۸۱- کدام رابطه صحیح است؟ (زاویه‌ها بر حسب رادیان‌اند.)

۱) $\sin ۲ < \cos ۳$

۲) $\tan ۱ < \cot ۱$

۳) $\tan ۴ > \cot ۵$

۴) $\cos ۱ > \sin ۱$

۸۲- دوچرخه‌سواری در حال رکاب‌زنی در پیستی دایره‌ای‌شکل به شعاع ۱۰۰m می‌باشد. وقتی چرخ جلو به شعاع $۰/۴\text{m}$، نیم‌دور کامل می‌زند، چرخ عقب به اندازهٔ $\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان می‌چرخد. در صورتی که دوچرخه‌سوار $۰/۴۸$ محیط پیست را طی کند، چرخ عقب چند دور کامل خواهد چرخید؟

۱) ۹۶

۲) ۱۹۲

۳) ۹۲

۴) ۱۸۴

۸۳- اگر $\sin^۲ \alpha + \sin^۲\left(\frac{\pi}{۲} - \beta\right) = ۱$ باشد، در حالت کلی کدام رابطه بین α و β می‌تواند برقرار باشد؟

۱) $\beta = \alpha - \frac{\pi}{۳}$

۲) $\alpha = \beta - \frac{۳\pi}{۴}$

۳) $\beta = \alpha + \frac{۵\pi}{۶}$

۴) $\beta = \alpha + ۳\pi$

۸۴- حاصل عبارت $A = \tan\frac{\pi}{۲۰} \tan\frac{۳\pi}{۲۰} \tan\frac{۵\pi}{۲۰} \tan\frac{۷\pi}{۲۰} \tan\frac{۹\pi}{۲۰}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۲

۴) ۲-

۸۵- با توجه به تساوی $\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-2\sin(\alpha-3\pi)}{3\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=2$ ، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

۸۶- کم‌ترین مقدار تابع $y=\sin^2 x-\cos^2 x-3\sin x$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲- ۳) $-\frac{17}{8}$ ۴) $-\frac{17}{4}$

۸۷- اگر $\dfrac{\sin x-\sin 2x}{\cos x+\cos 2x}=\dfrac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۸۸- اگر $5\sin 6x\cos 2x=4-5\sin 2x\cos 6x$ باشد، مقدار $\sin 4x$ کدام است؟ $\left(0<x<\frac{\pi}{16}\right)$

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$

۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۸۹- اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ، $\cos\beta=\frac{1}{5}$ ، $\frac{\pi}{2}<\alpha<2\pi$ و $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ باشد، مقدار $25\cos(\alpha+\beta)+4$ کدام است؟

۱) $6\sqrt{6}$ ۲) $-6\sqrt{6}$

۳) $6\sqrt{6}+8$ ۴) $-6\sqrt{6}+8$

۹۰- حاصل عبارت $\sin 20^\circ\left(\tan 40^\circ+\tan 50^\circ\right)$ کدام است؟

۱) $2\sin 10^\circ$ ۲) $2\cos 10^\circ$

۳) $4\sin 10^\circ$ ۴) $4\cos 10^\circ$

۱۱۱- اگر نقاط A' و A'' مجانس‌های نقطهٔ A نسبت به مرکز O و به ترتیب با نسبت‌های تجانس k_1 و k_2 باشند، آنگاه A' با چه نسبتی می‌تواند مجانس A'' نسبت به مرکز O باشد؟

۱) $\frac{k_1}{k_2}$
۲) $\frac{k_2}{k_1}$
۳) k_1k_2
۴) A' هیچ‌گاه مجانس A'' نیست.

۱۱۲- کدام یک از گزینه‌های زیر، لزوماً برقرار نیست؟

۱) تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.
۲) تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.
۳) تجانس، طولپا است.
۴) نسبت تجانس، عددی حقیقی و غیر صفر است.

