ۹
۳) ۱۵ ۴) ۲۴

۱۱۵-می‌دانیم معادلهٔ $\left|x^2-3\right| = |2-a|-1$ برای x جواب حقیقی دارد، مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(0,3)$ ۲) $\mathbb{R}-[0,3]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $\mathbb{R}-(1,3)$

۱۱۶-اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقادیر x که در نامعادلهٔ $\left|x^2-2x\right| \le 1$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۱

۱۱۷-اگر a ریشهٔ معادلهٔ $\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}$ باشد، حاصل $\frac{4a+1}{a}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۱۱۸-مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{3x^2-3x}{x^3-1} \ge 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۱۱۹-سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۹ متر در دقیقه است. این قایق یک مسیر ۸۰ متری را در جهت موافق جریان آب رفته و درجهت مخالف برگشته است. اگر اختلاف زمان رفت و برگشت ۲ دقیقه باشد، سرعت قایق موتوری در مسیر رفت چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۲۰-شیر B مربوط به استخری را باز می‌کنیم و ۶/۵ ساعت بعد از بازشدن شیر B، شیر A را نیز در این استخر باز می‌کنیم. پس از گذشت ۹ ساعت از بازبودن شیر B استخر کامل پر می‌شود. اگر هریک از این شیرهای آب به تنهایی استخر را پرمی‌کردند شیر B دو ساعت بیش‌تر وقت لازم داشت. شیر A به تنهایی در چند ساعت استخر را پُر می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

ریاضی ۳ - دوازدهم ، تابع - ۱۰ سوال

۹۱- اگر تابع $y=\dfrac{3x^2+x}{(a-1)x^2+bx+c}$ در دامنهٔ خود یک تابع همانی باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۲- اگر $f=\{(2,5),(6,3),(3,4),(4,7)\}$ و $g=\{(3,2),(2,1),(4,5),(1,3)\}$ باشد، آن‌گاه برد تابع $fo(2g)$ کدام است؟

۱) $\{5,3\}$ ۲) $\{4,5,7\}$ ۳) $\{7,5,3\}$ ۴) $\{3,7,5,4\}$

۹۳- تابع $f(x)=\begin{cases} 2mx-x^2 & x\le 1 \\ -2x^3+3mx & x\ge 1 \end{cases}$ مفروض است. مقدار $f(1-\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}-1$ ۲) 1 ۳) -1 ۴) $4\sqrt{2}$

۹۴- اگرخروجی ماشین زیر برابر $\frac{1}{6}$ باشد، مقدار ورودی آن کدام است؟

$$\text{ورودی} \longrightarrow \boxed{2x-3} \longrightarrow \boxed{\dfrac{\sqrt{2x}-1}{3x}} \longrightarrow \text{خروجی}$$

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹۵- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}+1$ باشند، با کدام‌یک از انتقال‌های زیر نمودار fog بر نمودار g منطبق می‌شود؟

۱) ۹ واحد به چپ، ۱ واحد به بالا
۲) ۹ واحد به چپ، ۱ واحد به پایین
۳) ۹ واحد به راست، ۱ واحد به بالا
۴) ۹ واحد به راست، ۱ واحد به پایین

۹۶- اگر تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم: $f(3)=0$؛ آن‌گاه دامنهٔ $g(x)=\sqrt[4]{(x-3)^2 f(2-x)}$ کدام است؟

۱) $(-1,+\infty)$ ۲) $[3,+\infty)$ ۳) $(3,+\infty)$ ۴) $[-1,+\infty)$

۹۷- اگر دامنهٔ تابع $y=f(2x-1)+3$ به‌صورت $[-2,6]$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $g(x)=3f(4x-2)-3$ کدام است؟

۱) $[-1,3]$ ۲) $[-\frac{3}{4},\frac{13}{4}]$ ۳) $[\frac{3}{8},\frac{11}{8}]$ ۴) $[-3,1]$

۹۸- تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\geq 0 \\ (x-1)^3+4 & x<0 \end{cases}$ مفروض می‌باشد. به‌ازای چند مقدار صحیح از α معادلهٔ $f(x)=\alpha$ دارای دو جواب می‌باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۹۹- تابع $f(x)=x^3$ مفروض است. اگر تابع $f(x)$ را ۴ واحد به پایین و دو واحد به راست منتقل کنیم، تابع $g(x)$ به‌دست می‌آید. معادلهٔ $f(x)=g(x)$ چند جواب دارد؟

۱) یک جواب مثبت ۲) یک جواب منفی

۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۴) این معادله جواب ندارد.

