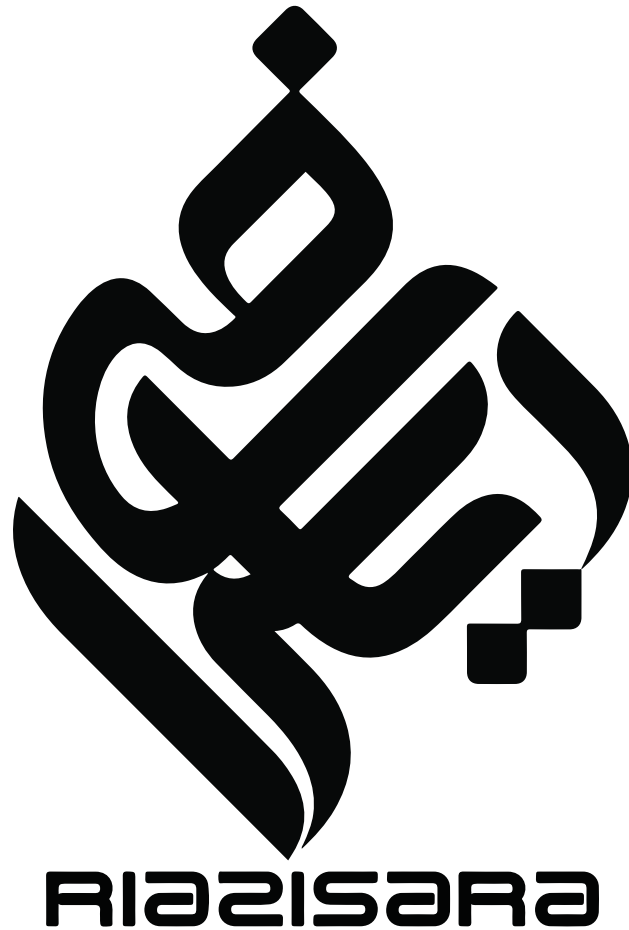




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



حسابان ۱، مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی - ۲ سوال -

۶۶- حاصل $S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{n \text{ رقم}}$ به ازای $n = 19$ کدام است؟

- (۱) 10^{20} (۲) 10^{21}
(۳) $\frac{1}{9}(10^{20} - 181)$ (۴) $\frac{1}{9}(10^{21} - 181)$

۶۲- یک دنباله حسابی n جمله دارد. اگر دو جمله وسط دنباله ۲۰ و ۲۸ و مجموع تمامی جملات ۴۳۲ باشد، n کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۲ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶

حسابان ۱، معادلات درجه دوم - ۴ سوال

۶۳- حاصل جمع ریشه های معادله $x^3 + 3x^2 + (a-3)x - 1 = a$ با شرط $(a < -1)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۳

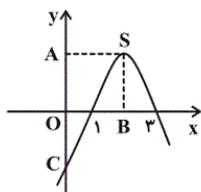
۶۴- اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشند، ریشه های کدام یک از معادله های زیر به صورت $\alpha^3 - 3\alpha$ و $\beta^3 - 3\beta$ می باشند؟

- (۱) $x^2 + 7x + 9 = 0$ (۲) $x^2 - 7x + 9 = 0$
(۳) $x^2 - 7x - 9 = 0$ (۴) $x^2 + 7x - 9 = 0$

۶۵- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات چهارم تا نهم ۷۲ برابر مجموع جملات اول تا سوم است. اگر جمله اول $a_1 = 1$ باشد، مجموع ۱۲ جمله اول کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۴۰۹۵ (۲) ۴۰۹۶ (۳) ۱۰۲۳ (۴) ۱۰۲۴

۶۱- در شکل روبه رو مساحت مستطیل OASB برابر ۴ است. عرض نقطه C کدام است؟ (نقطه S، رأس تابع درجه دوم است).



- (۱) -۳ (۲) -۴
(۳) -۵ (۴) -۶

حسابان ۱، معادلات گویا و کنگ - ۴ سوال

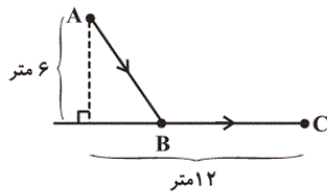
۶۷- تعداد جواب های معادله $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۸- مجموع ریشه‌های معادله $\sqrt{x^2 - 6x - 6} - 8\sqrt{x^2 - 6x - 6} = -7$ کدام است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) -۶

۶۹- معادله $\frac{x}{x^2 + x + 1} + \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = 2$ دارای چند ریشه حقیقی است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۷۰- معمولاً مرغ‌های دریایی برای شکار ماهی‌ها بخشی از مسیر را در هوا و بخشی را در سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر قائم مرغ دریایی روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌رود سپس در سطح آب از B به C می‌رود تا ماهی را شکار کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای برحسب متر از C می‌تواند باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟

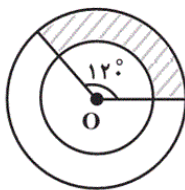


- (۱) ۸
 (۲) ۹
 (۳) ۷/۵
 (۴) ۴/۵

هندسه ۲، مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره - ۱۰ سوال -

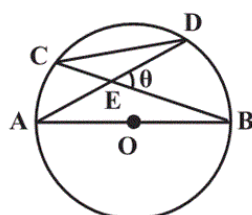
- ۱۰۱- نقطه‌ای روی خط L قرار دارد به طوری که فاصله آن از مرکز دایره C، برابر شعاع دایره می‌باشد. وضعیت خط L و دایره C چگونه است؟
 (۱) متقاطع نیستند.
 (۲) مماس هستند.
 (۳) نقطه مشترک دارند.
 (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

- ۱۰۲- مطابق شکل زیر دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O, 2r)$ مفروض‌اند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر 25π باشد، آن‌گاه مساحت دایره بزرگ‌تر کدام است؟



- (۱) 75π
 (۲) 125π
 (۳) 100π
 (۴) 150π

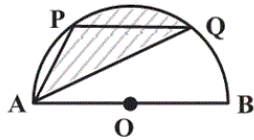
- ۱۰۳- در شکل زیر، O مرکز دایره است. اگر نسبت مساحت مثلث CED به مساحت مثلث AEB برابر ۳ به ۴ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه θ کدام است؟



- (۱) 30°
 (۲) 45°
 (۳) 60°
 (۴) 75°

۱۰۴- در نیم‌دایره شکل زیر، وتر PQ به طول $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر قطر دایره به موازات آن رسم شده است. اگر طول کمان AP برابر 3π باشد، مساحت

قسمت هاشورخورده کدام است؟



- (۱) 12π
- (۲) 18π
- (۳) 24π
- (۴) 36π

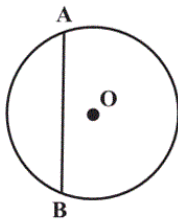
۱۰۵- دایره (O, R) و قطر AB درون آن را در نظر بگیرید. خط l به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره مفروض است به گونه‌ای که درون دایره با

قطر AB نه متقاطع و نه موازی است. مجموع فواصل نقاط A و B از این خط کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}R$
- (۲) R
- (۳) $\frac{3}{2}R$
- (۴) $2R$

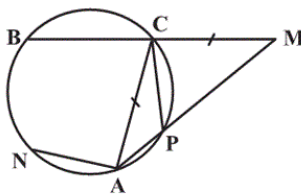
۱۰۶- در دایره شکل زیر، وتر AB به طول ۸ واحد رسم شده است. نقطه C روی دایره به گونه‌ای قرار دارد که مساحت مثلث ABC ، دارای

بیشترین مقدار ممکن و برابر ۳۲ واحد مربع است. طول قطر دایره کدام است؟



- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۵

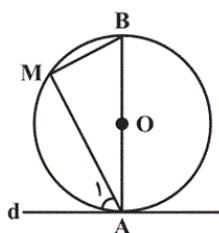
۱۰۷- در شکل زیر، دو قاطع MB و MA دایره را به ترتیب در نقاط C و P قطع کرده‌اند و مثلث MCA متساوی‌الساقین و $CP = AN$ است. اگر $\widehat{BN} = 70^\circ$ باشد، آن‌گاه اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه مثلث MCA کدام است؟



- (۱) 45°
- (۲) 60°
- (۳) 75°
- (۴) 80°

۱۰۸- مطابق شکل زیر، خط d در نقطه A بر دایره $(O, 4)$ مماس است. اگر $\hat{A}_1 = 3\alpha + 15^\circ$ و $\hat{ABM} = 5\alpha - 25^\circ$ باشد، آن‌گاه فاصله

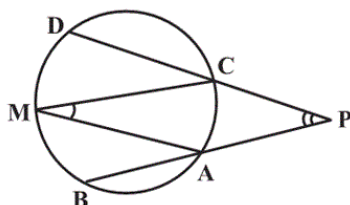
نقطه M از قطر AB کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۰۹- در شکل زیر امتداد وترهای AB و CD یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند. اگر M وسط کمان $\widehat{BD}$ و $\hat{P} + \hat{M} = 50^\circ$ باشد، در این

صورت زاویه BAM چند درجه است؟



(۱) ۵۰

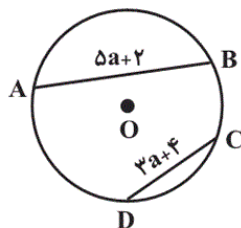
(۲) ۳۰

(۳) ۲۵

(۴) ۱۵

۱۱۰- دایره (O, ۸) مطابق شکل زیر مفروض است. اگر وتر AB نسبت به وتر CD به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، در این صورت مقادیر

ممکن برای a شامل چند عدد طبیعی می‌شود؟



(۱) هیچ

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

حسابان ۱- سوالات موازی، مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی - ۴ سوال -

۸۲- مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی ۴۳۲ و دو جمله وسط این دنباله ۲۰ و ۲۸ می‌باشد. تعداد جملات این دنباله کدام است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۱۸

(۲) ۲۲

(۱) ۲۴

۸۶- حاصل $S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{n \text{ رقم}}$ به ازای $n = 19$ کدام است؟

(۲) 10^{21}

(۱) 10^{20}

(۴) $\frac{1}{9}(10^{21} - 181)$

(۳) $\frac{1}{9}(10^{20} - 181)$

۸۷- مجموع n جمله اول دو دنباله حسابی با قدرنسبت‌های برابر d، از رابطه‌های $S_n = \frac{3}{2}n^2 + bn$ و $S'_n = an^2 + 2an$ پیروی می‌کند.