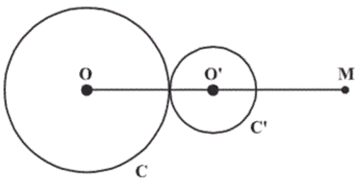
۱۱۳- اگر نقاط M، N و P، وسط‌های اضلاع مثلث دلخواه ABC باشند، آنگاه مثلث MNP، مجانس مثلث ABC به کدام مرکز تجانس است؟

۱) محل همرسی میانه‌های مثلث ABC
۲) محل همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC
۳) محل همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC
۴) محل همرسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث ABC

۱۱۴- مستطیل $ABCD$ مفروض است. اگر تحت یک تجانس، نقاط A و B به‌ترتیب بر نقاط C و D تصویر شوند، آنگاه نسبت این تجانس کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۱۵- در شکل زیر، دو دایرهٔ $C(O,۵)$ و $C'(O',۲)$ نسبت به نقطهٔ M، مجانس یکدیگرند. طول MO' کدام است؟

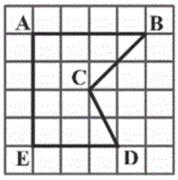


۱) $\frac{۷}{۳}$
۲) ۳
۳) ۵
۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۱۱۶- یک تجانس غیر همانی، چند نقطهٔ ثابت تبدیل دارد؟

۱) هیچ
۲) یک
۳) دو
۴) بی‌شمار

۱۱۷- در شکل مقابل، اگر بخواهیم مساحت چندضلعی شبکه‌ای ABCDE را بدون تغییر تعداد اضلاع و محیط آن، با تبدیل هندسی مناسب تا حد امکان افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت چقدر خواهد بود؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

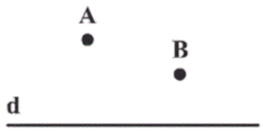
۱۱۸- مطابق شکل، دو شهر A و B به فاصلهٔ ۱۰ کیلومتر از هم و هر کدام به فاصلهٔ ۳ کیلومتر از ساحل دریا مفروض‌اند. اگر بخواهیم جاده‌ای با کوتاه‌ترین طول ممکن بین دو شهر احداث کنیم به گونه‌ای که ۲ کیلومتر از جاده از کنار ساحل بگذرد، آنگاه طول جادهٔ بین A و B، چند کیلومتر خواهد بود؟

۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۱۱۹- دو نقطهٔ A و B در دو طرف خط L و به فواصل متفاوت از آن قرار دارند. اگر بخواهیم نقطه‌ای مانند M روی خط L چنان بیابیم که $|MA - MB|$ بیشترین مقدار ممکن باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) تجانس
۲) دوران
۳) انتقال
۴) بازتاب

۱۲۰- در شکل زیر، نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸/۵ واحد از خط d و ۸ واحد از نقطهٔ B مفروض است. نقطهٔ M را روی خط d چنان انتخاب می‌کنیم که $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد، اگر این مقدار مینیمم برابر ۱۵ باشد، آنگاه طول MA کدام است؟



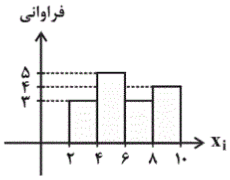
۱) $\frac{۱۶۱}{۳۰}$
۲) $\frac{۲۸۹}{۳۰}$
۳) $\frac{۲۷}{۵}$
۴) $\frac{۴۸}{۵}$

آمار و احتمال ، آمار توصیفي

۱۳۱- نمودار میله‌ای، بافت‌نگاشت و دایره‌ای، به‌ترتیب برای کدام‌یک از انواع داده‌ها مناسب‌اند؟

۱) کمّی پیوسته و کیفی ـ کمّی گسسته ـ کمّی پیوسته
۲) کمّی پیوسته و کیفی ـ کمّی گسسته ـ کمّی گسسته و کیفی
۳) کمّی گسسته و کیفی ـ کمّی پیوسته ـ کمّی پیوسته
۴) کمّی گسسته و کیفی ـ کمّی پیوسته ـ کمّی گسسته و کیفی

۱۳۲- شکل مقابل نمودار بافت‌نگاشت تعدادی داده در چهار دسته است. در نمودار دایره‌ای این داده‌ها، زاویهٔ متناظر با دستهٔ آخر چند درجه است؟



۱) ۹۶
۲) ۶۰
۳) ۸۴
۴) ۷۲

۱۳۳- ۶۰ داده در تعدادی دسته قرار گرفته‌اند به گونه‌ای که فراوانی دسته‌های اول تا سوم به‌ترتیب x، $x+1$ و $x-3$ و زاویهٔ متناظر با دستهٔ دوم در نمودار دایره‌ای برابر ۶۰° است. زاویهٔ متناظر با دستهٔ سوم در نمودار دایره‌ای کدام است؟