۱۰۰- اگر $f(x)=\sqrt{10x-x^2}$ و $g(x)=\frac{1}{x+|x|}$ باشند، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=(fog-gof)(x)$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{20},+\infty)$ ۲) $(0,10)$ ۳) $[\frac{1}{20},10)$ ۴) $(\frac{1}{10},10]$

ریاضی ۳ - دوازدهم - گواه ، تابع - ۱۰ سوال -

۱۰۱- حدود k برای این‌که تابع با ضابطهٔ $A(x)=\frac{6x^2-2x}{-kx^2+2x-9k}$ همواره به ازای جمیع مقادیر حقیقی x تعریف شده باشد، کدام است؟

۱) $R-\{0\}$ ۲) $0<k<\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{3}$ ۴) $k<-\frac{1}{3}$ یا $k>\frac{1}{3}$

۱۰۲- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|-x$ و $y=2-\frac{3}{2}x$، کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) ۶

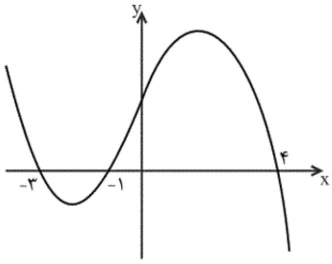
۱۰۳- نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x-[x]$ ؛ $x\in[-2,3)$ از n پاره‌خط مساوی به‌اندازهٔ L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n,L) کدام است؟

۱) $(4,1)$ ۲) $(4,\sqrt{2})$ ۳) $(5,1)$ ۴) $(5,\sqrt{2})$

۱۰۴- دو تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & ; x\neq -1 \\ b & ; x=-1 \end{cases}$ و $g(x)=x^2+ax+1$ با هم مساوی‌اند. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۵-شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$

۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$

۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$

۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۱۰۶-قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۲ ۲) $۰/۵$ ۳) ۱ ۴) $۱/۵$

۱۰۷-اگر $f(x)=(۲x-۳)^۲$ و $g(x)=x+۲$ نمودارهای دو تابع f و fog، با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

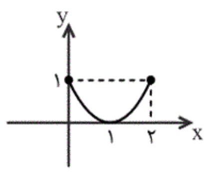
۱۰۸-اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ باشند، جواب معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $-۱,-۷$ ۲) $۱,-۷$ ۳) $-۱,۷$ ۴) $۱,۷$

۱۰۹-اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$ ۲) $R-\{۰,۸\}$ ۳) $R-\{۰\}$ ۴) $(۰,+\infty)$

۱۱۰-نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر است. تابع $y=f(f(x))$ با ورودی $۱\le x\le ۲$ چگونه است؟



۱) صعودی

۲) نزولی

۳) ابتدا نزولی سپس صعودی

۴) ابتدا صعودی سپس نزولی

۱۱۱- گزینهٔ «۳» (عباس کنجی)

با تغییر متغیر $x^{۲}+x=a$ داریم:

$$a-۸=\sqrt{a+۴}$$

$$\longrightarrow a^{۲}-۱۶a+۶۴=a+۴\Rightarrow a^{۲}-۱۷a+۶۰=۰$$

$$\Rightarrow (a-۱۲)(a-۵)=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۱۲ \\ a=۵ \end{cases}$$

از طرفی $a=۵$ در شرط $a-۸\geq ۰$ صدق نمی‌کند، پس $a=۱۲$ قابل قبول است. بنابراین:

$$x^{۲}+x=۱۲\Rightarrow x^{۲}+x-۱۲=۰\Rightarrow (x+۴)(x-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۴ \\ x=۳ \end{cases}$$