حاصل $S'_n - d$ کدام است؟

(۴) ۱۸۷

(۳) ۱۵۳

(۲) ۱۸۳

(۱) ۱۷۷

۸۸- در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول آن را با S_n نمایش می‌دهیم. اگر در این دنباله رابطه $\frac{S_9}{S_5} = \frac{81}{25}$ برقرار باشد، نسبت جمله نهم

این دنباله به جمله پنجم آن کدام است؟

(۴) $\frac{3}{7}$

(۳) $\frac{9}{7}$

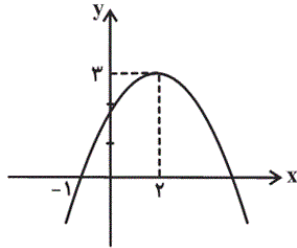
(۲) $\frac{17}{9}$

(۱) $\frac{9}{5}$

۸۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\beta^4(3\alpha + 2)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۵ (۳) ۱ (۴) ۳

۹۰- اگر نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه این تابع کدام است؟



(۱) $y = -\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

(۲) $y = -\frac{x^2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

(۳) $y = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

(۴) $y = -3x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

۸۳- حاصل جمع ریشه‌های معادله $x^3 + 3x^2 + (a-3)x - 1 = a$ با شرط $(a < -1)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۳

۸۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام یک از معادله‌های زیر به صورت $\alpha^3 - 3\alpha$ و $\beta^3 - 3\beta$ می‌باشند؟

(۲) $x^2 - 7x + 9 = 0$

(۱) $x^2 + 7x + 9 = 0$

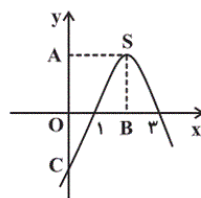
(۴) $x^2 + 7x - 9 = 0$

(۳) $x^2 - 7x - 9 = 0$

۸۵- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات چهارم تا نهم ۷۲ برابر مجموع جملات اول تا سوم است. اگر جمله اول $a_1 = 1$ باشد، مجموع ۱۲ جمله اول کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴۰۹۵ (۲) ۴۰۹۶ (۳) ۱۰۲۳ (۴) ۱۰۲۴

۸۱- در شکل روبه‌رو مساحت مستطیل OASB برابر ۴ است. عرض نقطه C کدام است؟ (نقطه S، رأس



تابع درجه دوم است.)

(۱) -۳

(۲) -۴

(۳) -۵

(۴) -۶

۱۱۱- نقطه‌ای روی خط L قرار دارد به‌طوری که فاصله آن از مرکز دایره C ، برابر شعاع دایره می‌باشد.

وضعیت خط L و دایره C چگونه است؟

(۲) مماس هستند.

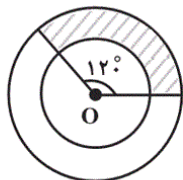
(۱) متقاطع نیستند.

(۴) نمی‌توان تعیین کرد.

(۳) نقطه مشترک دارند.

۱۱۲- مطابق شکل زیر دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O, 2r)$ مفروض‌اند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر 25π باشد، آن‌گاه مساحت

دایره بزرگ‌تر کدام است؟



(۱) 75π

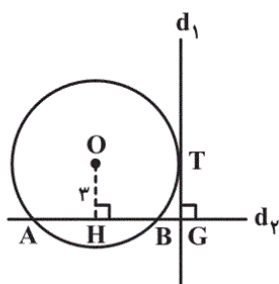
(۲) 125π

(۳) 100π

(۴) 150π

۱۱۳- مطابق شکل زیر خط d_1 بر دایره $C(O, 5)$ در نقطه T مماس است و خط d_2 دایره را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. مساحت

مثلث AGT کدام است؟



(۱) $10/5$

(۲) 12

(۳) $13/5$

(۴) 15

۱۱۴- دایره $C(O, R)$ و قطر AB درون آن را در نظر بگیرید. خط l به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره مفروض است به گونه‌ای که درون دایره با

قطر AB نه متقاطع و نه موازی است. مجموع فواصل نقاط A و B از این خط کدام است؟

(۲) R

(۱) $\frac{2}{3}R$

(۴) $2R$

(۳) $\frac{3}{2}R$

۱۱۵- فاصله نقطه P از مرکز دایره‌ای به شعاع R برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ است. اگر کوتاه‌ترین وتر از دایره که از P می‌گذرد، آن را به دو کمان تقسیم

کند، نسبت طول‌های این دو کمان کدام است؟

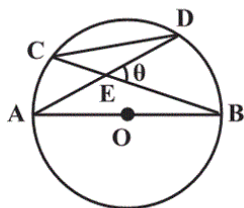
(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{5}$

(۴) $\frac{1}{6}$

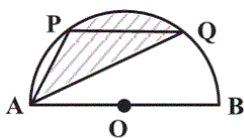
(۳) $\frac{3}{10}$

۱۱۶- در شکل زیر، O مرکز دایره است. اگر نسبت مساحت مثلث CED به مساحت مثلث AEB برابر ۳ به ۴ باشد، آن گاه اندازه زاویه θ کدام است؟



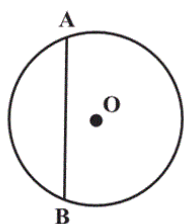
- (۱) 30°
- (۲) 45°
- (۳) 60°
- (۴) 75°

۱۱۷- در نیم دایره شکل زیر، وتر PQ به طول $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر قطر دایره به موازات آن رسم شده است. اگر طول کمان AP برابر 3π باشد، مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



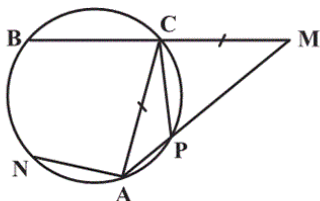
- (۱) 12π
- (۲) 18π
- (۳) 24π
- (۴) 36π

۱۱۸- در دایره شکل زیر، وتر AB به طول ۸ واحد رسم شده است. نقطه C روی دایره به گونه ای قرار دارد که مساحت مثلث ABC ، دارای بیشترین مقدار ممکن و برابر ۳۲ واحد مربع است. طول قطر دایره کدام است؟



- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۵

۱۱۹- در شکل زیر، دو قاطع MA و MB دایره را به ترتیب در نقاط C و P قطع کرده اند و مثلث MCA متساوی الساقین و $CP = AN$ است. اگر $\widehat{BN} = 70^\circ$ باشد، آن گاه اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین زاویه مثلث MCA کدام است؟



- (۱) 45°
- (۲) 60°
- (۳) 75°
- (۴) 80°

۱۲۰- وتر $EF = 2\sqrt{2k}$ در دایره $C_1(O, 6)$ رسم شده است. دایره کوچک تر $C_2(O, 2k-1)$ را طوری رسم می کنیم که فاصله

نزدیک ترین نقطه آن تا پاره خط EF برابر $3-k$ باشد. مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{6}$ (۲) $\frac{7}{3}$
(۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{17}{6}$

حسابان ۱- گواه ، **مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی** - ۳ سوال -

۷۱- به جمله اول یک دنباله حسابی ۲ واحد اضافه می کنیم و از قدرنسبت آن k واحد کم می کنیم. اگر مجموع ۱۰ جمله اول دنباله بدون تغییر باشد، k کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{2}{10}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{4}{10}$

۷۲- حاصل $A = (1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟
(۱) ۵۰۷ (۲) ۵۱۱ (۳) ۵۱۲ (۴) ۵۱۶

۷۳- برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه های محافظی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آنها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

حسابان ۱- گواه ، **معادلات درجه دوم** - ۳ سوال

۷۴- به ازای چند مقدار a ریشه های حقیقی معادله $x^2 + ax + 1 = a(x+2)$ ، قرینه یکدیگرند؟

- (۱) یک مقدار (۲) دو مقدار (۳) بی شمار (۴) هیچ مقداری

۷۵- سهمی $y = 2x^2 + bx + 6$ بر قسمت منفی محور x ها مماس است. معادله محور تقارن آن کدام است؟

- (۱) $x = -\sqrt{3}$ (۲) $x = -\sqrt{2}$
(۳) $x = -2\sqrt{2}$ (۴) $x = -4\sqrt{3}$

۷۶- نمودار سهمی به معادله $f(x) = -mx^2 + 2x + m - 1$ فقط از ناحیه اول و مبدأ مختصات نمی گذرد. حدود m کدام است؟

- (۱) $m > 0$ (۲) $m < 0$
(۳) $0 < m < 1$ (۴) هیچ مقداری برای m یافت نمی شود.