۱) ۳۰°
۲) ۳۶°
۳) ۴۰°
۴) ۴۵°

۱۳۴- اگر میانگین داده‌های جدول مقابل ۲۴/۲۴ باشد، x کدام است؟

x_i	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
f_i	۳	۲	x	۶	۲

۱) ۷ ۲) ۲ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

۱۳۵- مجموع هفت عدد متوالی برابر ۱۴۷ است. میانگین این اعداد، چقدر از میانهٔ آنها بیشتر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۶- در جدول داده‌های مقابل، میانه و مد به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

x_i	۷	۸	۱۲	۱۴	۱۷	۲۰
f_i	۵	۱	۵	۲	۷	۳

۱) ۱۷,۱۳ ۲) ۷,۱۳ ۳) ۷,۱۴ ۴) ۱۷,۱۴

۱۳۷- کدام یک از شاخص‌های آماری زیر در میان داده‌های ۵ / ۱,۱/۵,۲,۲ و داده‌های ۵ / ۱۱۱,۱۱۱/۵,۱۱۲,۱۱۲ برابر است؟

۱) میانگین ۲) میانه ۳) انحراف معیار ۴) ضریب تغییرات

۱۳۸- در ۲۵ دادهٔ آماری، میانگین و انحراف معیار به‌ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آنها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده تقریباً کدام است؟

۱) ۱۴/۷۲ ۲) ۱۴/۸۱ ۳) ۱۵/۳۳ ۴) ۱۶/۶۶

۱۳۹- اگر انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ برابر ۲ و ضریب تغییرات آنها برابر c باشد، ضریب تغییرات داده‌های $5x_1 + 2, \cdots, 5x_n + 2$ کدام است؟

۱) $\frac{5c}{5+c}$ ۲) $\frac{5+c}{5c}$ ۳) $\frac{5c}{5+2c}$ ۴) $\frac{5+2c}{5c}$

۱۴۰- در نمایش داده‌های ۱۱,۱۴,۱۲,۱۹,۱۶,۱۷,۱۲,۱۵,۱۳,۱۹,۱۶,۱۷,۱۰,۱۴,۱۵ با نمودار جعبه‌ای، دامنهٔ تغییرات داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

هندسه ۲ - گواه ، تبديل هاي هندسي و كاربردها -

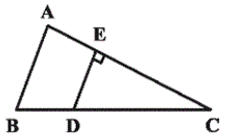
۱۲۱- مربع ABCD را با تجانسی که مرکز آن محل تلاقی قطرها و نسبت آن $\frac{2}{3}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش برابر ۵ باشد، محیط مربع ABCD کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۱۲۲- در مثلث ABC، میانه‌های AA'، BB' و CC' را به اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ طول آن‌ها از طرف نقاط A'، B' و C' به ترتیب تا نقاط A''، B'' و C'' امتداد می‌دهیم. اگر مثلث $A''B''C''$ مجانس مثلث ABC باشد، نسبت تجانس کدام است؟

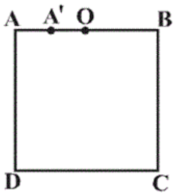
۱) $k=-۱$
۲) $k=-۴$
۳) $k=-\frac{۳}{۲}$
۴) $k=-۳$

۱۲۳- در مثلث ABC، $DE \parallel AB$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ است. اگر B مرکز و k نسبت تجانس باشد، اندازهٔ زاویهٔ بین مجانس‌های DC و EC کدام است؟



۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) ۶۰°
۴) ۱۵°

۱۲۴- در شکل زیر، طول ضلع مربع $\sqrt{۵}$ و $OA' = AA' = \frac{AB}{۴}$ است. اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در یک تجانس به مرکز O باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از تصویر خود در این تجانس برابر با کدام است؟

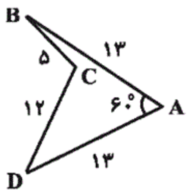


۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۲۵- تصویر مربع $ABCD$ در تجانسی که نسبت آن برابر $\frac{۱}{۲}$ و مرکز آن، محل تلاقی قطرهای مربع باشد، کدام شکل زیر است؟

۱) یک لوزی است درون مربع $ABCD$
۲) یک لوزی است خارج مربع $ABCD$
۳) یک مربع است خارج مربع $ABCD$
۴) یک مربع است درون مربع $ABCD$

۱۲۶- می‌خواهیم با تبدیل هندسی مناسب و با ثابت نگه داشتن محیط و تعداد اضلاع، مساحت چهارضلعی زیر را تا حد امکان افزایش دهیم. مساحت شکل جدید چند واحد مربع بیشتر از شکل اولیه است؟