$-۴+۳=-۱=$ جمع جواب‌ها

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۲- گزینهٔ «۲» (عباس کنجی)

$$\sqrt{۲x+۳}=۳x+۲$$

$$\xrightarrow[۳x+۲\geq ۰]{\text{توان ۲}} ۲x+۳=۹x^{۲}+۱۲x+۴$$

$$\Rightarrow ۹x^{۲}+۱۰x+۱=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\frac{۱}{۹} \end{cases}$$

جواب $x=-۱$ در شرط $۳x+۲\geq ۰$ صدق نمی‌کند. پس $x=-\frac{۱}{۹}$ قابل قبول است. بنابراین:

$$۹x+۳=۹(\frac{-۱}{۹})+۳=۲$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۳- گزینهٔ «۱»

(محمدجواد محسنی)

چون دامنهٔ عبارت $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$ برابر $x>1$ است، پس هر ۳ عبارت $x-1$، $\sqrt{x}-1$ و $\sqrt{x-1}$ مثبت هستند و داریم:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}>x-1\Rightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}>\sqrt{x-1}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}>\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}+1}>\sqrt{x-1}$$

با شرط $x>1$ اولین عدد صحیح ۲ می‌شود که با درنظرگیری $x\in\mathbb{Z}$ ؛ $x\geq 2$ عبارت سمت راست همواره بزرگ‌تر از ۱و عبارت سمت چپ کوچک‌تر از ۱ است. لذا هیچ عدد صحیحی در این نامعادله صدق نمی‌کند.

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

۴ ۳ ۲ ✓۱

$$-3(2)^2+4(3)(2)+b=-12+24+b=0\Rightarrow b=-12$$

درنتیجه: $\Rightarrow a-b=3-(-12)=15$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

۴ ✓۳ ۲ ۱

۱۱۵- گزینهٔ «۴»

(محمدمصطفی ابراهیمی)

شرط آن‌که معادلهٔ $\left|x^2-3\right|=\left|2-a\right|-1$ جواب حقیقی داشته باشد این است که عبارت سمت راست نامنفی باشد.

$$\left|2-a\right|-1\geq 0\Rightarrow\left|2-a\right|\geq 1\Rightarrow\begin{cases}2-a\geq 1\Rightarrow a\leq 1\\2-a\leq -1\Rightarrow a\geq 3\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن برای a برابر است با:

$$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)=\mathbb{R}-(1,3)$$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

✓۴ ۳ ۲ ۱

۱۱۶- گزینهٔ «۲»

(علی ساوجی)

نکته: $u^{2} \le a^{2} \Rightarrow |u| \le a \Rightarrow -a \le u \le a$

با توجه به نکتهٔ بالا، می‌نویسیم:

$$|x^{2} - 2x| \le 1 \Rightarrow -1 \le x^{2} - 2x \le 1$$

$$\xrightarrow{+1} 0 \le x^{2} - 2x + 1 \le 2$$

$$\Rightarrow 0 \le (x-1)^{2} \le 2 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-1| \le \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le x - 1 \le \sqrt{2} \xrightarrow{+1} \underbrace{1-\sqrt{2}}_{\min} \le x \le \underbrace{\sqrt{2}+1}_{\max}$$

درنتیجه: $\max\{x\} - \min\{x\} = (\sqrt{2}+1) - (1-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۷- گزینهٔ «۳»

(امیرهوشنگ انصاری)

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{x+5-x-3}{x^{2}+8x+15} = \frac{x+1-x+1}{x^{2}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^{2}+8x+15} = \frac{2}{x^{2}-1} \Rightarrow x^{2}+8x+15 = x^{2}-1$$

$$\Rightarrow 8x = -16 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow a = -2$$

درنتیجه: $\frac{4a+1}{a} = \frac{4(-2)+1}{-2} = \frac{-7}{-2} = 3/5$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$\frac{-(x-1)^3}{(x-1)(x^2+x+1)} \geq 0 \xrightarrow{x\neq 1} \frac{-(x-1)^2}{x^2+x+1} \geq 0$$

$$\xrightarrow[\text{با تغییرجهت نامساوی}]{\text{ضرب طرفین در منفی}} \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \leq 0$$