حسابان ۱- گواه ، **معادلات گویا و گنگ** - ۴ سوال

۷۷- تعداد جواب‌های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۸- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

- (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۸

۷۹- تعداد و علامت جواب (های) معادله $\sqrt{2x+1} = x-2$ چگونه است؟

- (۱) دو جواب مثبت (۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی (۳) فقط یک جواب مثبت (۴) فاقد جواب حقیقی

۸۰- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

آمار و احتمال، آشنایی با منطق ریاضی - ۱۰ سوال

۱۲۱- اگر گزاره $(p \vee \sim q)$ درست و گزاره $(\sim p)$ نادرست باشد، آن‌گاه $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ هم‌ارز منطقی با کدام گزاره زیر است؟

- (۱) r (۲) $\sim r$ (۳) T (۴) F

۱۲۲- اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \sim q$ هر دو درست باشند، کدام گزاره زیر حتماً درست است؟

- (۱) $(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow F$ (۲) $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow T$ (۳) $(q \wedge p) \Leftrightarrow F$ (۴) $(p \vee q) \Leftrightarrow T$

۱۲۳- اگر $r \equiv F \Rightarrow (p \vee q) \sim$ باشد، کدام گزینه درباره ارزش گزاره‌های p ، q و r به ترتیب از راست به چپ صحیح است؟

- (۱) نادرست - نادرست - نادرست (۲) درست - نادرست - نادرست (۳) درست - درست - نادرست (۴) نادرست - درست - نادرست

۱۲۴- در اثبات گزاره «اگر n^2 مضرب ۷ باشد، آن‌گاه n مضرب ۷ است» به روش عکس نقیض، حکم کدام است؟ ($n \in \mathbb{Z}$)

- (۱) n مضرب ۷ نیست. (۲) n^2 مضرب ۷ نیست. (۳) n^2 مضرب ۷ است. (۴) n مضرب ۷ است.

۱۲۵- نقیض گزاره «برای هر عدد طبیعی n ، اگر n عدد اول باشد، آن‌گاه $n = 6k \pm 1$ است»، کدام یک از گزاره‌های زیر است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) عددی طبیعی مانند n وجود دارد که n عدد اول نیست و $n = 6k \pm 1$ است. (۲) عددی طبیعی مانند n وجود دارد که n عدد اول است و $n = 6k \pm 1 \neq$ است. (۳) برای هر عدد طبیعی n ، n عدد اول است و $n = 6k \pm 1 \neq$ است. (۴) برای هر عدد طبیعی n ، n عدد اول نیست و $n = 6k \pm 1$ است.

۱۲۶- اگر $p : a = 0$ ، $q : a + b = 0$ و $r : ab = 0$ سه گزاره باشند، کدام یک از نتیجه گیری های زیر درست است؟
 (۱) $r \Rightarrow q$ (۲) $\sim p \Rightarrow \sim r$ (۳) $\sim r \Rightarrow \sim p$ (۴) $\sim q \Rightarrow \sim p$

۱۲۷- کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

(۱) $\exists x \in \mathbb{N} ; x^2 < x$ (۲) $\forall x \in [0, +\infty) ; \frac{|x|}{x} = 1$
 (۳) $\exists x \in \mathbb{Z} ; x^2 = 8k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$ (۴) $\forall x \in \mathbb{R} ; \tan x \cdot \cot x = 1$

۱۲۸- کدام گزاره سوری زیر درست است؟

(۱) $\forall x \in \mathbb{N} , \exists y \in \mathbb{N} ; x + y = 2$ (۲) $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$
 (۳) $\forall x \in \mathbb{N} , \exists y \in \mathbb{N} ; x < y$ (۴) $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 > 0$

۱۲۹- اگر دامنه متغیر گزاره نمای $\sqrt{x} < 3 \Rightarrow x < 25$ به صورت $D = [0, +\infty)$ باشد، آن گاه مجموعه جواب این گزاره نما کدام است؟
 (۱) $[0, 9]$ (۲) $[25, +\infty)$ (۳) $[0, 25]$ (۴) $[0, 9) \cup [25, +\infty)$

۱۳۰- ارزش کدام یک از گزاره های سوری زیر درست است؟

(۱) $\exists x \in \mathbb{R} ; \frac{x-1}{\sin \pi x} = 0$
 (۲) $\exists x \in \mathbb{Q} - \{0\} , \exists y \in \mathbb{Q} ; \sqrt{2}x + y \in \mathbb{Q}$
 (۳) $\exists x \in \mathbb{N} , \exists y \in \mathbb{N} ; x^2 + y^2 - xy = 0$
 (۴) $\forall x \in (-\infty, 0) ; |x + \frac{1}{x}| \geq 2$

حسابان ۱ گواه-سوالات موازي ، **مجموع جملات دنباله هاي حسابي و هندسي** - ۴ سوال

۹۱- اگر به جمله اول یک دنباله حسابی ۲ واحد بیفزاییم، چه قدر از قدرنسبت آن کم کنیم تا مجموع ۱۰ جمله اول آن ثابت بماند؟

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{2}{10}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{4}{10}$

۹۲- در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد، جمله اول کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۳- حاصل $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

(۱) ۵۰۷ (۲) ۵۱۱ (۳) ۵۱۲ (۴) ۵۱۶

۹۴- برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه های محافظی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آنها نصف می شود.

حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

حسابان ۱ گواه-سوالات موازي ، **معادلات درجه دوم** - ۶ سوال

۹۵- به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

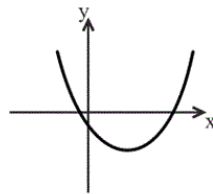
۹۶- به ازای چند مقدار a ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + ax + 1 = a(x + 2)$ ، قرینه یکدیگرند؟

(۱) یک مقدار (۲) دو مقدار (۳) بی‌شمار (۴) هیچ مقداری

۹۷- برای معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$)، کدام گزینه برای وجود ریشه‌ها ممکن نیست؟
 (۱) چهار ریشه حقیقی داشته باشد.
 (۲) فقط سه ریشه متمایز حقیقی داشته باشد.
 (۳) فقط یک ریشه متمایز حقیقی داشته باشد.
 (۴) فقط دو ریشه حقیقی و هم‌علامت داشته باشد.

۹۸- سهمی $y = 2x^2 + bx + 6$ بر قسمت منفی محور x ها مماس است. معادله محور تقارن آن کدام است؟
 (۱) $x = -\sqrt{3}$ (۲) $x = -\sqrt{2}$ (۳) $x = -2\sqrt{2}$ (۴) $x = -4\sqrt{3}$

۹۹- شکل زیر، نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه زیر همواره درست است؟



- (۱) $a + b > 0$
 (۲) $a + b < 0$
 (۳) $b + c > 0$
 (۴) $b + c < 0$

۱۰۰- نمودار سهمی به معادله $f(x) = -mx^2 + 2x + m - 1$ فقط از ناحیه اول و مبدأ مختصات نمی‌گذرد. حدود m کدام است؟
 (۱) $m > 0$ (۲) $m < 0$ (۳) $0 < m < 1$ (۴) هیچ مقداری برای m یافت نمی‌شود.

-۶۶

(امیر حسین افشار)

$$S = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$S = \underbrace{10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n}_{\downarrow} - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\downarrow}$$

$$S = 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$S = \frac{10}{9} (10^n - 1) - n = \frac{1}{9} (10^{n+1} - 9n - 10)$$

$$\xrightarrow{n=19} S = \frac{1}{9} (10^{20} - 9 \times 19 - 10) = \frac{1}{9} (10^{20} - 181)$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳✓

۲

۱

-۶۲

(میثم بهرامی جویا)

چون n زوج است، دو جمله وسط دنباله، جملات $\frac{n}{2}$ ام و $(\frac{n}{2} + 1)$ ام می‌باشند.

$$\frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} = 20 + 28 = 48, \quad \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} = a_n + a_1$$

$$\Rightarrow a_n + a_1 = 48$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = 432 \Rightarrow \frac{n}{2} \times 48 = 432 \Rightarrow n = 18$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳✓

۲

۱

$$x^3 + 3x^2 + (a-3)x - 1 - a = 0$$

با توجه به این که مجموع ضرایب صفر است، $x=1$ یک جواب معادله خواهد بود. بنابراین با تقسیم چندجمله‌ای

$$x^3 + 3x^2 + (a-3)x - 1 - a \text{ بر عامل } x-1 \text{ داریم:}$$

$$x^3 + 3x^2 + (a-3)x - 1 - a = (x-1)(x^2 + 4x + a+1)$$

با توجه به این که $a < -1$ یا $a+1 < 0$ است، پس $\Delta > 0$ است و معادله

$$x^2 + 4x + a+1 = 0 \text{ دو ریشه حقیقی با مجموع } -4 \text{ دارد. بنابراین}$$

مجموع جواب‌های معادله داده شده -3 می‌باشد.