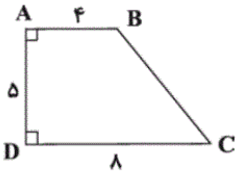


۱) ۳۶
۲) ۶۰
۳) ۷۲
۴) ۱۲۰

۱۲۷- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC = ۱۰)$، طول ارتفاع وارد بر قاعده برابر با ۸ واحد است. اگر M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AB و AC باشد و P و Q را به فاصلهٔ ۱ واحد از هم روی BC اختیار کنیم تا چهارضلعی $MNPQ$ ایجاد شود، کم‌ترین مقدار محیط این چهارضلعی کدام است؟

۱) $۴+\sqrt{۸۹}$
۲) $۴+۲\sqrt{۸۹}$
۳) $۷+\sqrt{۸۹}$
۴) $۷+۲\sqrt{۸۹}$

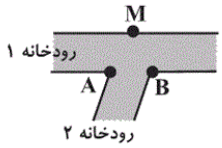
۱۲۸- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، اگر M نقطهٔ دلخواهی از ساق قائم باشد، کمترین مقدار $MB+MC$ کدام است ؟



۱) ۱۲/۵ ۲) ۱۳

۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۴

۱۲۹- در شکل زیر، می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها سه اسکله بسازیم. موقعیت دو اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اگر اسکلهٔ M را در جایی از ساحل بسازیم که مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد، با کدام تبدیل، همواره می‌توان این کار را انجام داد؟



۱) انتقال ۲) بازتاب ۳) دوران ۴) تجانس

۱۳۰- از بین مثلث‌هایی که در ضلع $AB=۱۶$ مشترک‌اند و مساحت آنها ۴۸ می‌باشد، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۸۱- (یاسین سپهر)

می‌دانیم ۱ رادیان تقریباً برابر با ۵۷ درجه است. بنابراین داریم:

$$\sin ۲ \simeq \sin ۱۱۴^\circ > ۰, \cos ۳ \simeq \cos ۱۷۱^\circ < ۰ \Rightarrow \sin ۲ > \cos ۳$$

$$\tan ۱ > \tan ۴۵^\circ = ۱, \cot ۱ < \cot ۴۵^\circ = ۱ \Rightarrow \tan ۱ > \cot ۱$$

$$\tan ۴ \simeq \tan ۲۲۸^\circ > ۰, \cot ۵ \simeq \cot ۲۸۵^\circ < ۰ \Rightarrow \tan ۴ > \cot ۵$$

$$\cos ۱ < \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \sin ۱ > \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \cos ۱ < \sin ۱$$

(حسابان ۱- مثلثات، صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۲ (سیدمیلاد موسوی‌چاشمی)

با توجه به برابری مسافت طی شده توسط چرخ‌ها داریم:

$$۰/۴ \times \pi = R \times \frac{۴\pi}{۵} \Rightarrow \text{شعاع چرخ عقب} : R = ۰/۵m$$

وقتی دوچرخه سوار $\frac{۴۸}{۱۰۰}$ محیط پیست را طی می‌کند، مسافت طی شده برابر

خواهد بود با:

$$l = ۲\pi \times ۱۰۰ \times \frac{۴۸}{۱۰۰} = ۹۶\pi\,(m)$$

$$\Rightarrow \text{تعداد دور چرخش چرخ عقب} = \frac{l}{۲\pi R} = \frac{۹۶\pi}{\pi} = ۹۶$$

(حسابان ۱- مثلثات، صفحهٔ ۹۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۸۳ (محمدمصطفی ابراهیمی)

$$\sin^۲\alpha + \sin^۲\left(\frac{\pi}{۲} - \beta\right) = \sin^۲\alpha + \cos^۲\beta = ۱ \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \cos^۲\alpha = \cos^۲\beta \Rightarrow \cos\alpha = \pm\cos\beta$$

این رابطه تنها با شرط گزینهٔ «۴» می‌تواند برقرار شود.

