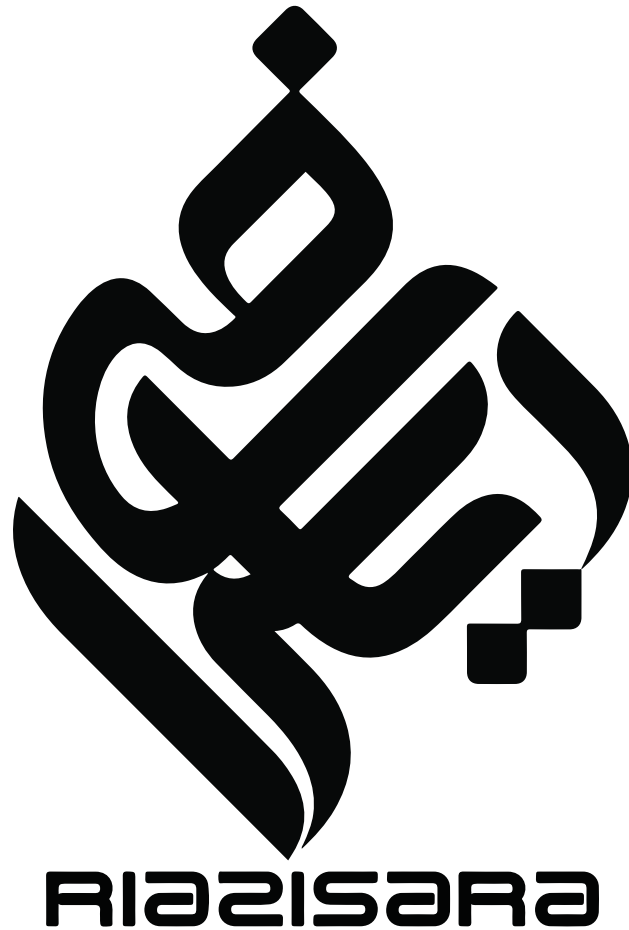




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

هندسه ۱ دهم، قضیه‌ی تالس، تشابه و کاربردهای آن - ۵ سوال -

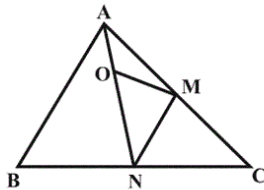
۱۳۱- سه پاره‌خط به طول‌های ۳، x و ۲ مفروض‌اند. چند مثلث متفاوت وجود دارد که طول اضلاع آن برابر طول‌های این سه پاره‌خط

باشد، به شرط آنکه در هر کدام از این مثلث‌ها، طول یکی از این پاره‌خط‌ها، واسطه هندسی طول‌های دو پاره‌خط دیگر باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳۲- در شکل زیر، نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AC و BC قرار دارند. اگر $OA = 2$ و $ON = 3$ باشد، نسبت مساحت

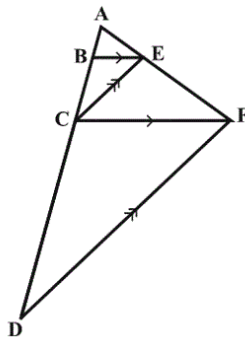
مثلث OMN به مساحت مثلث ABC کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{3}{20}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{2}{9}$

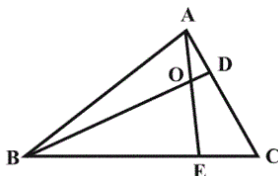
۱۳۳- در شکل زیر $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$ است. اگر $AB = 2$ ، $AE = 3$ و $CD = 12$ باشد، آنگاه مجموع طول پاره‌خط‌های BC و

EF کدام است؟



- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

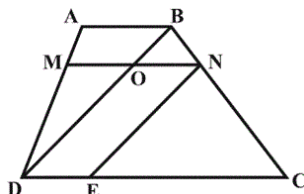
۱۳۴- در شکل زیر، اگر $\frac{AD}{AC} = \frac{CE}{BE} = \frac{1}{3}$ باشد، نسبت $\frac{AO}{OE}$ برابر کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۳۵- در شکل زیر، $AB \parallel MN \parallel CD$ و $NE \parallel BD$ است. اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{3}$ و $MO = ON$ باشد، آنگاه طول پاره‌خط CE چند برابر

طول پاره‌خط AB است؟



- (۱) ۳ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{2}{25}$ (۴) ۲

۱۲۱- در یک تقسیم، مقسوم علیه ۱۷ و باقی مانده ۹ است. اگر بدون تغییر مقسوم علیه، ۵۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، باقی مانده و

خارج قسمت چه تغییری می کنند؟

(۱) خارج قسمت ۴ واحد زیاد می شود و باقی مانده ۲ واحد کم می شود.

(۲) خارج قسمت ۳ واحد و باقی مانده ۷ واحد زیاد می شود.

(۳) خارج قسمت ۳ واحد زیاد می شود و باقی مانده یک واحد کم می شود.

(۴) خارج قسمت ۴ واحد و باقی مانده ۲ واحد زیاد می شود.

۱۲۲- اگر a عددی صحیح و زوج باشد و $b \mid a+3$ ، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد $3 - a^2 + b^2$ بر ۸ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) صفر

۱۲۳- اگر a و b دو عدد حقیقی غیر صفر و نابرابر باشند، آنگاه چند زوج مرتب (a, b) وجود دارد به گونه ای که رابطه

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$
 برقرار باشد؟

(۱) هیچ

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی شمار

۱۲۴- اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر اعداد ۴ و ۷ به ترتیب برابر ۳ و ۲ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد a بر ۲۸ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۲۲

(۴) ۲۳

۱۲۵- اگر n عدد صحیح و $d = (n^2 - 4n, 5n + 6)$ عددی اول باشد، آنگاه بزرگ ترین مقدار d کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۷

(۳) ۱۱

(۴) ۱۳

۱۲۶- اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $۳k+۲ \mid ۷$ ، آنگاه به ازای کدام مقدار a ، رابطه $۹k^2 + ۳۳k + a \mid ۴۹$ برقرار است؟

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲۷- طول نقطه‌ای با مختصات طبیعی بر روی منحنی به معادله $xy + ۸y - x^2 = ۴x + ۵$ کدام است؟

۲۴ (۲)

۲۹ (۱)

۱ (۴)

۱۷ (۳)

۱۲۸- اگر a عددی زوج باشد، به گونه‌ای که خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۳۰ ، با یکدیگر برابر باشند، آنگاه مجموع ارقام

بزرگترین عدد ممکن برای a کدام است؟

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۲۶ (۴)

۲۲ (۳)

۱۲۹- برای هر عدد طبیعی n ، عدد $A = n^2 + an + b^2$ زوج است. اگر a و b دو عدد طبیعی بزرگتر از یک باشند، آنگاه

حاصل ضرب ab کدام می‌تواند باشد؟

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۳۰- اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، باقی‌مانده تقسیم p^2 بر ۲۴ ، چند مقدار متفاوت دارد؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

آمار و احتمال، آشنایی با مبانی ریاضی - ۵ سوال

۱۳۶- کدام یک از حالت‌های زیر، افرازی برای مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a, b\}, c\}$ است؟

$\{c\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}$ (۲)

$\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{a, b\}, c\}$ (۱)

$\{\{a, b\}\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ (۴)

$\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}, c$ (۳)

۱۳۷- اگر A ، B و C سه مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $A' \cup B = B$ و $B - C = B$ ، آنگاه کدام یک از روابط

زیر صحیح است؟

$$A - C = A \quad (۲)$$

$$A \cup C' = A \quad (۱)$$

$$C - A = \emptyset \quad (۴)$$

$$A' \cap C' = C' \quad (۳)$$

۱۳۸- تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی و k عضوی از مجموعه A برابرند. اگر m عضو به A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن

۳۸۴ واحد افزایش می یابد. تعداد زیرمجموعه های $k - m$ عضوی از مجموعه اولیه A کدام است؟ ($k \neq ۳$)

$$۳۵ \quad (۴)$$

$$۲۱ \quad (۳)$$

$$۲۰ \quad (۲)$$

$$۱۵ \quad (۱)$$

۱۳۹- اگر دو مجموعه $A = \{a^2 + ۳, ۲b\}$ و $B = \{x^2, -۱, ۴x - ۴\}$ برابر یکدیگر باشند، آنگاه نسبت حداکثر مقدار $a + b$ به حداقل

مقدار آن کدام است؟

$$-\frac{۳}{۲} \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

$$-\frac{۱}{۲} \quad (۲)$$

$$-\frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

۱۴۰- مجموعه های $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ، $A = \{۴\}$ و $B = \{۳, ۴, ۵\}$ مفروض هستند. چند مجموعه C وجود دارد به طوری که ارزش

گزاره « $C \subseteq A' \Rightarrow C \subseteq B$ » درست باشد؟ (U مجموعه مرجع است.)

$$۲۸ \quad (۴)$$

$$۱۶ \quad (۳)$$

$$۱۲ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

حسابان دوازدهم، تابع - ۱۰ سوال

۸۱- نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می کنیم. سپس آن را نسبت به محور عرض ها قرینه می کنیم و در انتها عرض هر نقطه را

دو برابر می کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده است، کدام است؟

$$y = -۲f(x+۱) \quad (۲)$$

$$y = ۲f(۱-x) \quad (۱)$$

$$y = -f(۲x+۲) \quad (۴)$$

$$y = f(-۲x+۲) \quad (۳)$$

۸۲- اگر $D_f = [-4, 1]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 2f(2x) - f(x+2)$ کدام است؟

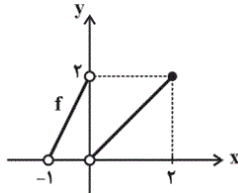
(۲) $[-3, 1]$

(۱) $\left[-6, -\frac{1}{2}\right]$

(۴) $[-2, -1]$

(۳) $[-6, -2]$

۸۳- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه و برد تابع $g(x) = 4f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1$ چند عضو مشترک صحیح دارند؟



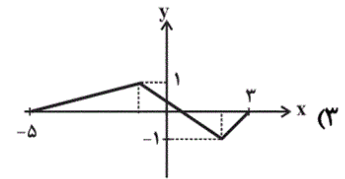
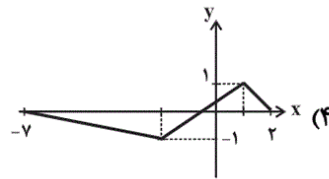
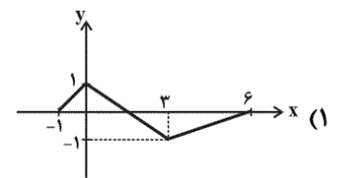
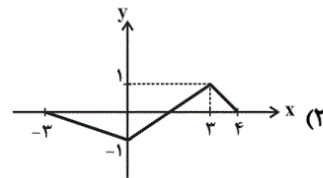
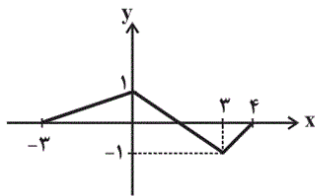
(۲) ۶

(۱) ۷

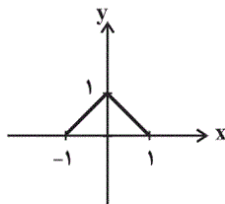
(۴) ۴

(۳) ۵

۸۴- اگر نمودار $y = -f(x-2)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(1-x)$ کدام است؟



۸۵- شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y = f(x)$ است. تابع $y = -2f(2-x)$ روی کدام بازه صعودی است؟



(۲) $[2, 3]$

(۱) $[1, 2]$

(۴) $[-2, -1]$

(۳) $[-1, 0]$

۸۶- اگر $f = \{(1, a), (4, 3), (2, 5), (0, 6)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 4), (4, 2), (2a, 0)\}$ باشد، به ازای کدام بازه برای مقادیر a تابع

$f \circ g$ اکیداً صعودی است؟

(۲) $(1, 3)$

(۱) $(0, 3)$

(۴) $(2, 3)$

(۳) $(1, 2)$

۸۷- اگر f تابعی اکیداً یکنوا باشد، کدام یک از توابع زیر، به طور قطع اکیداً صعودی است؟

(۱) f^2

(۲) $|f|$

(۳) fof

(۴) $f + |f|$

۸۸- اگر $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، وضعیت یکنوایی تابع fog کدام است؟

(۱) غیر یکنوا

(۲) صعودی

(۳) نزولی

(۴) هم صعودی و هم نزولی

۸۹- تابع $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ روی بازه $\left[-\frac{1}{2}, k\right]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار k کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۲

۹۰- تابع f روی مجموعه اعداد حقیقی اکیداً صعودی است و $f(2) = 0$ است. دامنه تعریف تابع $g(x) = \sqrt{f(x)f(-2x)}$ کدام است؟

(۱) $[-2, 2]$

(۲) $[-1, +\infty)$

(۳) $[-1, 2]$

(۴) $(-\infty, 2]$

هندسه ۳- دوازدهم، ماتریس، و کاربردها - ۱۰ سوال

۱۰۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2y \\ -5 & z \end{bmatrix}$ و $2A^{-1} = B$ باشد، حاصل $x + y + z$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۲

(۳) -۲

(۴) -۵

۱۰۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4a-1 & -14 \\ 5 & a-10 \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقادیر a ، ماتریس $3A^{-1} + B$ وارون پذیر نیست؟

(۱) ۷ و ۱۱

(۲) ۳ و ۴

(۳) ۳ و ۷

(۴) ۴ و ۱۱

۱۰۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A^T + A^2 + A - I)^{-1}$ کدام است؟

$-2I$ (۴)

$-\frac{1}{2}I$ (۳)

$2I$ (۲)

I (۱)

۱۰۴- ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ با تعریف $a_{ij} = 2i + j$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس A برابر ۴۵ باشد، آنگاه

مجموع درایه‌های سطر دوم این ماتریس کدام است؟

۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

۴۰ (۴)

۳۵ (۳)

۱۰۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $\frac{1}{4}A^T B = I$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{7}{12}$ (۳)

۱۰۶- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه، $B = 4A + 3I$ و $A^T = 2A - I$ باشد، ماتریس B^T برابر کدام است؟

$14B - 42I$ (۲)

$14B - 49I$ (۱)

$56B - 49I$ (۴)

$56B - 7I$ (۳)

۱۰۷- اگر مجموع درایه‌های ماتریس مربعی A برابر (-2) و $(A + I)^T = I$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^6 کدام است؟

-64 (۲)

-32 (۱)

64 (۴)

32 (۳)

۱۰۸- اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & x \\ y & z \end{bmatrix}$ در رابطه $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ صدق کنند، آنگاه کدام یک از مقادیر

زیر به صورت منحصر به فرد مشخص نمی‌شود؟

(۱) x

(۲) y

(۳) z

(۴) رابطه هیچگاه برقرار نیست.

۱۰۹- اگر ماتریس B ، وارون ماتریس مربعی A از مرتبه ۲ و $A - B = 2I$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس

$(A + B)(A^2 - B^2)$ کدام است؟

(۱) ۱۶

(۲) ۳۲

(۳) ۴۸

(۴) ۶۴

۱۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس A^{-1} با کدام یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

(۱) A^{100}

(۲) A^{200}

(۳) A^{300}

(۴) A^{400}

ریاضی پایه - دوازدهم، تابع ۱۰ سوال

۹۱- کدام دو تابع مساوی‌اند؟

(۱) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}$

(۲) $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}}$

(۳) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2-x}}$ و $g(x) = \sqrt{2+x}$

(۴) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$

۹۲- کدام خط نمودار تابع $f(x) = x + [x]$ با دامنه $(-1, 2)$ را قطع می‌کند؟ $[\quad]$ ، نماد جزء صحیح است.