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱✓

اگر α و β را در معادله اولیه جای گذاری کنیم آن گاه خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 3 = \alpha \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^3 - 3\alpha = \alpha^2 \\ \beta^2 - \beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta^2 - 3 = \beta \xrightarrow{\times \beta} \beta^3 - 3\beta = \beta^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S = (\alpha^3 - 3\alpha) + (\beta^3 - 3\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 6 = 7 \\ P = (\alpha^3 - 3\alpha)(\beta^3 - 3\beta) = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 9 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 9 = 0$$

$$(مسابقان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)$$

۴

۳

۲✓

۱

$$\Rightarrow a_1 \frac{1-q^9}{1-q} = 7^3 a_1 \frac{1-q^3}{1-q}$$

$$1 + q^3 + q^6 = 7^3 \Rightarrow q^3 + q^6 - 7^3 = 0 \xrightarrow{q^3=t} q = 2, q = \sqrt[3]{-9}$$

$$S_{12} = a_1 \frac{1-q^{12}}{1-q} \xrightarrow{q=2} S_{12} = 1 \times \frac{1-2^{12}}{1-2} = 4095$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱✓

۶۱-

(امیر هوشنگ فمسه)

با توجه به آن که $x = x_B$ محور تقارن تابع است، پس $x_B = 2$ یعنی $OB = 2$ است.

$$S_{\square} = OA \times OB \Rightarrow 4 = 2 \times OA \Rightarrow OA = 2 \Rightarrow y_S = 2$$

$$\text{معادلهٔ تابع: } y = a(x-1)(x-3) \xrightarrow{(2,2)} 2 = a(1)(-1) \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow y = -2(x-1)(x-3) \xrightarrow{x=0} y_C = -6$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

۶۷-

(بهانفش نیکنام)

$$\sqrt{2x-4} = \sqrt{x+5} + 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x-4 = x+5+1+2\sqrt{x+5}$$

$$\Rightarrow x-10 = 2\sqrt{x+5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 - 20x + 100 = 4x + 20$$

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 80 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های معادله: ۱} \quad \text{غ ق ق ق}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

۶۸-

(حسن باطنی)

با فرض $\sqrt{x^2 - 6x - 6} = t$ و جایگذاری آن در معادلهٔ صورت سؤال داریم:

$$t^2 - 8t + 7 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x - 6} = 1 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \\ \Rightarrow (x-7)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 7 \\ t=7 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x - 6} = 7 \Rightarrow x^2 - 6x - 55 = 0 \\ \Rightarrow (x-11)(x+5) = 0 \Rightarrow x = 11, x = -5 \end{cases}$$

هر چهار ریشه در معادله صدق می‌کنند.

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = (-1) + 7 + 11 + (-5) = 12$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\frac{x}{x^2+x+1} - 1 = 1 - \frac{x^2}{x^4+x^2+1} \Rightarrow \frac{-x^2-1}{x^2+x+1} = \frac{x^4+1}{x^4+x^2+1}$$

۴

۳

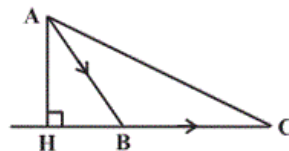
۲

۱✓

-۷۰

(علی کردی)

فاصله B از تصویر قائم A را x در نظر می گیریم. در نتیجه فاصله B و C برابر $12-x$ می باشد. بنابراین داریم:



$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB^2 = 36 + x^2 \Rightarrow AB = \sqrt{36 + x^2}$$

بنابراین، میزان انرژی مصرف شده توسط مرغ دریایی برابر است با:

$$14\sqrt{36 + x^2} + 10(12 - x)$$

لذا برای آن که مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم:

$$14\sqrt{36 + x^2} + 120 - 10x = 180 \Rightarrow 14\sqrt{36 + x^2} = 10x + 60$$

$$\Rightarrow 7\sqrt{36 + x^2} = 5x + 30 \Rightarrow 2x^2 - 25x + 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases}$$

بنابراین فاصله B تا C برابر است با $12 - 8 = 4$ یا $12 - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$.

(مسایان ۱- صفحه های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۰۱

(امیر غلامی)

اگر R شعاع دایره C، d فاصله مرکز دایره از خط L و d' فاصله مرکز دایره از نقطه مفروض باشد، داریم $R = d' \geq d$ ، بنابراین $d \leq R$ است، یعنی فاصله مرکز دایره از خط L از شعاع دایره کمتر است. بنابراین خط و دایره یا مماس اند و یا متقاطع که در هر دو حالت دارای نقطه مشترک خواهند بود.

(هندسه ۲- صفحه های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۰۲

(امیر حسین ابومحبوب)

می‌دانیم مساحت قطاعی از دایره به شعاع r و با زاویه مرکزی α ازرابطه $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$ به دست می‌آید. اگر مساحت قطاع 120° دردایره‌های بزرگ و کوچک را به ترتیب با S_1 و S_2 نمایش دهیم، داریم:

$$S_{\text{هاشورزده}} = S_1 - S_2$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشورزده}} = \frac{\pi(2r)^2(120^\circ)}{360^\circ} - \frac{\pi r^2(120^\circ)}{360^\circ} = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \pi r^2 = 25\pi \Rightarrow r = 5$$

$$S_{\text{دایره بزرگ}} = \pi(2r)^2 = 4r^2\pi = 100\pi$$

(هندسه ۲ - صفحه ۱۲)

۴

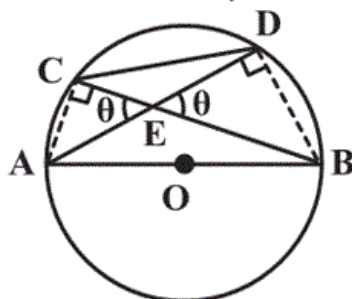
۳✓

۲

۱

-۱۰۳

(مهمان فندان)

با وصل نمودن A به C و B به D می‌توان نتیجه گرفت که زوایایمخاطی ACB و ADB برابر 90° می‌باشند. حال داریم:

$$\Delta_{ACE} : \frac{CE}{EA} = \cos \theta$$

$$\Delta_{BDE} : \frac{ED}{EB} = \cos \theta$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$\frac{S_{\Delta_{CED}}}{S_{\Delta_{AEB}}} = \frac{\frac{1}{2} \times CE \cdot ED \cdot \sin(180^\circ - \theta)}{\frac{1}{2} \times EA \cdot EB \cdot \sin(180^\circ - \theta)} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{EA} \times \frac{ED}{EB} = \cos^2 \theta = \frac{3}{4} \xrightarrow{0^\circ < \theta < 90^\circ} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

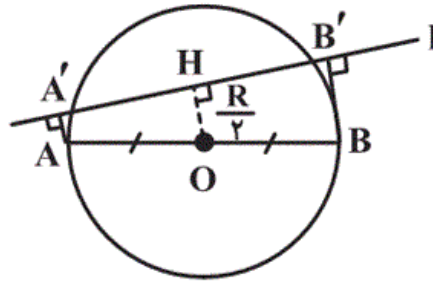
۴

۳

۲

۱✓

از آنجایی که فاصله خط l تا مرکز دایره کمتر از طول شعاع دایره است، پس خط l با دایره متقاطع است.



از طرفی با توجه به این که در دوزنقه $AA'B'B$ ، نقطه O وسط AB قرار داشته و OH هم موازی قاعده‌های دوزنقه است می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\left. \begin{array}{l} OH \parallel AA' \parallel BB' \\ AO = OB \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'H = HB' \\ OH = \frac{AA' + BB'}{2} \end{array} \right.$$

$$AA' + BB' = 2OH \Rightarrow AA' + BB' = R$$

بنابراین:

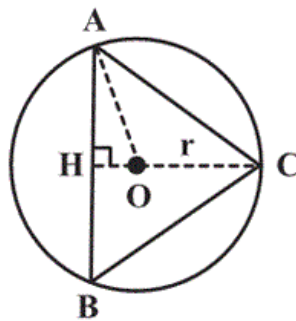
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۴

۳

۲✓

۱



حال از آنجایی که ارتفاع CH ، وتر AB را نصف می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت مثلث ABC متساوی‌الساقین است ($CA = CB$)، پس داریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2} = 32 \xrightarrow{AB=8} CH = 8 \Rightarrow OH = 8 - r \quad (*)$$

$$\Delta OHA : OH^2 + AH^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (8-r)^2 + 4^2 = r^2 \Rightarrow 64 - 16r + r^2 + 16 = r^2$$

$$\Rightarrow 16r = 80 \Rightarrow 2r = 10$$

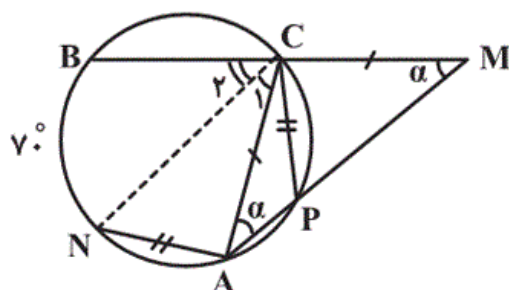
(هندسه ۲- صفحه ۱۳)

۴

۳

۲

۱✓



$$CP = AN \Rightarrow \widehat{CP} = \widehat{AN}$$

بنابراین طبق نتیجه صفحه ۱۵ کتاب درسی $AP \parallel CN$ است و داریم:

$$AP \parallel CN, AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{CAP} = \alpha \quad (*)$$

از طرفی در مثلث MCA داریم:

$$\widehat{BCA} = \widehat{CAM} + \widehat{CMA} = 2\alpha \quad (\text{زاویه خارجی})$$

$$\Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 2\alpha \xrightarrow{(*)} \hat{C}_2 = \hat{C}_1 = \alpha$$

$$\hat{C}_2 = \frac{\widehat{BN}}{2} = 35^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ \Rightarrow \hat{M} = 35^\circ, \hat{MCA} = 110^\circ$$

بنابراین اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه مثلث MCA برابر

$$110^\circ - 35^\circ = 75^\circ \quad \text{است با:}$$

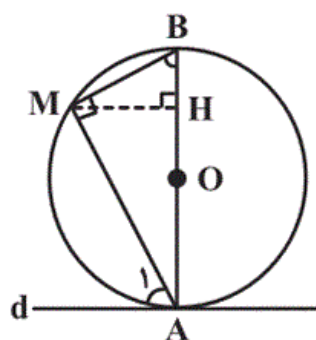
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴

۳✓

۲

۱



می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده 15° ، طول ارتفاع وارد

$$MH = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} \times 8 = 2 \quad \text{بر وتر، } \frac{1}{4} \text{ طول وتر است. پس:}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴

۳

۲✓

۱

$$\left. \begin{aligned} \hat{P} &= \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \\ \hat{M} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{P} + \hat{M} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{2\widehat{MB}}{2} = \widehat{MB}$$

$$\Rightarrow \widehat{MB} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = \frac{\widehat{MB}}{2} = 25^\circ$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

می‌دانیم از بین دو وتر دلخواه در دایره، وتری که به مرکز دایره نزدیک‌تر است، از دیگری بزرگ‌تر است، پس:

$$AB > CD \Rightarrow 5a + 2 > 3a + 4 \Rightarrow 2a > 2 \Rightarrow a > 1 \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم بزرگ‌ترین وتر دایره، قطر دایره است. بنابراین:

$$AB < 2R \Rightarrow 5a + 2 < 16 \Rightarrow 5a < 14 \Rightarrow a < 2/8 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(**), (*)} 1 < a < 2/8 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 2$$

در نتیجه تنها یک مقدار طبیعی برای a موجود است.