(حسابان ۱- مثلثات، صفحهٔ ۹۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۸۴ (جهانبخش نیکنام)

$$\tan\frac{\pi}{۲۰}\tan\frac{۹\pi}{۲۰}=\tan\frac{\pi}{۲۰}\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲۰}\right)=\tan\frac{\pi}{۲۰}\cot\frac{\pi}{۲۰}=۱$$

$$\tan\frac{۳\pi}{۲۰}\tan\frac{۷\pi}{۲۰}=\tan\frac{۳\pi}{۲۰}\cot\frac{۳\pi}{۲۰}=۱$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۲۰}=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\Rightarrow A=۱$$

(حسابان ۱- مثلثات، صفحهٔ ۹۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۸۵ (سعید خانجانی)

ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\alpha\\ \sin(\alpha-۳\pi)=-\sin(۳\pi-\alpha)=-\sin\alpha\\ \sin\left(\alpha-\frac{۳\pi}{۲}\right)=-\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)-۲\sin(\alpha-۳\pi)}{۳\sin\left(\alpha-\frac{۳\pi}{۲}\right)}=\frac{\sin\alpha+۲\sin\alpha}{۳\cos\alpha}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{۳\sin\alpha}{۳\cos\alpha}=۲\Rightarrow\tan\alpha=۲\Rightarrow\cot\alpha=\frac{۱}{۲}$$

(حسابان ۱- مثلثات، صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(جهانبخش نیکنام)

$$y = \sin^{۲} x - \left(۱ - \sin^{۲} x\right) - ۳\sin x = ۲\sin^{۲} x - ۳\sin x - ۱$$

$$= ۲\left(\sin x - \frac{۳}{۴}\right)^{۲} - \frac{۱۷}{۸}$$

$$۲\left(\sin x - \frac{۳}{۴}\right)^{۲} \geq ۰ \Rightarrow y = ۲\left(\sin x - \frac{۳}{۴}\right)^{۲} - \frac{۱۷}{۸} \geq -\frac{۱۷}{۸}$$

پس کم‌ترین مقدار تابع برابر با $-\frac{۱۷}{۸}$ است.

(حسابان ۱- مثلثات، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۴}$

(میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$\frac{\sin x-\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x}=\frac{\sin x-۲\sin x\cos x}{\cos x+۲\cos^{۲}x-۱}=\frac{\sin x(۱-۲\cos x)}{۲\cos^{۲}x+\cos x-۱}$$

$$=\frac{\sin x(۱-۲\cos x)}{(\cos x+۱)(۲\cos x-۱)}=\frac{-\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x+۲\cos x+۱}=\frac{۱-\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x+۲\cos x+۱}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\cos^{۲}x+۲\cos x+۱=۴-۴\cos^{۲}x$$

$$\Rightarrow ۵\cos^{۲}x+۲\cos x-۳=(۵\cos x-۳)(\cos x+۱)=۰$$

$$\xrightarrow{\cos x\neq -۱}\cos x=\frac{۳}{۵}$$

(حسابان ۱- مثلثات، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

✓ $\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

(علی شهرابی)

$$5\sin 6x\cos 2x = 4 - 5\sin 2x\cos 6x$$

$$\Rightarrow \sin 6x\cos 2x + \sin 2x\cos 6x = \sin 8x = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 8x + \cos^2 8x = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 8x = 1$$

$$\xrightarrow{8x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} \cos 8x = \frac{3}{5}$$

با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$، مقدار $\sin 4x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos 8x = 1 - 2\sin^2 4x \Rightarrow \frac{3}{5} = 1 - 2\sin^2 4x \Rightarrow \sin^2 4x = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{4x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} \sin 4x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(حسابان ۱- مثلثات، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

ابتدا توجه کنید که

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow \frac{۹}{۲۵}+\cos^{۲}\alpha=۱$$

چون $\sin\alpha$ مثبت است، با توجه به محدودهٔ قابل قبول برای α، $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$ خواهد بود.

$$\Rightarrow \cos^{۲}\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

از طرفی داریم:

$$\Rightarrow \sin^{۲}\beta+\cos^{۲}\beta=۱\Rightarrow \sin^{۲}\beta+\frac{۱}{۲۵}=۱$$

چون β در ناحیهٔ چهارم است، پس $\sin\beta$ منفی است.