واضح است که عبارت $(x-1)^2$ همواره بزرگ‌تر مساوی صفر و عبارت x^2+x+1 (به‌دلیل $\Delta<0$ و $a>0$)، همواره بزرگ‌تر از صفر است. پس حاصل تقسیم آن‌ها نمی‌تواند کوچک‌تر از صفر باشد. شاید فکر کرده باشید $x=1$ از آن‌جا که حاصل کسر را صفر می‌کند، در نامعادله صدق می‌کند، اما دقت کنید که عبارت اولیه به‌ازای $x=1$ به عنوان ریشهٔ مخرج اصلاً تعریف نشده است. پس هیچ عددی در این نامعادله صدق نمی‌کند.

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

✓ ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۱۱۹- گزینهٔ «۱» *(سهند ولی‌زاده)*

نکته: $x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$

اگر سرعت حرکت آب را v درنظر بگیریم، قایق موتوری با سرعت $9+v$ رفته و با سرعت $9-v$ برگشته است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{رفت } t_1 = \frac{x}{v_1} = \frac{80}{9+v} \\ \text{برگشت } t_2 = \frac{x}{v_2} = \frac{80}{9-v} \end{array}\right\} \Rightarrow t_2 - t_1 = 2 \Rightarrow \frac{80}{9-v} - \frac{80}{9+v} = 2$$

$$\xrightarrow{\times(9-v)(9+v)} 720 + 80v - 720 + 80v = 162 - 2v^2$$

$$\Rightarrow 2v^2 + 160v - 162 = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 1 & \text{ق‌ق} \\ v = -81 & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$\text{سرعت در مسیر رفت} = 9 + v = 9 + 1 = 10$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

✓ ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۱۲۰- گزینهٔ «۳» (جواد کرمانی)

فرض کنیم شیر A کل استخر را در x ساعت پر می‌کند، پس در یک ساعت می‌تواند $\frac{1}{x}$ استخر را پر کند. همچنین شیر B استخر را در $x+2$ ساعت پر می‌کند، پس در یک ساعت می‌تواند $\frac{1}{x+2}$ استخر را پر کند.

بنابر صورت مسأله ۶/۵ ساعت شیر B به تنهایی و ۲/۵ ساعت هر دو شیر A و B باز بوده‌اند و حاصل عملکرد آن‌ها کل استخر را پُر کرده است:

$$6/5(\frac{1}{x+2})+2/5(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x})=1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{x+2}+\frac{2/5}{x}=1 \Rightarrow \frac{9x+2/5x+5}{x(x+2)}=1$$

$$\Rightarrow 11/5x+5=x^2+2x$$

$$\Rightarrow x^2-9/5x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} & \text{غ‌قق} \\ x=10 & \text{قق} \end{cases}$$

بنابراین شیر A به تنهایی در ۱۰ ساعت استخر را پر می‌کند.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۱- گزینهٔ «۳» (یغما کلانتریان)

ضابطهٔ تابع همانی $y=x$ است، درنتیجه باید داشته باشیم:

$$\frac{3x^2+x}{(a-1)x^2+bx+c}=x \Rightarrow 3x^2+x=(a-1)x^3+bx^2+cx$$

اگر دو چندجمله‌ای بخواهند با یکدیگر برابر باشند، باید تک‌تک ضرایب متغیرهای هم‌توان با هم برابر باشند. یعنی:

$$\left.\begin{matrix}(a-1)=0 \Rightarrow a=1 \\ b=3\ ,\ c=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b+c=5$$

(ریاضی ۱، صفحهٔ ۱۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۲- گزینهٔ «۳»

(سجاد داوطلب)