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۳ و ۱۷)

۴

۳

۲✓

۱

چون n زوج است، دو جملهٔ وسط دنباله، جملات $\frac{n}{2}$ ام و $(\frac{n}{2} + 1)$ ام می‌باشند.

$$\frac{a_n}{2} + \frac{a_{\frac{n}{2}+1}}{2} = 20 + 28 = 48, \quad \frac{a_n}{2} + \frac{a_{\frac{n}{2}+1}}{2} = a_n + a_1$$

$$\Rightarrow a_n + a_1 = 48$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 432 \Rightarrow \frac{n}{2} \times 48 = 432 \Rightarrow n = 18$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳✓

۲

۱

$$S = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$S = \underbrace{10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n}_{\downarrow} - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{\downarrow}$$

$$S = 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$S = \frac{10}{9} (10^n - 1) - n = \frac{1}{9} (10^{n+1} - 9n - 10)$$

$$\xrightarrow{n=19} S = \frac{1}{9} (10^{20} - 9 \times 19 - 10) = \frac{1}{9} (10^{20} - 181)$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳✓

۲

۱

(پدرا ۳ نیکوکار)

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d از

$$S_n = \frac{d}{2} n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

رابطه $\frac{d}{2}$ پیروی می‌کند که ضریب n^2 برابر $\frac{d}{2}$

می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\frac{d}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 3 \xrightarrow{\text{در دنباله دوم}} \frac{3}{2} = a$$

$$\Rightarrow S'_n = \frac{3}{2} n^2 + 3n \Rightarrow S'_{10} = \frac{3}{2} \times 100 + 30 = 180$$

$$S'_{10} - d = 180 - 3 = 177$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱✓

(علی کردی)

$$\frac{S_9}{S_5} = \frac{81}{25} \Rightarrow \frac{\frac{9}{2}(2a + 8d)}{\frac{5}{2}(2a + 4d)} = \frac{81}{25} \Rightarrow \frac{a + 4d}{a + 2d} = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow 5a + 20d = 9a + 18d \Rightarrow 4a = 2d \Rightarrow d = 2a$$

$$\Rightarrow \frac{a_9}{a_5} = \frac{a + 8d}{a + 4d} = \frac{17a}{9a} = \frac{17}{9}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲✓

۱

(میثم بهرامی بویا)

$$x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{x=\beta} \beta^2 - \beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 = \beta + 1$$

$$\Rightarrow \beta^4 = \beta^2 + 2\beta + 1 \xrightarrow{\beta^2 = \beta + 1} \beta^4 = 2\beta + 2$$

$$\beta^4 (2\alpha + 2) = (2\beta + 2)(2\alpha + 2) = 4\alpha\beta + 6(\alpha + \beta) + 4$$

$$\xrightarrow[\alpha+\beta=1]{\alpha\beta=-1} 4(-1) + 6(1) + 4 = 1$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳✓

۲

۱

-۹۰

(کریم نصیری)

رأس سهمی به مختصات (۲, ۳) و دهانه آن روبه پایین است. پس

$$y = a(x - 2)^2 + 3 \quad \text{ضابطه آن به صورت مقابل است:}$$

مطابق شکل صورت سؤال، $x = -1$ یکی از صفرهای تابع درجه دوم

$$y = a(x - 2)^2 + 3 \quad \text{است، پس به ازای } x = -1 \text{ مقدار تابع صفر}$$

می‌شود، داریم:

$$0 = a(-1 - 2)^2 + 3 \Rightarrow -3 = 9a \Rightarrow a = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

بنابراین ضابطه سهمی به صورت زیر می‌باشد:

$$y = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 + 3 = \frac{-x^2}{3} + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱✓

$$x^3 + 3x^2 + (a-3)x - 1 - a = 0$$

با توجه به این که مجموع ضرایب صفر است، $x=1$ یک جواب معادله خواهد بود. بنابراین با تقسیم چندجمله‌ای

$$x^3 + 3x^2 + (a-3)x - 1 - a \text{ بر عامل } x-1 \text{ داریم:}$$

$$x^3 + 3x^2 + (a-3)x - 1 - a = (x-1)(x^2 + 4x + a+1)$$

با توجه به این که $a < -1$ یا $a+1 < 0$ است، پس $\Delta > 0$ است و معادله

$$x^2 + 4x + a+1 = 0 \text{ دو ریشه حقیقی با مجموع } -4 \text{ دارد. بنابراین}$$

مجموع جواب‌های معادله داده شده -3 می‌باشد.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱✓

اگر α و β را در معادله اولیه جای‌گذاری کنیم آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 3 = \alpha \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^3 - 3\alpha = \alpha^2 \\ \beta^2 - \beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta^2 - 3 = \beta \xrightarrow{\times \beta} \beta^3 - 3\beta = \beta^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S = (\alpha^3 - 3\alpha) + (\beta^3 - 3\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 6 = 7 \\ P = (\alpha^3 - 3\alpha)(\beta^3 - 3\beta) = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 9 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 9 = 0$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲✓

۱

$$a_1 + a_2 + a_3 = A$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_9 = 72A \Rightarrow S_9 = 73S_3$$

$$\Rightarrow a_1 \frac{1-q^9}{1-q} = 73a_1 \frac{1-q^3}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1 + q^3 + q^6 = 73 \Rightarrow q^3 + q^6 - 72 = 0 \xrightarrow{q^3=t} q = 2, q = \sqrt[3]{-9}$$

$$S_{12} = a_1 \frac{1-q^{12}}{1-q} \xrightarrow{q=2} S_{12} = 1 \times \frac{1-2^{12}}{1-2} = 4095$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱✓

-۸۱

(امیر هوشنگ فمسه)

با توجه به آن که $x = x_B$ محور تقارن تابع است، پس $x_B = 2$ یعنی $OB = 2$ است.

$$S_{\square} = OA \times OB \Rightarrow 4 = 2 \times OA \Rightarrow OA = 2 \Rightarrow y_S = 2$$

$$y = a(x-1)(x-3) \xrightarrow{(2,2)} 2 = a(1)(-1) \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow y = -2(x-1)(x-3) \xrightarrow{x=0} y_C = -6$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴✓

۳

۲

۱

-۱۱۱

(امیر غلامی)

اگر R شعاع دایره C ، d فاصله مرکز دایره از خط L و d' فاصله مرکز دایره از نقطه مفروض باشد، داریم $R = d' \geq d$ ، بنابراین $d \leq R$ است، یعنی فاصله مرکز دایره از خط L از شعاع دایره کمتر است. بنابراین خط و دایره یا مماس‌اند و یا متقاطع که در هر دو حالت دارای نقطه مشترک خواهند بود.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۱۲

(امیر حسین ابومصوب)

می‌دانیم مساحت قطاعی از دایره به شعاع r و با زاویه مرکزی α از

$$\text{رابطه } S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \text{ به دست می‌آید. اگر مساحت قطاع } 120^\circ \text{ در}$$

دایره‌های بزرگ و کوچک را به ترتیب با S_1 و S_2 نمایش دهیم، داریم:

$$S_{\text{هاشورزده}} = S_1 - S_2$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشورزده}} = \frac{\pi(2r)^2(120^\circ)}{360^\circ} - \frac{\pi r^2(120^\circ)}{360^\circ} = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \pi r^2 = 25\pi \Rightarrow r = 5$$

$$S_{\text{دایره بزرگ}} = \pi(2r)^2 = 4r^2\pi = 100\pi$$

(هندسه ۲- صفحه ۱۲)

۴

۳✓

۲

۱

مطابق شکل OT بر خط d_1 عمود است، بنابراین در چهارضلعی OTGH، سه زاویه T، G و H قائمه هستند، پس این چهارضلعی لزوماً مستطیل است و $GH = OT = ۵$ و $GT = OH = ۳$ می‌باشد. داریم:

$$\Delta AOH : AH^2 = OA^2 - OH^2 = ۵^2 - ۳^2 = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴$$

$$S_{\Delta AGT} = \frac{1}{2} TG \times AG = \frac{1}{2} \times ۳ \times (۴ + ۵) = \frac{۲۷}{۲} = ۱۳ \frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

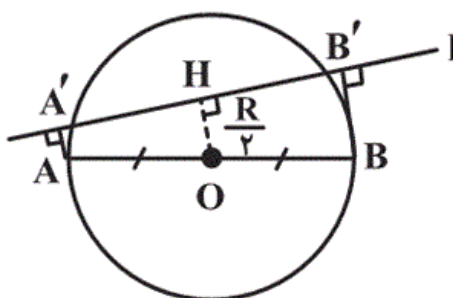
۴

۳✓

۲

۱

از آنجایی که فاصله خط l تا مرکز دایره کمتر از طول شعاع دایره است، پس خط l با دایره متقاطع است.