$$\Rightarrow \sin^{۲}\beta=\frac{۲۴}{۲۵}\Rightarrow \sin\beta=-\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=-\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۵}-\frac{۳}{۵}\left(-\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}\right)=\frac{۶\sqrt{۶}-۴}{۲۵}$$

$$\Rightarrow ۲۵\cos(\alpha+\beta)=۶\sqrt{۶}-۴$$

$$\Rightarrow ۲۵\cos(\alpha+\beta)+۴=۶\sqrt{۶}$$

(حسابان ۱- مثلثات، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

✓۱ ۲ ۳ ۴

-۹۰ (سیدعادل حسینی)

$$\sin 20^\circ\left(\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}+\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}\right)$$

$$=\sin 20^\circ\left(\frac{\sin 40^\circ\cos 50^\circ+\sin 50^\circ\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ\cos 50^\circ}\right)$$

$$=\sin 20^\circ\frac{\sin\left(40^\circ+50^\circ\right)}{\cos 40^\circ\cos 50^\circ}=\sin 20^\circ\times\frac{1}{\cos 40^\circ\sin 40^\circ}$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\left(2\cos 40^\circ\sin 40^\circ\right)}=\frac{2\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=4\sin 10^\circ$$

(حسابان ۱- مثلثات، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۱۱ (امیرحسین ابومحبوب)

طبق تعریف تجانس داریم:

$$\left.\begin{aligned}OA'=k_1\times OA\\ OA''=k_2\times OA\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{OA'}{OA''}=\frac{k_1}{k_2}\Rightarrow OA'=\frac{k_1}{k_2}\times OA''$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۱۲ (نوید مجیدی)

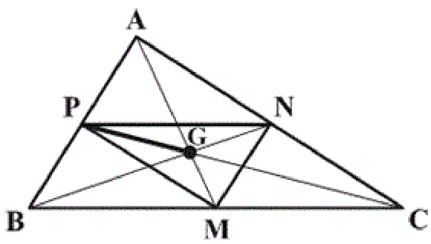
تجانس، در حالت کلی طولپا نیست، مگر اینکه $|k|=1$ باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۳- (محمد خندان)

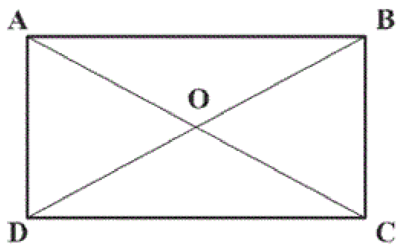
طبق تعریف تجانس، اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، آنگاه سه نقطهٔ O، A و A' روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین اگر نقاط M، N و P به‌ترتیب مجانس نقاط A، B و C در یک تجانس باشند، مرکز تجانس قطعاً بر روی خط‌های شامل پاره‌خط‌های AM، BN و CP قرار دارد. چون این سه پاره‌خط، میانه‌های مثلث ABC هستند، پس نقطهٔ تقاطع آنها همان نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۴- (محمدابراهیم گیتی‌زاده)



پاره‌خط‌های AC و BD (قطرهای مستطیل)، یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. از آن‌جا که قطرهای مستطیل، منصف یکدیگرند و دو نقطهٔ A و C در دو طرف نقطهٔ O واقع‌اند، پس نسبت تجانس برابر (-1) است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

$$\frac{MO}{MO'}=k\Rightarrow\frac{MO'+OO'}{MO'}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{x+۷}{x}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x+۱۴=۵x\Rightarrow ۳x=۱۴\Rightarrow x=\frac{۱۴}{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

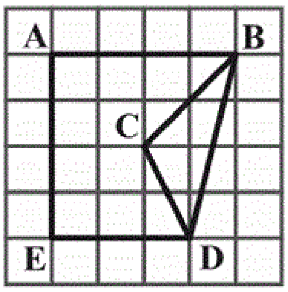
-۱۱۶ *(رضا عباسی‌اصل)*

در یک تجانس غیر همانی $(k\neq ۱)$، تنها مرکز تجانس تحت تبدیل، ثابت می‌ماند. بنابراین مرکز تجانس، تنها نقطهٔ ثابت تبدیل در یک تجانس غیرهمانی است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۷ *(محمد خندان)*



مطابق شکل اگر از B به D وصل کنیم، در مثلث شبکه‌ای BCD، تعداد نقاط مرزی برابر $b=۴$ و تعداد نقاط درونی برابر $i=۲$ است. در نتیجه طبق رابطهٔ پیک داریم:

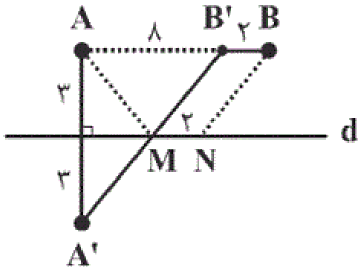
$$S_{\underset{BCD}{\triangle}}=\frac{b}{۲}+i-۱=۳$$