با توجه به دو تابع f و g، تابع $fo(2g)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$x \longrightarrow \boxed{g} \xrightarrow{\times 2} \boxed{f} \longrightarrow \text{برد تابع}$$

$$3 \to g \to 2\times 2 = 4 \to f \to 7$$
$$2 \to g \to 1\times 2 = 2 \to f \to 5$$
$$4 \to g \to 5\times 2 = 10 \to f \to \text{تعریف‌نشده}$$
$$1 \to g \to 3\times 2 = 6 \to f \to 3$$

لذا می‌توان گفت برد تابع به‌صورت $\{7,5,3\}$ است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۳- گزینهٔ «۳»

(لیلا مرادی)

چون $f(x)$ یک تابع است، دو ضابطهٔ تعریف شده به‌ازای $x=1$ برابرند:

$$2m-1=-2+3m \Rightarrow m=1$$

و از آن‌جا که $x=1-\sqrt{2}$ عددی کوچک‌تر از یک می‌باشد، باید در ضابطهٔ اول جایگذاری شود:

$$f(1-\sqrt{2})=2(1)(1-\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})^2$$
$$=2-2\sqrt{2}-(1-2\sqrt{2}+2)$$
$$=2-2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}=-1$$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰، ۱۱۲ و ۱۱۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۴- گزینهٔ «۲»

(حمیدرضا دهقانی)

طبق صورت سؤال خروجی ماشین برابر $\frac{1}{6}$ است، پس:

$$\frac{\sqrt{2x}-1}{3x}=\frac{1}{6} \Rightarrow 2\sqrt{2x}-2=x$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2x}=x+2 \xrightarrow{\text{توان } 2} 8x=x^2+4x+4$$
$$\Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

یعنی ورودی ضابطهٔ دوم باید ۲ باشد. بنابراین خروجی ضابطهٔ اول نیز ۲ می‌باشد:

$$2x-3=2 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۵- گزینهٔ «۱» (جهانبخش نیکنام)

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2-9} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x+2}+1$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\in[-2,+\infty) \mid \sqrt{x+2}+1\in(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}+1\ge 4 \Rightarrow x+2\ge 9 \Rightarrow x\ge 7 \Rightarrow D_{fog}=[7,+\infty)$$

$$(fog)(x)=\sqrt{x-7} \Rightarrow (fog)(x+9)+1=g(x)$$

پس نمودار تابع **fog** باید ۹ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال یابد تا بر نمودار تابع **g** منطبق شود.

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

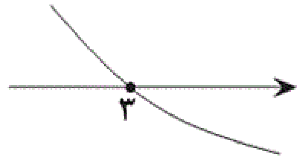
(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۶- گزینهٔ «۴»

(افشین گلستانی)

چون f یک تابع اکیداً نزولی و پیوسته با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $f(۳)=۰$ است، پس می‌توان نمودار زیر را برای f فرض کرد.



دقت شود که نمودار تابع f الزاماً به شکل بالا نیست، ولی می‌توان برای تصور f از نمودار بالا استفاده کرد.

حال باید دامنهٔ تابع داده شده را پیدا کنیم:

زیر رادیکال ≥ ۰

$\Rightarrow (x-۳)^۲ f(۲-x) \geq ۰ \Rightarrow$ نامعادله را با تعیین علامت حل می‌کنیم.

$\Rightarrow (x-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۳$

$\Rightarrow f(۲-x) = ۰ \Rightarrow ۲-x = ۳ \Rightarrow x = -۱$

x		-۱		۳	
$(x-۳)^۲ f(۲-x)$	$-$	۰	$+$	۰	$+$

برای فهمیدن علامت خانه‌های جدول از عددگذاری استفاده کرده‌ایم.