از طرفی با توجه به این که در دوزنقه $AA'B'B$ ، نقطه O وسط AB قرار داشته و OH هم موازی قاعده‌های دوزنقه است می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\left. \begin{array}{l} OH \parallel AA' \parallel BB' \\ AO = OB \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'H = HB' \\ OH = \frac{AA' + BB'}{۲} \end{array} \right.$$

$$AA' + BB' = ۲OH \Rightarrow AA' + BB' = R$$

بنابراین:

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

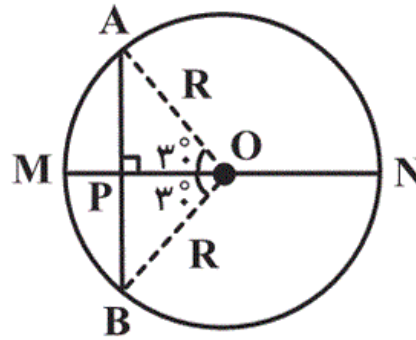
۴

۳

۲✓

۱

کوتاه‌ترین وترى از دایره که از نقطه P می‌گذرد، وترى است که در آن نقطه بر قطر دایره عمود باشد. با رسم وتر AB داریم:



$$\left. \begin{array}{l} OP = \frac{\sqrt{3}}{2} R \\ OA = R \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{OAP} = \hat{OBP} = 60^\circ$$

در نتیجه:

$$\hat{AOP} = \hat{BOP} = 30^\circ \Rightarrow \hat{AOB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ANB} = 300^\circ$$

طول کمان در دایره با اندازه زاویه مرکزی مقابل آن متناسب است.

$$\frac{\widehat{AMB} \text{ طول}}{\widehat{ANB} \text{ طول}} = \frac{60^\circ}{300^\circ} = \frac{1}{5}$$

بنابراین داریم:

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

۴

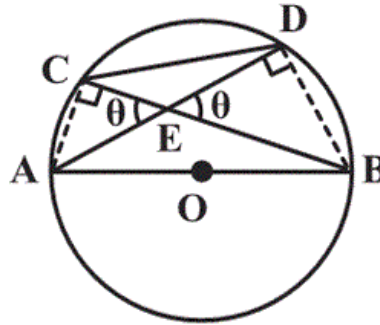
۳

۲

۱ ✓

با وصل نمودن A به C و B به D می‌توان نتیجه گرفت که زوایای

مخاطی ACB و ADB برابر 90° می‌باشند. حال داریم:



$$\Delta_{ACE} : \frac{CE}{EA} = \cos \theta$$

$$\Delta_{BDE} : \frac{ED}{EB} = \cos \theta$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$\frac{S_{\Delta_{CED}}}{S_{\Delta_{AEB}}} = \frac{\frac{1}{2} \times CE \cdot ED \cdot \sin(180^\circ - \theta)}{\frac{1}{2} \times EA \cdot EB \cdot \sin(180^\circ - \theta)} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{EA} \times \frac{ED}{EB} = \cos^2 \theta = \frac{3}{4} \xrightarrow{0 < \theta < 90^\circ} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

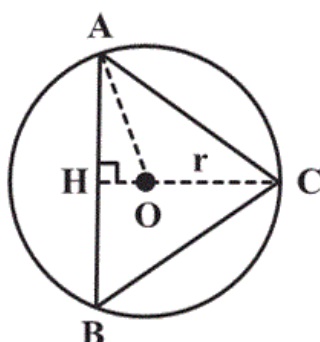
۴

۳

۲

۱ ✓

می‌دانیم برای آن که مساحت مثلث ABC ، حداکثر مقدار ممکن شود، با توجه به ثابت بودن طول AB ، باید ارتفاع وارد از رأس C به این ضلع حداکثر مقدار ممکن شود. در نتیجه ارتفاع CH باید روی عمود منصف پاره خط AB ، یعنی در راستای قطر عمود بر AB باشد.



حال از آن جایی که ارتفاع CH ، وتر AB را نصف می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت مثلث ABC متساوی الساقین است ($CA = CB$)، پس داریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2} = 32 \xrightarrow{AB=8} CH = 8 \Rightarrow OH = 8 - r \quad (*)$$

$$\Delta OHA : OH^2 + AH^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (8 - r)^2 + 4^2 = r^2 \Rightarrow 64 - 16r + r^2 + 16 = r^2$$

$$\Rightarrow 16r = 80 \Rightarrow 2r = 10$$

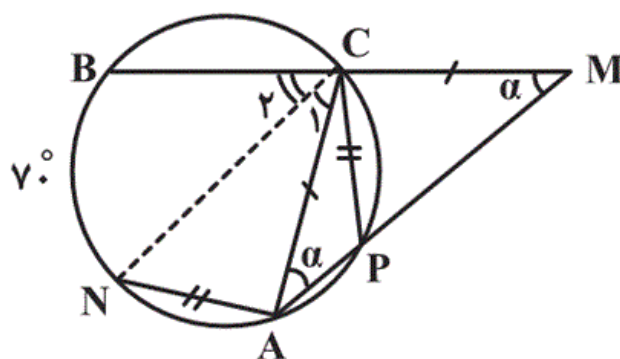
(هندسه ۲ - صفحه ۱۳)

۴

۳

۲

۱ ✓



$$CP = AN \Rightarrow \widehat{CP} = \widehat{AN}$$

اگر $\hat{A} = \hat{M} = \alpha$ فرض شود، آن گاه داریم:

$$\widehat{CP} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{AN} = 2\alpha \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{CAP} = \alpha \quad (*)$$

از طرفی در مثلث MCA داریم:

$$\widehat{BCA} = \widehat{CAM} + \widehat{CMA} = 2\alpha \quad (\text{زاویه خارجی})$$

$$\Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 2\alpha \xrightarrow{(*)} \hat{C}_2 = \hat{C}_1 = \alpha$$

$$\hat{C}_2 = \frac{\widehat{BN}}{2} = 35^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ \Rightarrow \hat{M} = 35^\circ, \quad \widehat{MCA} = 110^\circ$$

بنابراین اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث MCA برابر

$$110^\circ - 35^\circ = 75^\circ \quad \text{است با:}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

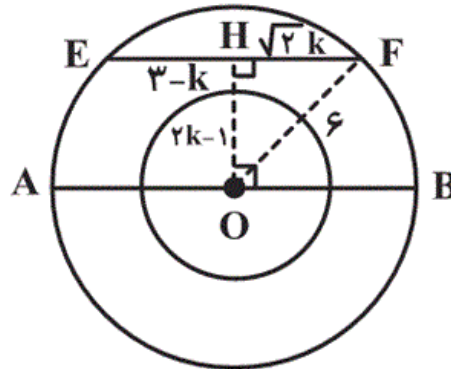
۴

۳ ✓

۲

۱

از نقطه O، عمود OH را بر وتر EF رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس $HF = \sqrt{2}k$ است. از طرفی داریم:

$$OH = (2k - 1) + (3 - k) = k + 2$$


$$\Delta_{OHF} : OH^2 + HF^2 = OF^2 \Rightarrow (k+2)^2 + 2k^2 = 36$$

$$\Rightarrow 3k^2 + 4k - 32 = 0 \Rightarrow (3k - 8)(k + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -4 & \text{غ ق} \\ k = \frac{8}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۴

۳✓

۲

۱

در حالت اول جمله اول را a_1 و قدرنسبت را d در نظر می‌گیریم. مجموع ۱۰ جمله اول برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = 5(2a_1 + 9d)$$

در حالت دوم جمله اول را $a_1 + 2$ و قدرنسبت را $d - k$ در نظر می‌گیریم. مجموع ۱۰ جمله اول در این حالت برابر است با:

$$S'_{10} = 5(2(a_1 + 2) + 9(d - k)) = 5(2a_1 + 9d + 4 - 9k)$$

برای آن که $S_{10} = S'_{10}$ باشد، باید داشته باشیم: $4 - 9k = 0 \Rightarrow k = \frac{4}{9}$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳✓

۲

۱

فرض می‌کنیم: $B = 1 + x + x^2 + \dots + x^8$ باشد، بنابراین B مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول (۱) و قدر نسبت x می‌باشد و در

نتیجه $B = \frac{(1-x^9)}{1-x}$ است. هم‌چنین اگر $C = 1 - x + x^2 - \dots + x^8$ مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول (۱) را فرض کنیم،

و قدر نسبت $(-x)$ و در نتیجه $C = \frac{1(1-(-x)^9)}{1+ x} = \frac{1+x^9}{1+x}$ است.

$$\Rightarrow A = BC = \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)\left(\frac{1+x^9}{1+x}\right) = \frac{1-x^{18}}{1-x^2} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} A = 511$$