(۲) $y = -1$

(۱) $y = \frac{5}{2}$

(۴) $y = -\frac{1}{2}$

(۳) $y = \frac{3}{2}$

۹۳- تابع $f = \left\{ (1, m^2 - m), (m, 4), (1, 6), (5, m+1), (0, m^2 + 2) \right\}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر m وارون پذیر است؟

(۲) $\{3\}$

(۱) $\{-2, 3\}$

(۴) $\emptyset$

(۳) $\{-2\}$

۹۴- اگر $f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x+3}$ باشد، حاصل $f(-2) + f^{-1}(1)$ کدام است؟

(۲) -1

(۱) 1

(۴) -2

(۳) 2

۹۵- نمودار تابع $f(x) = ax^2 - b$ در نقطه $(-1, -2)$ نمودار تابع f^{-1} را قطع می‌کند. مقدار a کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{5}$

(۱) $-\frac{1}{3}$

(۴) $-\frac{1}{9}$

(۳) $-\frac{1}{7}$

۹۶- ضابطه وارون تابع $f(x) = |x| + \sqrt{x-1}$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{4}(\sqrt{4x-3}+1)^2 + 1$

(۱) $\frac{1}{4}(\sqrt{4x-3}-1)^2 + 1$

(۴) $\frac{1}{2}(\sqrt{2x-3}+1)^2 - 1$

(۳) $\frac{1}{2}(\sqrt{2x-3}-1)^2 - 1$

۹۷- اگر $f(x) = 8 - 2x|x|$ و $g(x) = x + |x-2| - 2$ باشد، برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام بازه است؟

(۲) $(-4, +\infty)$

(۱) $(-8, +\infty)$

(۴) $(-\infty, -4)$

(۳) $(-\infty, 4)$

۹۸- اگر $f = \{(0,1), (4,2), (1,3), (2,0)\}$ و $g^{-1} = \{(0,3), (2,2), (1,4), (3,1)\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $\frac{g}{f^{-1} \circ g}$ کدام

است؟

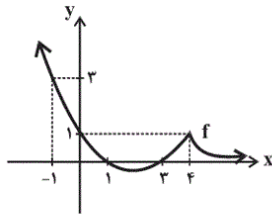
(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{7}{2}$

(۲) $\frac{7}{3}$

(۱) صفر

۹۹- نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر $g(x) = \sqrt{-f(x)}$ باشد، چند عدد صحیح در دامنه تابع $g \circ f$ قرار دارد؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۰۰- اگر $f(x) = 2x - 3$ و $D_f = [-2, 1]$ باشد، برد تابع $f \circ f$ کدام است؟

(۲) $[-6, -5]$

(۱) $[-5, -4]$

(۴) $[-7, -5]$

(۳) $[-7, -4]$

هندسه ۳ - دوازدهم - گواه، ماتریس، و کاربردها - ۱۰ سوال

۱۱۱- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ باشد، آنگاه a_{ij} کدام است؟

(۲) $a_{ij} = \begin{cases} j-1 & ; i < j \\ 0 & ; i = j \\ i+1 & ; i > j \end{cases}$

(۱) $a_{ij} = \begin{cases} i-j & ; i < j \\ 0 & ; i = j \\ i+j & ; i > j \end{cases}$

(۴) $a_{ij} = \begin{cases} j-i & ; i \leq j \\ i+j & ; i > j \end{cases}$

(۳) $a_{ij} = \begin{cases} i-1 & ; i \leq j \\ j+1 & ; i > j \end{cases}$

۱۱۲- کدام یک از قوانین زیر برای جمع ماتریس‌ها به طور نادرست بیان شده است؟ (A ، B و C سه ماتریس هم مرتبه هستند).

(۱) خاصیت جابه جایی: $A + B = B + A$

(۲) خاصیت شرکت پذیری: $A + (B + C) = (B + C) + A$

(۳) خاصیت عضو خنثی: $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$

(۴) خاصیت عضو قرینه: $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$

۱۱۳- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس BA کدام یک از ماتریس‌های زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$

۱۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^4 کدام است؟

- (۱) A (۲) A^2 (۳) $\bar{O}$ (۴) I

۱۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد، دوتایی مرتب (α, β) کدام است؟

- (۱) $(2, 11)$ (۲) $(2, 13)$ (۳) $(4, 11)$ (۴) $(4, 13)$

۱۱۶- اگر $A^2 = 4A - 3I$ و $A^{-1} = mA + nI$ باشد، حاصل $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۷- اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $A^2 = 2I$ باشد، آنگاه وارون ماتریس $3A + 4I$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(-3A + 4I)$ (۲) $\frac{1}{3}(-3A + 4I)$ (۳) $\frac{1}{2}(3A - 4I)$ (۴) $\frac{1}{3}(3A - 4I)$

۱۱۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{-1}(A + 2I)$ کدام است؟

(۲) $\begin{bmatrix} -13 & 6 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} -11 & 9 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

۱۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ ، I ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی باشند به طوری که $\alpha A + \beta I = A^{-1}$ ، آنگاه مقدار β کدام

است؟

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{2}{5}$

(۲) $-\frac{1}{5}$

(۱) $-\frac{3}{5}$

۱۲۰- اگر $(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A(A - 2I)^{-1}$ کدام است؟

(۲) ۹

(۱) ۱۱

(۴) ۱۶

(۳) ۵

(امیرحسین ابومحبوب)

۱۳۱- تاریخ: ۱۳۸۳/۰۵/۰۵

اگر هر بار طول یکی از این پاره‌خط‌ها را به عنوان واسطه هندسی طول‌های دو پاره‌خط دیگر در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$۱) x^2 = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6} \rightarrow \text{طول پاره‌خط‌ها} : 2, \sqrt{6}, 3$$

$$۲) 2^2 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3} \rightarrow \text{طول پاره‌خط‌ها} : \frac{4}{3}, 2, 3$$

$$۳) 3^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{9}{2} \rightarrow \text{طول پاره‌خط‌ها} : 2, 3, \frac{9}{2}$$

در هر سه حالت، شرط وجود مثلث (مجموع طول‌های هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد) برقرار است، پس سه مثلث متفاوت با شرایط داده شده قابل رسم است.

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، آنگاه نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آن دو مثلث است، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{\Delta ANC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ANC}} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta AMN}} = \frac{ON}{AN} = \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (1), (2), (3) &\Rightarrow \frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ANC}}{S_{\Delta ABC}} \times \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ANC}} \times \frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta AMN}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه ۳۲)

۴

۳

۲✓

۱

طبق قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta ACF : BE \parallel CF &\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \\ \Delta ADF : CE \parallel DF &\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{2}{BC} = \frac{2+BC}{12}$$

$$\Rightarrow BC(BC+2) = 24 \Rightarrow BC^2 + 2BC - 24 = 0$$

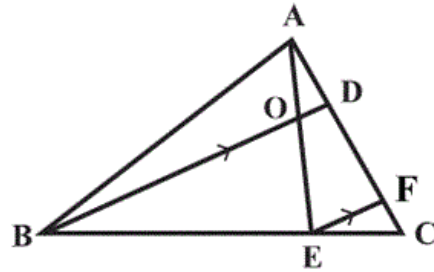
$$\Rightarrow (BC+6)(BC-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} BC = -6 \text{ (غ.ق.)} \\ BC = 4 \end{cases}$$