$\Rightarrow D_g = [-۱, +\infty)$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۷- گزینهٔ «۲»

(داور بوالحسنی)

ابتدا دامنهٔ $f(x)$ را به‌دست آورده و سپس از روی آن دامنهٔ $g(x) = ۳f(۴x-۲)-۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$-۲ \leq x \leq ۶ \Rightarrow -۴ \leq ۲x \leq ۱۲ \Rightarrow -۵ \leq ۲x-۱ \leq ۱۱$

پس دامنهٔ $f(x)$ به‌صورت $[-۵,۱۱]$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن دامنهٔ g داریم:

$-۵ \leq ۴x-۲ \leq ۱۱ \Rightarrow -۳ \leq ۴x \leq ۱۳ \Rightarrow -\frac{۳}{۴} \leq x \leq \frac{۱۳}{۴}$

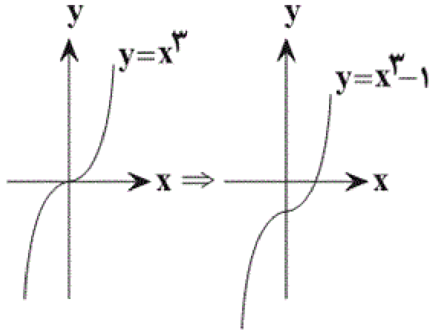
(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳)

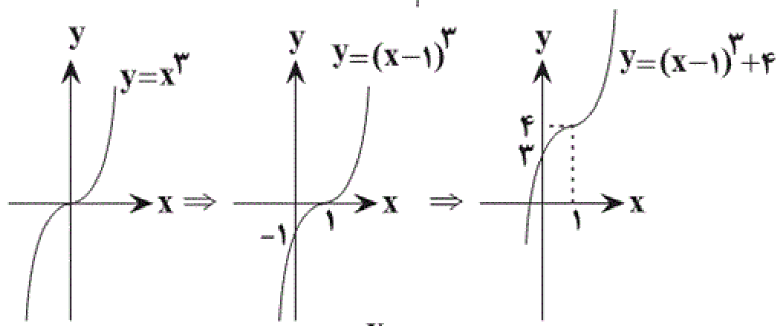
۱ ۲✓ ۳ ۴

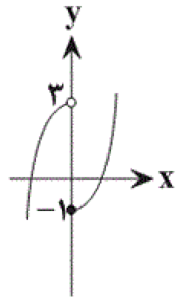
۹۸- گزینهٔ «۲»

(علی ونکی فراهانی)

ابتدا باید نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنیم. برای این کار ابتدا نمودار $y = x^3 - 1$ و $y = (x-1)^3 + 4$ را رسم می‌کنیم و بازهٔ مد نظر را نگه می‌داریم.







با توجه به نمودار تابع $f(x)$ واضح است که اگر $\alpha \in [-1,3)$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $f(x) = \alpha$ دو جواب دارد. پس خط $y = \alpha$ به‌ازای $\alpha = \{-1,0,1,2\}$ در دو نقطه با نمودار تابع $f(x)$ برخورد می‌کند. پس ۴ مقدار صحیح برای α وجود دارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱   ۲✓   ۳   ۴

۹۹- گزینهٔ «۴» (علی ونکی فراهانی)

$f(x) = x^3$

$x^3 \xrightarrow{\text{۴ واحد به پایین}} x^3 - 4 \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} g(x) = (x-2)^3 - 4$

حال معادلهٔ $f(x) = g(x)$ را حل می‌کنیم تا نقاط تلاقی دو نمودار را بیابیم:

$g(x) = f(x) \Rightarrow (x-2)^3 - 4 = x^3$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 12 = x^3 \Rightarrow 6x^2 - 12x + 12 = 0$

$\Rightarrow 6(x^2 - 2x + 2) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(2)(1) \Rightarrow \Delta = -4$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

چون می‌دانیم $x > 0$، داریم:

$\frac{1}{2x} \leq 10 \Rightarrow \frac{1}{20} \leq x$

$\Rightarrow D_{fog} = [\frac{1}{20}, +\infty)$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$D_f : 0 \leq x \leq 10$

$f(x) \in D_g : \sqrt{10x - x^2} > 0 \Rightarrow x \neq 0, 10$

$\Rightarrow D_{gof} = (0, 10)$

$D_{fog} \cap D_{gof} = [\frac{1}{20}, 10)$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۶۵ تا ۷۰)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۱- گزینهٔ «۴» *(کتاب آبی)*