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳

۲✓

۱

باید شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد، بنابراین جمع کاهش شدت تابش‌ها باید بزرگتر یا مساوی ۹۹ درصد شدت تابش اولیه باشد بنابراین خواهیم داشت: (فرض کنیم شدت تابش اولیه A باشد)

$$\frac{A}{2} + \frac{A}{2^2} + \frac{A}{2^3} + \dots + \frac{A}{2^n} \geq \frac{99}{100} A$$

$$\xrightarrow{\div A} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}$$

سمت چپ نامساوی فوق یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$

است که مجموع آن از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow 100 \leq 2^n \Rightarrow n \geq 7 \Rightarrow \min(n) = 7$$

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳✓

۲

۱

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x^2 + a^2x + 1 = a(x + 2) \Rightarrow x^2 + (a^2 - a)x + 1 - 2a = 0$$

برای آنکه معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی قرینه داشته باشد باید $\Delta > 0$ و $S = 0$ باشد، بنابراین:

$$S = 0 \Rightarrow \frac{-(a^2 - a)}{1} = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, 1$$

$$\Delta = (a^2 - a)^2 - 4(1 - 2a)$$

به ازای $a = 0$ ، دلتا برابر با -4 و به ازای $a = 1$ دلتا برابر با 4 خواهد شد، بنابراین فقط $a = 1$ قابل قبول است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

سهمی بر محور x ها مماس است، بنابراین معادله درجه دوم آن ریشه مضاعف دارد:

$$y = 0 \Rightarrow 2x^2 + bx + 6 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4(2)(6) = 0 \Rightarrow b^2 = 48$$

$$\Rightarrow b = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$

سهمی بر قسمت منفی محور x ها مماس است، پس طول رأس آن منفی است و داریم:

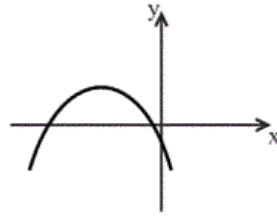
$$x = \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a=2>0} b > 0 \Rightarrow b = 4\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4\sqrt{3}}{2 \times 2} = -\sqrt{3} \quad \text{و معادله محور تقارن برابر است با:}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

نمودار سهمی فقط از ناحیه اول و مبدأ نمی‌گذرد، بنابراین شکل تقریبی سهمی به صورت مقابل است:



پس باید معادله $f(x) = 0$ دو ریشه منفی داشته باشد، بنابراین باید $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(-m)(m-1) > 0 \Rightarrow 4 + 4m^2 - 4m > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^2 - m + 1}_{\Delta < 0} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

همچنین در معادله $-mx^2 + 2x + m - 1 = 0$ باید مجموع ریشه‌ها منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت باشد:

$$\begin{cases} S < 0 \Rightarrow \frac{2}{m} < 0 \Rightarrow m < 0 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{-m} > 0 \Rightarrow 0 < m < 1 \end{cases}$$

اشتراک شرط‌های بالا، تهی است، بنابراین مقداری برای m به دست نمی‌آید.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

 ✓

۳

۲

۱

توجه می‌کنیم که $x \neq 2$ و $x \neq -2$ ، زیرا ریشه‌های مخرج هستند. با ضرب طرفین معادله در ک.م.م مخرج‌ها $((x-2)(x+2))$ داریم:

$$(x-2)^2 + x(x+2) = 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 4 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

$x = 2$ قابل قبول نیست، پس معادله فقط یک ریشه دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

 ✓

۱

ابتدا محاسبه می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

$$\text{کیلوگرم رنگ خالص} = 7/2 = 4 \times 70\% + 11 \times 40\% = 7/2$$

بنابراین در $15 = 11 + 4$ کیلوگرم رنگ موجود، $7/2$ کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد، اگر x میزان تبخیر باشد، آنگاه:

$$\frac{7/2}{15-x} = 50\% = \frac{50}{100}$$

$$\Rightarrow 720 = 750 - 50x \Rightarrow x = 0.6 \text{ کیلوگرم}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳✓

۲

۱

$$\Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4(1)(3) = 36 - 12 = 24$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{24}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \times 6}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{6} \\ x_2 = 3 - \sqrt{6} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$x = 3 - \sqrt{6}$ غیر قابل قبول است، زیرا در معادله اولیه صدق نمی‌کند و سمت راست تساوی به ازای آن منفی می‌شود. به ازای $x = 3 + \sqrt{6}$ دو طرف معادله برابر و مثبت خواهند بود.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳✓

۲

۱

فرض کنیم $x^2 + 4x + 3 = t \geq 0$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 3 + 2} \rightarrow t = \sqrt{t+2}$$

طرفین معادله را با شرط $t \geq 0$ ، به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ غ ق ق} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 1 = 0 \\ x^2 + 4x + 3 = 2 \end{cases}$$

در این معادله، $\Delta = 4^2 - 4 = 12 > 0$ و معادله ۲ جواب حقیقی دارد. بنابراین:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 \text{ حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳ و ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲✓

۱

گزاره $(\sim p) \sim$ هم‌ارز منطقی با گزاره p است، بنابراین گزاره p نادرست است. یک ترکیب فصلی در صورتی دارای ارزش درست است که ارزش حداقل یکی از گزاره‌های سازنده آن درست باشد، بنابراین با توجه به نادرستی گزاره p ، برای درست بودن ارزش گزاره $p \vee \sim q$ ، لازم است $\sim q$ درست و در نتیجه q نادرست باشد. داریم:

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \equiv (F \wedge F) \vee (T \wedge r) \equiv F \vee r \equiv r$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶ تا ۹)

۴

۳

۲

۱✓

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \sim q$
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها در صورتی که هر دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \sim q$ درست باشند، گزاره p قطعاً نادرست است ولی گزاره q می‌تواند درست یا نادرست باشد. در این صورت گزاره $p \wedge q$ نیز قطعاً نادرست و در نتیجه ترکیب دو شرطی $F \Leftrightarrow (q \wedge p)$ حتماً درست است. در سایر گزاره‌ها در مورد درستی یا نادرستی گزاره سمت چپ ترکیب دو شرطی نمی‌توان به‌طور دقیق قضاوت کرد. (آمار و احتمال - صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۴

۳✓

۲

۱

یک ترکیب شرطی زمانی نادرست است که مقدم آن درست و تالی آن نادرست باشد. بنابراین گزاره $\sim (p \vee q)$ درست و گزاره r نادرست است. اگر $\sim (p \vee q)$ درست باشد، آن‌گاه $p \vee q$ نادرست است. یک ترکیب فصلی تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره سازنده آن نادرست باشند، بنابراین گزاره‌های p و q هر دو نادرست هستند.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱✓

اگر گزاره‌های p و q را به ترتیب به صورت « n^2 مضرب ۷ است.» و « n مضرب ۷ است.» تعریف کنیم، آن‌گاه با توجه به آن‌که عکس نقیض ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ به صورت $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ است، حکم به صورت $\sim p$ یعنی « n^2 مضرب ۷ نیست.» خواهد بود. (آمار و احتمال - صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۴

۳

۲✓

۱

نقیض سور عمومی به صورت سور وجودی نوشته می شود و نقیض ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ به صورت $(p \wedge \sim q)$ می باشد، بنابراین نقیض گزاره «برای هر عدد طبیعی n ، اگر n عدد اول باشد، آن گاه $n = 6k \pm 1$ است» به صورت «عددی طبیعی مانند n وجود دارد که n عدد اول است و $n \neq 6k \pm 1$ است» خواهد بود. (آمار و احتمال - صفحه های ۱۵ و ۱۶)

۴

۳

۲✓

۱

می دانیم اگر $a = 0$ باشد، آن گاه $ab = 0$ خواهد بود، یعنی گزاره شرطی $p \Rightarrow r$ درست است. از طرفی عکس نقیض هر گزاره شرطی هم ارز با آن گزاره است، بنابراین گزاره $\sim p \Rightarrow \sim r$ نیز درست است. حال سایر گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه «۱»: $r \Rightarrow q \equiv (ab = 0) \Rightarrow (a + b = 0)$

مثال نقض: اگر $a = 1$ و $b = 0$ باشد، این گزاره نادرست است.

گزینه «۲»: $\sim p \Rightarrow \sim r \equiv (a \neq 0) \Rightarrow (ab \neq 0)$

مثال نقض: اگر $a = 1$ و $b = 0$ باشد، این گزاره نادرست است.

۴

۳✓

۲

۱

گزینه «۱»: به ازای هر $x \in \mathbb{N}$ ، $x^3 \geq x$ است، بنابراین گزاره سوری نادرست است.

گزینه «۲»: دامنه تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ به صورت $\mathbb{R} - \{0\}$ است، پس به ازای $x = 0$ ، رابطه داده شده صحیح نیست و در نتیجه گزاره سوری نادرست است.

گزینه «۳»: اگر $x = 1$ باشد، آن گاه $1^2 = 8(0) + 1$ است، پس گزاره سوری درست است.

گزینه «۴»: اگر $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) باشد، $\cot x$ و در صورتی

که $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد، $\tan x$ تعریف نشده است، پس گزاره سوری

نادرست است. (آمار و احتمال - صفحه های ۱۳ تا ۱۵)

۴

۳✓

۲

۱

گزینه «۱» نادرست است، به عنوان مثال نقض، اگر $x = 3$ باشد، آن گاه تنها به ازای $y = -1$ ، رابطه $x + y = 2$ برقرار است ولی $1 \notin \mathbb{N}$.

گزینه «۲» نادرست است، زیرا اگر $x = 0$ باشد، $\frac{1}{x}$ تعریف شده نیست.

گزینه «۳» درست است، زیرا به ازای هر عدد طبیعی x ، عدد $x + 1$ بزرگ‌تر از آن است و در نتیجه عددی مانند $y \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $x < y$.