۴

۳

۲

۱✓



پاره خط EF را موازی با BD رسم می کنیم. داریم:

$$\Delta CBD : EF \parallel BD \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CF}{DF} = \frac{CE}{BE} = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{CF + DF}{DF} = \frac{1 + 3}{3} \Rightarrow \frac{DF}{DC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{AD}{AC - AD} = \frac{1}{3 - 1} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta AEF : OD \parallel EF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AO}{OE} = \frac{AD}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{OE} = \frac{\frac{AD}{DC}}{\frac{DF}{DC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه های ۳۲ تا ۳۷)

۴

۳

۲✓

۱

$$\frac{AM}{MD} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{AM+MD}{MD} = \frac{1+3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{3}{4}$$

$$\Delta ADB : OM \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{OM}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{4}{3} OM \quad (1)$$

از طرفی طبق قضیه تالس در ذوزنقه داریم:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta CBD : NE \parallel BD \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BN}{NC} = \frac{DE}{CE}$$

$$\xrightarrow{DE=ON} \frac{1}{3} = \frac{ON}{CE} \Rightarrow CE = 3ON \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{CE}{AB} = \frac{3ON}{\frac{4}{3}OM} \xrightarrow{ON=OM} \frac{CE}{AB} = \frac{9}{4} = 2 \frac{1}{4}$$

تذکر: در چهارضلعی ONED، $ON \parallel DE$ و $OD \parallel NE$ است، پس این چهارضلعی متوازی الاضلاع است و در نتیجه $ON = DE$ می باشد.

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه های ۳۲ تا ۳۷)

۴

۳✓

۲

۱

(پوار فاتی)

۱۲۱-

اگر قضیه تقسیم را به صورت $a = 17q + 9$ ($q \in \mathbb{Z}$) بنویسیم، آنگاه داریم:

$$a + 50 = 17q + 59 = 17q + 51 + 8 = 17(q + 3) + 8$$

بنابراین خارج قسمت تقسیم ۳ واحد افزایش یافته و باقی مانده آن به اندازه

$$9 - 8 = 1 \text{ واحد کاهش می یابد.}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد، صفحه های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳✓

۲

۱

a عددی زوج است و در نتیجه $a+3$ عددی فرد است، پس با توجه به

رابطه $b \mid a+3$ ، b لزوماً عددی فرد است. با فرض $k, k' \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$\begin{aligned} a^3 + b^2 - 3 &= (2k)^3 + (\lambda k' + 1) - 3 = \lambda k^3 + \lambda k' - 2 \\ &= \lambda \underbrace{(k^3 + k' - 1)}_q + 6 = \lambda q + 6 \quad (q \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۱۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{b-a}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{a-b}{-ab}$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = -ab \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = -ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - ab = 0 \xrightarrow{(a-b)^2 = -ab} a^2 + b^2 + (a-b)^2 = 0$$

رابطه اخیر به ازای هیچ دو عدد حقیقی غیرصفر و نابرابر a و b برقرار

نیست، پس هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) وجود ندارد که در رابطه داده

شده صدق کند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، مشابه تمرین ۵ صفحه ۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\left. \begin{array}{l} a = 7q + 2 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q + 16 \\ a = 4q' + 3 \xrightarrow{\times 7} 7a = 28q' + 21 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 28(2q - q') - 5$$

$$\Rightarrow a = 28(\underbrace{2q - q' - 1}_k) + 28 - 5$$

$$\Rightarrow a = 28k + 23 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم عدد a بر 28 ، برابر 23 است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(مهم‌مهری ابوترابی)

۱۲۵ - 

$$\left. \begin{array}{l} d \mid n^2 - 4n \xrightarrow{\times 5} d \mid 5n^2 - 20n \\ d \mid 5n + 6 \xrightarrow{\times n} d \mid 5n^2 + 6n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 26n$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 26n \xrightarrow{\times 5} d \mid 130n \\ d \mid 5n + 6 \xrightarrow{\times 26} d \mid 130n + 156 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 156$$

$$\Rightarrow d \mid 2^2 \times 3 \times 13$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای d به شرط آنکه عدد اول باشد، برابر

۱۳ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$7 \mid 3k + 2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 49 \mid (3k + 2)^2$$

$$\Rightarrow 49 \mid 9k^2 + 12k + 4 \quad (1)$$

$$7 \mid 3k + 2 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۷}} 49 \mid 7(3k + 2)$$

$$\Rightarrow 49 \mid 21k + 14 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 49 \mid (9k^2 + 12k + 4) + (21k + 14)$$

$$\Rightarrow 49 \mid 9k^2 + 33k + 18$$

بنابراین در بین گزینه‌های داده شده، به ازای $a = 18$ ، رابطه برقرار است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۶)

۴

 ✓

۳

۲

۱

$$xy + 8y = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow y(x + 8) = x^2 + 4x + 5$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 8}$$

شرط لازم برای اینکه نقطه‌ای روی این منحنی دارای مختصات طبیعی باشد،

آن است که $x + 8 \mid x^2 + 4x + 5$ (زیرا به ازای $x \in \mathbb{N}$ ، y هم مثبت

خواهد بود). بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x + 8 \mid x + 8 \xrightarrow{\times x} x + 8 \mid x^2 + 8x \\ x + 8 \mid x^2 + 4x + 5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x + 8 \mid 4x - 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 8 \mid x + 8 \xrightarrow{\times 4} x + 8 \mid 4x + 32 \\ x + 8 \mid 4x - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 8 \mid 37$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 8 = 37 \Rightarrow x = 29 \\ x + 8 = -37 \Rightarrow x = -45 \text{ غ.ق.} \\ x + 8 = 1 \Rightarrow x = -7 \text{ غ.ق.} \\ x + 8 = -1 \Rightarrow x = -9 \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[q=r]{b=30} a = 30r + r = 31r$$

$$0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq r < 30$$

با توجه به رابطه $a = 31r$ ، a تنها در صورتی زوج است که r زوج باشد.

بزرگ‌ترین مقدار زوج ممکن برای r ، برابر ۲۸ است، بنابراین داریم:

$$a_{\max} = 31 \times 28 = 868 \longrightarrow \text{مجموع ارقام} = 22$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

اگر n عددی زوج باشد، آنگاه n^2 و an هر دو زوج هستند که با توجه به

زوج بودن عدد A ، b^2 نیز لزوماً زوج است و در نتیجه b زوج می‌باشد.

اگر n عددی فرد باشد، آنگاه n^2 فرد و در نتیجه با توجه به زوج بودن

اعداد A و b^2 ، an باید فرد باشد و در نتیجه a نیز عددی فرد است.

بنابراین حاصل ضرب ab عددی زوج است. اگر $a=7$ و $b=2$ باشد،

حاصل ضرب ab برابر ۱۴ می‌شود. دقت کنید که عدد ۱۶ بر هیچ عدد

فردی غیر از یک، بخش پذیر نیست، پس نمی‌تواند به صورت حاصل ضرب یک

عدد زوج در یک عدد فرد مخالف یک نوشته شود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۴ و ۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا

$p = 6k + 5$ ($k \in \mathbb{Z}$) نوشته می‌شود (باقی‌مانده تقسیم p بر عدد ۶، برابر

۱ یا ۵ است). با توجه به اینکه هر عدد به صورت $6k + 5$ معادل عددی

به صورت $6k - 1$ است، داریم:

$$p^2 = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12k(3k \pm 1) + 1$$

اگر k عددی زوج باشد، آنگاه $12k$ و در نتیجه $12k(3k \pm 1)$ مضرب

۲۴ است. اگر k عددی فرد باشد، آنگاه $3k \pm 1$ قطعاً زوج و در نتیجه

$12k(3k \pm 1)$ مضرب ۲۴ است. بنابراین باقی‌مانده تقسیم p^2 بر عدد ۲۴،

همواره برابر ۱ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, \dots$ و A_n یک افراز برای مجموعه A هستند، هرگاه هیچ کدام از A_i ها تهی نباشند، اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع A_i ها برابر مجموعه A گردد. در گزینه «۱» یکی از زیرمجموعه‌ها تهی است. در گزینه «۳»، عضو $\emptyset$ در دو زیرمجموعه مشترک است. در گزینه «۴» عضو c در هیچ کدام از زیرمجموعه‌ها وجود ندارد. بنابراین هیچ کدام از این سه حالت نمی‌توانند یک افراز برای مجموعه A باشد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه ۲۱)