برای این‌که عبارت به ازای هر x حقیقی تعریف شده باشد، باید عبارت درجه دوم در مخرج کسر ریشه نداشته باشد، یعنی $\Delta < ۰$ باشد،پس داریم:

$$A(x) = \frac{۶x^۲ - ۲x}{-kx^۲ + ۲x - ۹k}$$

مخرج کسر: $\Delta < ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ - ۴(-k)(-۹k) < ۰$

$$\Rightarrow ۴ - ۳۶k^۲ < ۰ \Rightarrow k^۲ > \frac{۱}{۹} \Rightarrow k > \frac{۱}{۳} \text{ یا } k < -\frac{۱}{۳}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

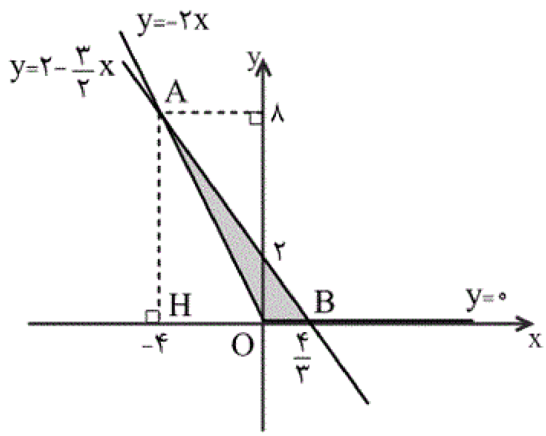
۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۲- گزینهٔ «۳» *(سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۵)*

$$y_۱ = |x| - x = \begin{cases} x - x = ۰ & ; \quad x \geq ۰ \\ -x - x = -۲x & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

$$y_۲ = ۲ - \frac{۳}{۲}x$$

نمودار $y_۱$ و $y_۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



برای محاسبهٔ مساحت مثلث، باید طول ارتفاع AH را که برابر با عرض نقطه‌ی A است، به دست آوریم.

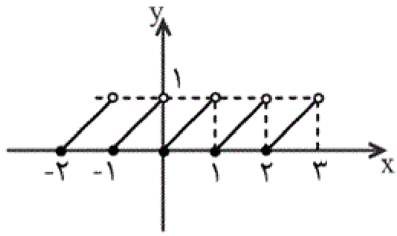
$$۲ - \frac{۳}{۲}x = |x| - x \xrightarrow{x<۰} ۲ - \frac{۳}{۲}x = -x - x \Rightarrow x = -۴$$

$$\Rightarrow x_A = -۴ \, , \, y_A = ۲ - \frac{۳}{۲}(-۴) = ۸$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۳- گزینهٔ «۴» (سراسری تجربی – ۸۳)

نمودار تابع را در فاصلهٔ **(۳ , ۲−]** رسم می‌کنیم، در این بازه تابع از پنج پاره‌خط به اندازهٔ $\sqrt{۲}$ تشکیل شده است.



(ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱	۲	۳	۴ ✓

۱۰۴- گزینهٔ «۱» (کتاب آبی)

$$x \neq -۱ : f(x) = \frac{x^۳ + ۱^۳}{x+۱} = \frac{(x+۱)(x^۲ - x + ۱)}{x+۱}$$

$$= x^۲ - x + ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۲ - x + ۱ & ; \quad x \neq -۱ \\ b & ; \quad x = -۱ \end{cases}$$

$$g(x) = x^۲ + ax + ۱$$

از آنجا که دو تابع f و g با هم برابرند، از مقایسهٔ $x^۲ - x + ۱$ با $x^۲ + ax + ۱$ داریم: $a = -۱$. برای یافتن مقدار b هم داریم:

$$g(x) = x^۲ - x + ۱ \Rightarrow g(-۱) = (-۱)^۲ - (-۱) + ۱ = ۳$$

$$\xrightarrow{f(-۱)=g(-۱)} b = ۳ \Rightarrow a + b = -۱ + ۳ = ۲$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۰، ۵۱ و ۵۶)

۱ ✓	۲	۳	۴

با تعیین علامت، جواب را می‌یابیم:

	-5	-3	0	2	
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
f(x)	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
xf(x)	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

پس مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ بالا و در نتیجه دامنهٔ تابع برابر است با:

$$x \in [-5, -3] \cup [0, 2]$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۲ و ۵۳) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۶- گزینهٔ «۳» (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۷)

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودارهای توابع $y = \sqrt{-x+2}$ و $y = x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم)، آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

$x = -2$ غیر قابل قبول است، زیرا در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند.