گزینه «۴» نادرست است، زیرا اگر $x = 0$ باشد، آن گاه $x^2 = 0$ است. (آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴

۳✓

۲

۱

دامنه متغیر گزاره‌نما برابر $(0, +\infty)$ است. گزاره‌نما به ازای $x \geq 25$ به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود زیرا مقدم نادرست و ترکیب شرطی به انتقای مقدم درست است. اما گزاره‌نما به ازای مقادیر $9 \leq x < 25$ به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود زیرا مقدم درست و تالی نادرست می‌باشد. همچنین گزاره‌نما به ازای مقادیر $0 \leq x < 9$ به یک گزاره درست تبدیل می‌شود زیرا مقدم و تالی هر دو درست می‌باشند. پس $S = [0, 9) \cup [25, +\infty)$ است. (آمار و احتمال - صفحه‌های ۵ تا ۱۱)

۴✓

۳

۲

۱

گزینه «۱» صورت کسر تنها به ازای $x = 1$ ، برابر صفر می‌شود ولی به ازای همین مقدار، مخرج کسر نیز صفر می‌گردد، پس $x = 1$ به دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sin \pi x}$ تعلق ندارد و در نتیجه گزاره سوری نادرست است.

گزینه «۲» حاصل ضرب یک عدد گویای غیر صفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ هم عددی گنگ است. $\sqrt{2}x$ عددی گنگ و y عددی گویاست، در نتیجه حاصل جمع آن‌ها عددی گنگ است، پس گزاره سوری نادرست است.

گزینه «۳» $x^2 + y^2 - xy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = -xy$

$\Rightarrow (x - y)^2 = -xy$

سمت چپ تساوی همواره عددی بزرگ‌تر یا مساوی صفر و سمت راست تساوی همواره عددی کوچک‌تر از صفر است، پس این تساوی هیچ گاه برقرار نیست و در نتیجه گزاره سوری نادرست است.

گزینه «۴» $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow |x + \frac{1}{x}| \geq 2$

بنابراین گزاره سوری درست است. (آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴✓

۳

۲

۱

در حالت اول جمله اول را a_1 و قدرنسبت را d در نظر می‌گیریم. مجموع ۱۰ جمله اول برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = 5(2a_1 + 9d)$$

در حالت دوم جمله اول را $a_1 + 2$ و قدرنسبت را $d - k$ در نظر می‌گیریم. مجموع ۱۰ جمله اول در این حالت برابر است با:

$$S'_{10} = 5(2(a_1 + 2) + 9(d - k)) = 5(2a_1 + 9d + 4 - 9k)$$

برای آن که $S_{10} = S'_{10}$ باشد، باید داشته باشیم: $4 - 9k = 0 \Rightarrow k = \frac{4}{9}$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳✓

۲

۱

اگر در این دنباله جمله اول را a_1 و قدرنسبت را d بگیریم، آنگاه:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135 \quad (1) \\ a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135 \quad (1) \\ a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150 \quad (2) \end{array} \right.$$

مجموع جملات ردیف فرد را با S و مجموع جملات ردیف زوج را با S' نمایش می‌دهیم، در هر یک از معادلات (۱) و (۲)، قدرنسبت $(2d)$ است و تعداد جملات هر یک از آنها ۱۰ تا است، پس:

$$S = \frac{10}{2}(2a_1 + (10-1)(2d)) = 135 \quad (1)$$

$$S' = \frac{10}{2}(2a_2 + (10-1)(2d)) = 150 \quad (2)$$

بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_1 + 18d = 27 \\ 2a_2 + 18d = 30 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2(a_2 - a_1) = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

با قرار دادن $d = \frac{3}{2}$ در رابطه $2a_1 + 18d = 27$ ، a_1 را می‌یابیم:

$$2a_1 + 18\left(\frac{3}{2}\right) = 27 \Rightarrow a_1 = 0$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱✓

فرض می‌کنیم: $B = 1 + x + x^2 + \dots + x^8$ باشد، بنابراین B مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول (۱) و قدر نسبت x می‌باشد و در

نتیجه $B = \frac{(1-x^9)}{1-x}$ است. هم‌چنین اگر $C = 1 - x + x^2 - \dots + x^8$

را فرض کنیم، C مجموع ۹ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول (۱)

و قدر نسبت $(-x)$ و در نتیجه $C = \frac{1(1-(-x)^9)}{1+ x} = \frac{1+x^9}{1+x}$ است.

$$\Rightarrow A = BC = \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)\left(\frac{1+x^9}{1+x}\right) = \frac{1-x^{18}}{1-x^2} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} A = 511$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴

۳

۲✓

۱

باید شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد، بنابراین جمع کاهش شدت تابش‌ها باید بزرگتر یا مساوی ۹۹ درصد شدت تابش اولیه باشد بنابراین خواهیم داشت: (فرض کنیم شدت تابش اولیه A باشد)

$$\frac{A}{2} + \frac{A}{2^2} + \frac{A}{2^3} + \dots + \frac{A}{2^n} \geq \frac{99}{100} A$$

$$\xrightarrow{\div A} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}$$

سمت چپ نامساوی فوق یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$

است که مجموع آن از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} \geq \left(\frac{1}{2} \right)^n \Rightarrow 100 \leq 2^n \Rightarrow n \geq 7 \Rightarrow \min(n) = 7$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۳ تا ۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله و $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین ریشه‌ها باشد،
آنگاه:

$$x_1 x_2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow \frac{m^2 - 3}{m} = 2 \Rightarrow m^2 - 3 = 2m$$

$$m^2 - 2m - 3 = (m - 3)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 3, m = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ریشه حقیقی ندارد.} \\ m = 3 : 3x^2 - 5x + 6 = 0 \\ m = -1 : -x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \end{array} \right.$$

فقط $m = -1$ قابل قبول است.

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۴ تا ۱۳)

۴

۳

۲✓

۱

برای آنکه معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی قرینه داشته باشد
باید $\Delta > 0$ و $S = 0$ باشد، بنابراین:

$$S = 0 \Rightarrow \frac{-(a^2 - a)}{1} = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, 1$$

$$\Delta = (a^2 - a)^2 - 4(1 - 2a)$$

به ازای $a = 0$ ، دلتا برابر با -4 و به ازای $a = 1$ دلتا برابر با 4 خواهد شد،
بنابراین فقط $a = 1$ قابل قبول است.

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱✓

با فرض $x^2 = t$ ، معادله داده شده را به صورت معادله درجه دوم بر حسب t می نویسیم (تغییر متغیر):

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} at^2 + bt + c = 0$$

حالت های زیر را در نظر می گیریم:

$$۱) \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \xrightarrow{t_1 > 0, t_2 > 0} x = \pm\sqrt{t_1}, x = \pm\sqrt{t_2}$$

چهار ریشه حقیقی دارد.

$$۲) \begin{cases} c = 0 \\ a.b < 0 \end{cases} \xrightarrow{t_1 = 0, t_2 > 0} x = 0, x = \pm\sqrt{t_2}$$

فقط سه ریشه متمایز حقیقی دارد.

$$۳) \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \xrightarrow{t_1 = 0} x = 0$$

فقط یک ریشه متمایز حقیقی دارد.

$$۴) \begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases} \xrightarrow{t_1 > 0, t_2 < 0} x = \pm\sqrt{t_1}$$

فقط دو ریشه مختلف علامت دارد.

$$۵) \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \xrightarrow{t_1 > 0} x = \pm\sqrt{t_1}$$

فقط دو ریشه مختلف علامت دارد.

پس در هیچ حالتی، معادله دو ریشه حقیقی هم علامت ندارد.

(مسابقه ۱- صفحه های ۷ تا ۱۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

سهمی بر قسمت منفی محور x ها مماس است، پس طول رأس آن منفی است و داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a=2>0} b > 0 \Rightarrow b = 4\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4\sqrt{3}}{2 \times 2} = -\sqrt{3}$$

و معادله محور تقارن برابر است با:

(مسابقه ۱- صفحه های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

تابع می نیمم دار است، بنابراین $a > 0$ است. از طرفی عرض از مبدأ آن منفی است، در نتیجه $f(0) = c < 0$. همچنین طول رأس آن مثبت است،

یعنی $x = \frac{-b}{2a} > 0$:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

بنابراین $a > 0$ ، $b < 0$ و $c < 0$ و همواره: $c + b < 0$

(مسایان ۱- صفحه های ۷ تا ۱۳)

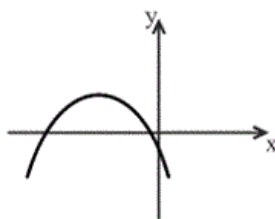
۴ ✓

۳

۲

۱

نمودار سهمی فقط از ناحیه اول و مبدأ نمی‌گذرد، بنابراین شکل تقریبی سهمی به صورت مقابل است:



پس باید معادله $f(x) = 0$ دو ریشه منفی داشته باشد، بنابراین باید $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(-m)(m-1) > 0 \Rightarrow 4 + 4m^2 - 4m > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^2 - m + 1}_{\Delta < 0} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

همچنین در معادله $-mx^2 + 2x + m - 1 = 0$ باید مجموع ریشه‌ها منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت باشد:

$$\begin{cases} S < 0 \Rightarrow \frac{2}{m} < 0 \Rightarrow m < 0 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{-m} > 0 \Rightarrow 0 < m < 1 \end{cases}$$

اشتراک شرط‌های بالا، تهی است، بنابراین مقداری برای m به دست نمی‌آید.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴ ✓

۳

۲

۱