۴

۳

۲✓

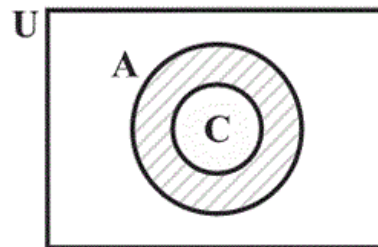
۱

(امیرحسین ابومحبوب)

$$A' \cup B = B \Rightarrow A' \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A \quad (۱)$$

$$B - C = B \Rightarrow B \cap C' = B \Rightarrow B \subseteq C' \Rightarrow C \subseteq B' \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow C \subseteq A \Rightarrow C - A = \emptyset$$



مطابق شکل گزینه‌های «۱» و «۲» و «۳» نادرست هستند، زیرا $A \cup C' = U$ و $A' \cap C' = A'$ است و $A - C$ معادل ناحیه هاشورخورده در نمودار ون می‌باشد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۴✓

۳

۲

۱

فرض کنید تعداد عضوهای مجموعه A ، برابر n باشد. در این صورت مجموعه A ، 2^n زیرمجموعه دارد. با افزودن m عضو به مجموعه A ، تعداد زیرمجموعه‌ها برابر 2^{n+m} می‌شود. مطابق فرض سؤال داریم:

$$2^{n+m} - 2^n = 384$$

$$2^n(2^m - 1) = 128 \times 3 \Rightarrow \begin{cases} 2^n = 128 = 2^7 \Rightarrow n = 7 \\ 2^m - 1 = 3 \Rightarrow 2^m = 4 = 2^2 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{k} \Rightarrow n = k + 3 \Rightarrow k + 3 = 7 \Rightarrow k = 4$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های $k - m = 4 - 2 = 2$ عضوی از مجموعه V

$$\binom{7}{2} = 21 \quad \text{عضوی } A \text{ برابر است با:}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳✓

۲

۱

اگر دو مجموعه برابر یکدیگر باشند، آنگاه اعضای آنها نظیر به نظیر برابر یکدیگرند و در نتیجه تعداد اعضای دو مجموعه با هم برابرند. بنابراین مجموعه B حداکثر دو عضو دارد، یعنی حداقل دو عضو آن برابر یکدیگرند. داریم:

$$\begin{cases} \text{امکان پذیر نیست } x^2 = -1 \\ x^2 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 4x - 4 = -1 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

اگر $x = \frac{3}{4}$ باشد، آنگاه $B = \left\{-1, \frac{9}{16}\right\}$ است. چون دو مجموعه A و B

برابر یکدیگرند، پس اعضای آنها باید نظیر به نظیر برابر باشند که امکان پذیر

نیست، زیرا داریم:

$$\text{غ.ق.ق} \quad a^2 + 3 = -1 \Rightarrow a^2 = -4$$

$$\text{غ.ق.ق} \quad a^2 + 3 = \frac{9}{16} \Rightarrow a^2 = -\frac{39}{16}$$

اگر $x = 2$ باشد، آنگاه $B = \{-1, 4\}$ است و داریم:

$$\begin{cases} a^2 + 3 = 4 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\max(a+b)}{\min(a+b)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{-1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه ۲۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

مطابق اصل متمم حالاتی را محاسبه می‌کنیم که گزاره
 $C \subseteq A' \Rightarrow C \subseteq B$ نادرست شود. یعنی:

$$\sim(C \subseteq A' \Rightarrow C \subseteq B) \equiv T$$

$$(C \subseteq A') \wedge (C \subseteq B) \equiv T$$

بنابراین هر دو گزاره $C \subseteq A'$ و $C \subseteq B$ باید درست باشد، پس
 مجموعه‌هایی را پیدا می‌کنیم که زیرمجموعه $A' = \{1, 2, 3, 5\}$ و
 $B = \{3, 4, 5\}$ باشند، داریم:

$$\forall x; x \in C \Rightarrow \begin{cases} x \in A' \\ \wedge \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow x \in A' \cap B$$

بنابراین مجموعه C زیرمجموعه‌ای از $A' \cap B = B - A = \{3, 5\}$
 می‌شود، یعنی به ازای ۴ زیرمجموعه، گزاره داده شده نادرست است.

پس تعداد حالات مطلوب برای C برابر است با $2^5 - 4 = 28$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

☐ ۴ ✓

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(کاظم اجلالی)

۸۱- آزمون استخدامی

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = f(x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y = f(-x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن عرض نقاط}} y = 2f(-x+1)$$

(مسابقه ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱ ✓

ابتدا دامنه توابع $y_1 = f(x+2)$ و $y_2 = f(2x)$ را به دست می‌آوریم:

$$-4 \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow -6 \leq x \leq -1 \Rightarrow D_{y_1} = [-6, -1]$$

$$-4 \leq 2x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_{y_2} = \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$

دامنه تابع g اشتراک دامنه توابع بالاست. پس $D_g = [-2, -1]$ خواهد بود.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱

۲

۳

۴ ✓

با توجه به نمودار تابع f ، دامنه آن بازه $\{0\} - [-1, 2]$ و برد آن بازه $[0, 2]$ است.

$$D_g : \begin{cases} -1 < 1 - \frac{x}{3} \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow -3 \leq x < 6 \\ 1 - \frac{x}{3} \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_g = [-3, 6) - \{3\}$$

$$R_g : 0 < f \leq 2 \Rightarrow -1 < 4f - 1 \leq 7 \Rightarrow R_g = (-1, 7]$$

حال برای اشتراک دامنه و برد g داریم:

$$D_g \cap R_g = (-1, 6) - \{3\}$$

این بازه شامل اعداد صحیح صفر، ۱، ۲، ۴ و ۵ است.

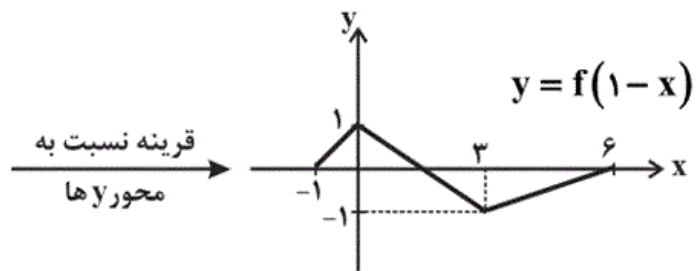
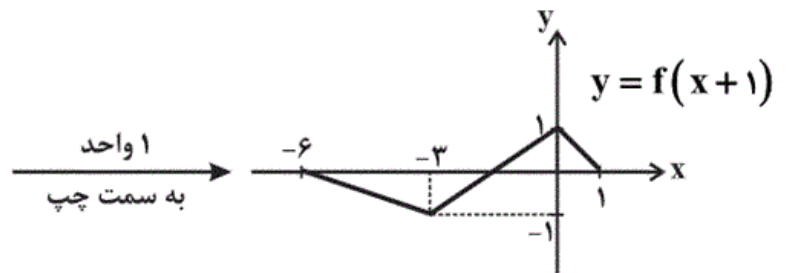
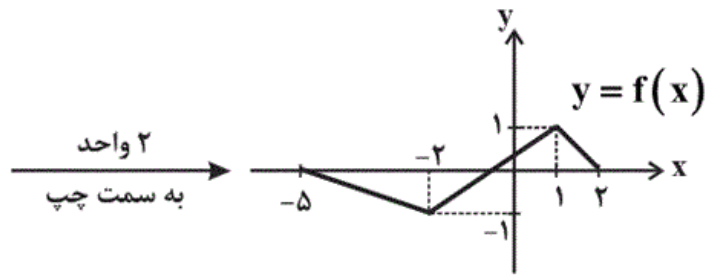
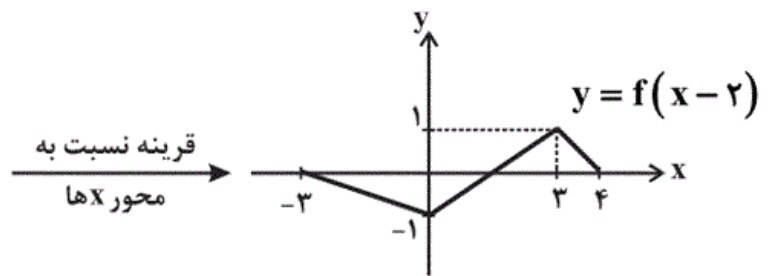
(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱

۲

۳ ✓

۴



(مسابقه ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

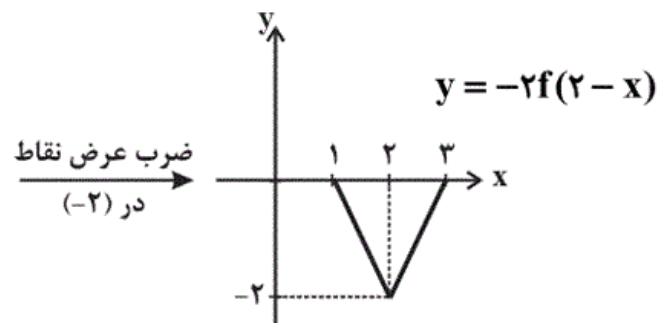
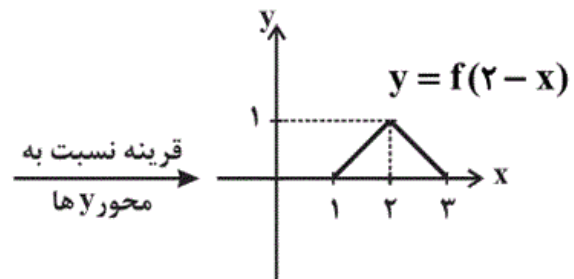
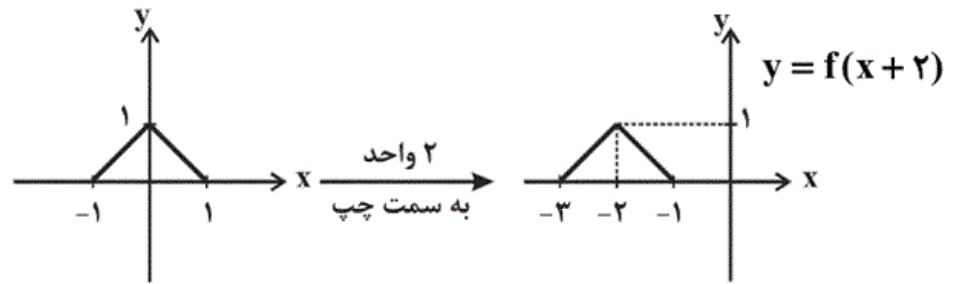
۳

۲

۱ ✓

سعی می‌کنیم نمودار تابع $y = -2f(2-x)$ را از روی نمودار $y = f(x)$

رسم کنیم:



بنابراین نمودار تابع $y = -2f(2-x)$ در بازه $[2, 3]$ صعودی است.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲ و ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

با ساختن تابع fog داریم:

$$fog = \{(2, a), (3, 3), (4, 5), (2a, 6)\}$$

برای اینکه این تابع اکیداً صعودی باشد، کافی است شروط زیر برقرار باشند:

$$(1) \quad a < 3$$

$$(2) \quad 2a > 4 \Rightarrow a > 2$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a \in (2, 3)$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

☐ ۴ ✓

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

ترکیب دو تابع اکیداً صعودی یا ترکیب دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً

صعودی است، پس f چه اکیداً صعودی و چه اکیداً نزولی باشد، تابع $f \circ f$

اکیداً صعودی است. برای سایر گزینه‌ها $f(x) = x$ مثال نقض است.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

☐ ۴

☒ ۳ ✓

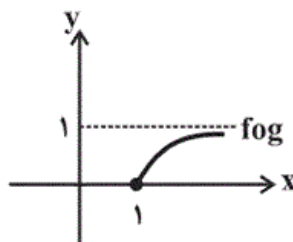
☐ ۲

☐ ۱

با توجه به تعریف دامنه ترکیب توابع، دامنه تابع fog بازه $[1, +\infty)$ است.

همچنین ضابطه آن نیز به صورت زیر است:

$$(fog)(x) = \frac{x-1}{x-1+1} = 1 - \frac{1}{x}$$



نمودار تابع fog، از قرینه کردن نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ نسبت به محور x ها و

سپس انتقال ۱ واحد به سمت بالا به دست می آید. با توجه به نمودار، واضح

است که fog اکیداً صعودی است.

(مسئله ۲- تابع، صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

۴

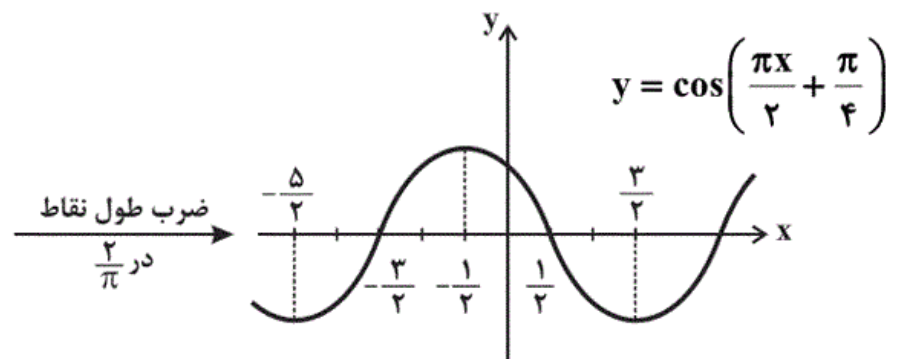
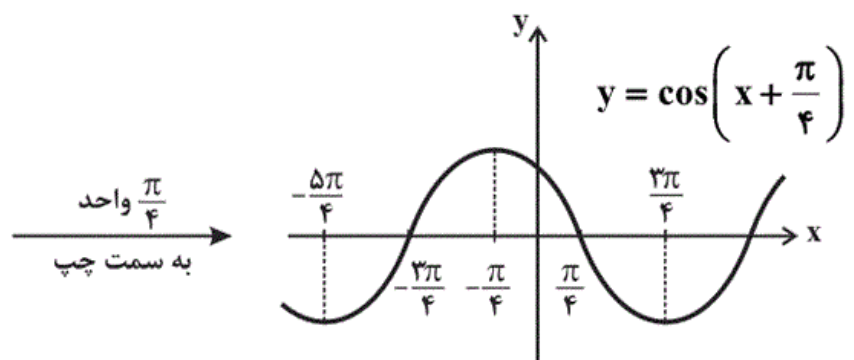
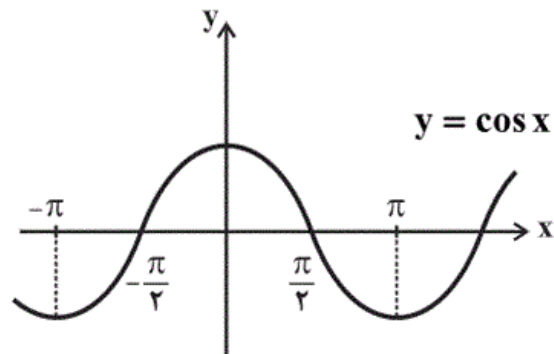
۳

۲ ✓

۱

$$y = \cos x \xrightarrow{\text{واحد به چپ } \frac{\pi}{4}} y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{طول نقاط ضرب در } \frac{2}{\pi}} y = \cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$



واضح است که تابع f روی بازه $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ اکیداً نزولی است، پس حداکثر

مقدار k برابر $\frac{3}{2}$ است.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲ و ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

چون تابع f اکیداً صعودی است، تابع $y = f(-2x)$ اکیداً نزولی است و محور x ها را در نقطه $x = -1$ قطع می کند. حال داریم:

x	-1		2	
$f(x)$	-	○	-	○
$f(-2x)$	+	○	-	○
$f(x)f(-2x)$	-	○	+	○

دامنه تابع g ، شامل x هایی است که به ازای آن ها تابع $f(x)f(-2x)$ مقادیری نامنفی داشته باشد. بنابراین با توجه به جدول تعیین علامت فوق، $D_g = [-1, 2]$ به دست می آید.