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳)

---

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۷- گزینهٔ «۲» (سراسری تجربی - ۹۲)

محل تلاقی دو تابع fog و f از حل معادلهٔ $(fog)(x)=f(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} f(x)=(2x-3)^2 \\ g(x)=x+2 \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=(2g(x)-3)^2$$

$$=(2(x+2)-3)^2=(2x+1)^2$$

$$\begin{cases} f(x)=(2x-3)^2 \\ (fog)(x)=(2x+1)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ معادلهٔ تقاطع f و fog: $(2x-3)^2=(2x+1)^2$

$$\Rightarrow 2x-3=\pm(2x+1)\Rightarrow \begin{cases} 2x-3=2x+1 & \text{(غیرقابل قبول)} \\ 2x-3=-2x-1\Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس در نقطه به‌طول $\frac{1}{2}$ متقاطعند.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۱ ☐ ۲ ☑ ۳ ☐ ۴ ☐

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+4)=\frac{2(x+4)-1}{x+4+2}=\frac{2x+7}{x+6}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=\frac{2x-1}{x+2}+4$$

$$=\frac{2x-1+4x+8}{x+2}=\frac{6x+7}{x+2}$$

بنابراین:

$$(fog)(x)=(gof)(x)\Rightarrow \frac{2x+7}{x+6}=\frac{6x+7}{x+2}$$

$$\Rightarrow (2x+7)(x+2)=(6x+7)(x+6)$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x+7x+14=6x^2+36x+7x+42$$

$$\Rightarrow 4x^2+32x+28=0 \xrightarrow{\div 4} x^2+8x+7=0$$

$$\Rightarrow (x+7)(x+1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ x=-1 \end{cases}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۱ ☑ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐

۱۰۹- گزینهٔ «۱» (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷)

دامنهٔ تابع f، R است، زیرا به ازای هر $x \in R$، $x+|x| \geq 0$ است.

هم‌چنین دامنهٔ تابع g، $R-\{0, 4\}$ است. حال تعریف دامنهٔ تابع gof را می‌نویسیم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \in R \mid \sqrt{x+|x|} \in R-\{0,4\}\}$$
$$= \{x \in R \mid \sqrt{x+|x|} \neq 0,4\}$$

بنابراین باید مقداری از x را که در آن $\sqrt{x+|x|}$ برابر صفر یا ۴ می‌شود از R کنار بگذاریم:

$$\sqrt{x+|x|} = 0 \Rightarrow x+|x| = 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$$

$$\sqrt{x+|x|} = 4 \Rightarrow x+|x| = 16 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \\ x < 0 : 0 = 16 \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

بنابراین اگر $x \leq 0$ و $x = 8$ را از R کنار بگذاریم به جواب می‌رسیم:

$$D_{gof} = (0,8) \cup (8,+\infty)$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۰- گزینهٔ «۲» (کتاب آبی)

اگر x_1 و x_2 را در بازهٔ $[1, 2]$ به صورت زیر در نظر بگیریم، داریم:

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2 \xrightarrow[\text{f در بازهٔ [1,2] صعودی است.}]{\text{اثر دادن f}}$$

$$f(1) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq 1 \xrightarrow[\text{f در بازهٔ [0,1] نزولی است.}]{\text{اثر دادن f}}$$

$$\Rightarrow f(0) \geq f(f(x_1)) \geq f(f(x_2)) \geq f(1)$$

بنابراین از نامساوی $x_1 \leq x_2$ به نامساوی $f(f(x_1)) \geq f(f(x_2))$ رسیدیم، پس تابع $f(f(x))$ در فاصلهٔ $[1, 2]$ نزولی است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۴)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