(مسابقه ۲- تابع، صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$A = \begin{bmatrix} 2x & x \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6x - 5x} \begin{bmatrix} 3 & -x \\ -5 & 2x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x} \begin{bmatrix} 3 & -x \\ -5 & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{x} & -1 \\ -\frac{5}{x} & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A^{-1} = B \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{6}{x} & -2 \\ -\frac{10}{x} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2y \\ -5 & z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{x} = 3 \Rightarrow x = 2 \\ -\frac{10}{x} = -5 \Rightarrow x = 2 \\ 2y = -2 \Rightarrow y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$x + y + z = 2 - 1 + 4 = 5$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \times 7 - 6 \times 4} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3A^{-1} + B = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4a-1 & -14 \\ 5 & a-10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4a-8 & -8 \\ 9 & a-13 \end{bmatrix}$$

شرط اینکه ماتریس $3A^{-1} + B$ وارون پذیر نباشد، آن است که دترمینان

آن برابر صفر شود، بنابراین داریم:

$$|3A^{-1} + B| = 0 \Rightarrow (4a-8)(a-13) - (-8) \times 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 52a - 8a + 104 + 72 = 0 \Rightarrow 4a^2 - 60a + 176 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} a^2 - 15a + 44 = 0 \Rightarrow (a-4)(a-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=11 \end{cases}$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \xrightarrow{\times A} A^3 = -A$$

$$(A^3 + A^2 + A - I)^{-1} = (-A - I + A - I)^{-1} = (-2I)^{-1}$$

$$-2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (-2I)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}I$$

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

ماتریس A مربعی و دارای n سطر و n ستون است. داریم:

$$\text{مجموع درایه‌های ستون سوم} = 2(1 + 2 + \dots + n) + \underbrace{(3 + \dots + 3)}_{n \text{ سطر}}$$

$$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n = n^2 + n + 3n$$

$$\Rightarrow n^2 + 4n = 45 \Rightarrow n^2 + 4n - 45 = 0$$

$$\Rightarrow (n+9)(n-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -9 \text{ ق.ق.} \\ n = 5 \end{cases}$$

$$\text{مجموع درایه‌های سطر دوم} = 2(\underbrace{2 + \dots + 2}_5) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

$$= 20 + \frac{5 \times 6}{2} = 20 + 15 = 35$$

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به رابطه $\frac{1}{2}A^2B = I$ ، ماتریس B وارون ماتریس $\frac{1}{2}A^2$ است،

بنابراین داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}A^2\right)^{-1} = \frac{1}{6 \times 8 - (-3)(-4)} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = B$$

$$B = \text{مجموع درایه‌های ماتریس } B = \frac{1}{36}(8 + 3 + 4 + 6) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(معمّر مهدی ابوترابی)

$$B = 4A + 3I \Rightarrow 4A = B - 3I \Rightarrow A = \frac{B - 3I}{4}$$

دو ماتریس A و I تعویض پذیرند، بنابراین داریم:

$$B = 4A + 3I \Rightarrow B^2 = (4A + 3I)^2 = 16A^2 + 24A + 9I$$

$$= 16(2A - I) + 24A + 9I = 56A - 7I$$

$$= 56\left(\frac{B - 3I}{4}\right) - 7I = 14B - 42I - 7I$$

$$\Rightarrow B^2 = 14B - 49I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$(A + I)^2 = I \Rightarrow A^2 + 2AI + I^2 = I \Rightarrow A^2 + 2A + I = I$$

$$\Rightarrow A^2 = -2A \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^4 = (-2A)^2 = 4A^2$$

$$\xrightarrow{\times A^2} A^6 = 4A^4 = 4(4A^2)$$

$$\Rightarrow A^6 = 16A^2 = 16(-2A) = -32A$$

$$A^6 \text{ مجموع درایه‌های } = -32 \times (-2) = 64$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(معمد فندان)

۱۰۸ - آزمون

اتحادهای جبری زمانی برای دو ماتریس مربعی برقرار هستند که آن دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی نسبت به عمل ضرب داشته باشند (تعویض‌پذیر باشند)، بنابراین داریم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & x \\ y+2 & x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & x \\ y+z & z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2=2 \Rightarrow x=0 \\ x=x \\ y+2=y+z \Rightarrow z=2 \\ x+z=z \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

همان طور که مشاهده می‌شود، این دو ماتریس به ازای تمامی مقادیر y تعویض‌پذیر هستند و مقدار y به‌طور منحصر به فرد مشخص نمی‌شود.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

دو ماتریس A و B که وارون یکدیگرند، تعویض پذیرند و در نتیجه اتحادهای جبری برای آنها برقرار است. در نتیجه داریم:

$$(A+B)^2 - (A-B)^2 = (A^2 + B^2 + 2AB) - (A^2 + B^2 - 2AB) \\ = 4AB = 4I$$

$$\Rightarrow (A+B)^2 - (2I)^2 = 4I \Rightarrow (A+B)^2 = 4I + 4I = 8I$$

$$(A+B)(A^2 - B^2) = (A+B)(A+B)(A-B) \\ = (A+B)^2(A-B) = 8I \times 2I = 16I = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس، برابر ۳۲ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ماتریس A وارون پذیر است، بنابراین اگر طرفین رابطه $A^3 = I$ را در

A^{-1} ضرب کنیم، داریم:

$$A^{-1} \times A^3 = A^{-1} \times I \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \times A}_I \times A^2 = A^{-1} \Rightarrow A^2 = A^{-1}$$

در نتیجه ماتریس A^n به صورت زیر تعریف می شود:

$$A^n = \begin{cases} A & : n = 3k + 1 \\ A^{-1} & : n = 3k + 2 \\ I & : n = 3k \end{cases}$$

با توجه به اینکه باقی مانده تقسیم عدد ۲۰۰ بر ۳، برابر ۲ است، پس

$$A^{200} = A^{-1} \text{ می باشد.}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه های ۱۷ تا ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

در توابع گزینه «۲» داریم:

$$D_f = D_g = [-2, 2]$$

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}} = \frac{2x(\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x})}{(x+2) - (2-x)}$$

$$= \frac{2x(\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x})}{2x} = \sqrt{x+2} - \sqrt{2-x} = f(x)$$

بنابراین $f(x) = g(x)$ است.

در سایر گزینه‌ها دامنه‌ها یکسان نیستند، بنابراین توابع نیز مساوی نخواهند بود.

(مسابقه ۱- تابع، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و ۴۶ تا ۴۸)

۴

۳

۲ ✓

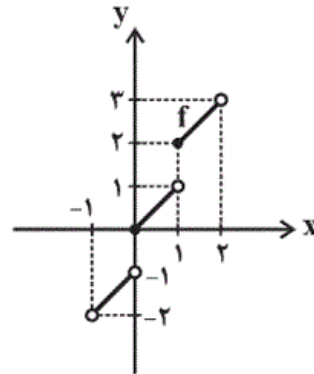
۱

نمودار تابع f به صورت زیر است:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$$



با توجه به نمودار تابع f ، خط $y = \frac{5}{2}$ آن را قطع می‌کند.

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سید عادل حسینی)

در ابتدا، مجموعه داده شده باید تابع باشد؛ بنابراین:

$$m^2 - m = 6 \Rightarrow m = -2 \text{ یا } m = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -2 \Rightarrow (1, 6), (0, 6) \in f \\ m = 3 \Rightarrow (3, 4), (5, 4) \in f \end{cases}$$

۴ ✓

۳

۲

۱

$$f(-2) = \sqrt{2+2} - \sqrt{-2+2} \Rightarrow f(-2) = 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(1) = -2$$

$$\Rightarrow f(-2) + f^{-1}(1) = 1 - 2 = -1$$

(مسابقان ۱- تابع، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$(-1, -2) \in f \Rightarrow f(-1) = -2 \Rightarrow -a - b = -2 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$(-1, -2) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(-1) = -2 \Rightarrow f(-2) = -1$$

$$\Rightarrow -a - b = -1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(مسابقان ۱- تابع، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

راه حل اول:

چون $D_f = [1, +\infty)$ است، داریم $f(x) = x + \sqrt{x-1}$. اکنون وارون این

تابع را به دست می آوریم:

$$y = x + \sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$y - \frac{3}{4} = \left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \right)^2 \Rightarrow \left| \sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \right| = \sqrt{y - \frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{x-1} + \frac{1}{2} = \sqrt{y - \frac{3}{4}} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$x = \left(\sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 + 1 = \frac{1}{4} (\sqrt{4y-3} - 1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4} (\sqrt{4x-3} - 1)^2 + 1$$

۴

۳

۲

۱ ✓

تابع g را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x) = x - 2 + |x - 2| = \begin{cases} 2x - 4 & ; x > 2 \\ 0 & ; x \leq 2 \end{cases}$$

دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ است و دامنه تابع $\frac{f}{g}$ ، بازه $(2, +\infty)$ است.

تابع $\frac{f}{g}$ را با شرط $x > 2$ تشکیل می‌دهیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{8 - 2x^2}{2x - 4} = \frac{-2(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = -(x+2)$$

حال داریم:

$$x > 2 \Rightarrow x + 2 > 4 \Rightarrow -(x + 2) < -4 \Rightarrow R_{\frac{f}{g}} = (-\infty, -4)$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

، برای دامنه تابع $\frac{g}{f^{-1} \circ g}$ داریم:

$$D = D_g \cap D_{f^{-1} \circ g} - \{x \mid f^{-1} \circ g(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow D = \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{f^{-1} \circ g} = \left\{ (1, 3), \left(2, \frac{1}{2}\right), (3, 0) \right\}$$

بنابراین مجموعه $\left\{0, \frac{1}{2}, 3\right\}$ برد تابع $\frac{g}{f^{-1} \circ g}$ است که مجموع اعضای آن

برابر $\frac{7}{2}$ است.

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(پوهانبش نیکنام)

۹۹- www.riazisara.ir

با توجه به تعریف g ، دامنه g شامل مقادیری است که به ازای آن‌ها تابع

f نامثبت شود یعنی بازه $[1, 3]$. پس داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 3]\} = [-1, 0] \cup \{4\}$$

این بازه شامل اعداد صحیح ۱-، صفر و ۴ است.

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

ابتدا دامنه و ضابطه $f \circ f$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} D_{f \circ f} &= \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_f\} \\ &= \{x \mid -2 \leq x \leq 1, -2 \leq 2x - 3 \leq 1\} \\ &= \left\{x \mid -2 \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ (f \circ f)(x) &= f(2x - 3) = 4x - 9 \end{aligned}$$

حال برای برد $f \circ f$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 &\Rightarrow 2 \leq 4x \leq 4 \Rightarrow -7 \leq 4x - 9 \leq -5 \\ &\Rightarrow R_{f \circ f} = [-7, -5] \end{aligned}$$

(مسابقه ۱- تابع، صفحه های ۶۶ تا ۷۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

برای نشان دادن نادرستی گزینه‌های «۱» تا «۳»، می‌توان از مثال نقض استفاده کرد.

گزینه «۱»: طبق تعریف درایه a_{ij} ، $a_{12} = 1 - 2 = -1$ است، در حالی که این درایه در ماتریس A برابر ۱ است.

گزینه «۲»: طبق تعریف درایه a_{ij} ، $a_{32} = 3 + 1 = 4$ است، در حالی که این درایه در ماتریس A برابر ۵ است.

گزینه «۳»: طبق تعریف درایه a_{ij} ، $a_{12} = 1 - 1 = 0$ است، در حالی که این درایه در ماتریس A برابر ۱ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(سؤال ۱۹ کتاب آبی هندسه ۳)

۱۱۲- سؤال ۱۹ کتاب آبی هندسه ۳

خاصیت شرکت‌پذیری برای جمع سه ماتریس به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} am + cn & bm + dn \\ ap + cq & bp + dq \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی در هر دو ماتریس AB و BA یکسان و

برابر $am + bp + cn + dq$ است.

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

روش اول:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ -2\alpha + \beta = 9 \Rightarrow -4 + \beta = 9 \Rightarrow \beta = 13 \end{cases}$$

روش دوم: در هر ماتریس 2×2 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، همواره داریم:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$$

با توجه به رابطه $A^2 - \alpha A - \beta I = \bar{O}$ داریم:

$$\begin{cases} a+d = \alpha \Rightarrow \alpha = -2+4 = 2 \\ ad-bc = -\beta \Rightarrow \beta = bc-ad = 1 \times 5 - (-2) \times 4 = 13 \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

راه حل اول:

$$A^T = 4A - 3I \Rightarrow A^T - 4A = -3I \Rightarrow A(A - 4I) = -3I$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}A(A - 4I) = I \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3}(A - 4I)$$

$$A^{-1} = mA + nI \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow m + n = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \quad \text{طبق فرض:}$$

راه حل دوم:

$$A^{-1} = mA + nI \xrightarrow{\times A} A^{-1}A = mA^T + nIA$$

$$\Rightarrow I = mA^T + nA$$

$$A^T = 4A - 3I \Rightarrow 3I = 4A - A^T \Rightarrow I = -\frac{1}{3}A^T + \frac{4}{3}A$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{3}, n = \frac{4}{3} \Rightarrow m + n = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربرد، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۴

۳

۲

۱✓

ماتریس‌های A و I تعویض‌پذیر هستند، بنابراین داریم:

$$A^2 = 2I \Rightarrow 9A^2 = 18I \Rightarrow 9A^2 - 16I = 2I$$

$$\Rightarrow (3A + 4I)(3A - 4I) = 2I \Rightarrow (3A + 4I) \times \frac{1}{2}(3A - 4I) = I$$

$$\Rightarrow (3A + 4I)^{-1} = \frac{1}{2}(3A - 4I)$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$A^{-1}(A + 2I) = A^{-1}A + 2A^{-1}I = I + 2A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & 10 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2(-4) - (-1) \times 3} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ 3\alpha & -4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta & -\alpha \\ 3\alpha & -4\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \\ 2\alpha + \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} + \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta = \frac{2}{5} \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۲ تا ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱

$$(A - 2I)(A - 2I)^{-1} = I$$

$$\Rightarrow A(A - 2I)^{-1} - 2I(A - 2I)^{-1} = I$$

$$\Rightarrow A(A - 2I)^{-1} = I + 2(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ستون دوم} = 2 + 3 = 5$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