مقدار افزایش مساحت، دقیقاً دو برابر مساحت مثلث BCD، یعنی برابر ۶ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(امیرحسین ابومحبوب)



برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین A و B، کافی است از نقطهٔ B، خطی به طول ۲ کیلومتر موازی با خط d و به طرف نقطهٔ A رسم کنیم تا نقطهٔ B' حاصل شود. سپس از نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت به خط d، به B' وصل کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. اگر N نقطه‌ای به فاصلهٔ ۲ کیلومتر از M بر روی خط d باشد، آنگاه مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. داریم:

$$AM + MN + NB = A'M + BB' + MB'$$
$$= \left(A'M + MB'\right) + BB' = A'B' + BB'$$

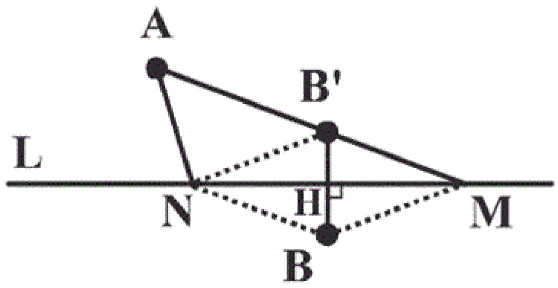
در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'AB'$ داریم:

$$A'B'^{۲} = AA'^{۲} + AB'^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow A'B' = ۱۰$$

و در نتیجه طول جادهٔ بین A و B، برابر $۱۲ = ۲ + ۱۰$ خواهد بود.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحهٔ ۵۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴



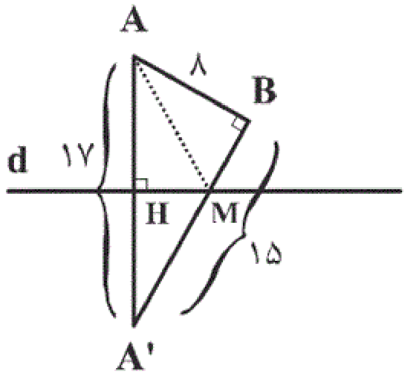
کافی است بازتاب نقطهٔ B را نسبت به خط L یافته (نقطهٔ B') و سپس B' را به A وصل کرده و امتداد دهیم تا خط L را در نقطهٔ M قطع نماید. نقطهٔ M جواب مسئله است، چون اگر نقطهٔ دلخواهی مانند N را روی خط L در نظر بگیریم، آنگاه طبق نامساوی مثلثی در مثلث $AB'N$ داریم:

$$|NA - NB'| < AB' \xrightarrow{NB'=NB} |NA - NB| < MA - MB'$$

$$\xrightarrow{MB'=MB} |NA - NB| < MA - MB = |MA - MB|$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحهٔ ۵۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓



اگر A' قرینهٔ A نسبت به خط d باشد، آن‌گاه $MA = MA'$ است و در نتیجه $MA + MB$ برابر $A'B$ است. در مثلث $AA'B$ داریم:

$$۱۷^۲ = ۱۵^۲ + ۸^۲ \Rightarrow AA'^۲ = A'B^۲ + AB^۲ \Rightarrow \hat{B} = ۹۰^\circ$$

حال اگر $MA = x$ فرض شود، آن‌گاه $MB = ۱۵ - x$ است و طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABM داریم:

$$MA^۲ = MB^۲ + AB^۲ \Rightarrow x^۲ = (۱۵ - x)^۲ + ۸^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۲۲۵ - ۳۰x + x^۲ + ۶۴ \Rightarrow ۳۰x = ۲۸۹ \Rightarrow x = \frac{۲۸۹}{۳۰}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحهٔ ۵۴)

$\boxed{۴}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۲}$✓ $\boxed{۱}$

-۱۳۱ (محمدعلی کاظم‌نظری)

نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای متغیرهای کمّی گسسته و کیفی و نمودار بافت‌نگاشت برای متغیرهای کمّی پیوسته مناسب‌اند.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۱   ۲   ۳   ✓۴

-۱۳۲ (مهرداد ملوندی)

$$\alpha_{۴} = \frac{f_{۴}}{n} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۴}{۳+۵+۳+۴} \times ۳۶۰^\circ$$

$$= \frac{۴}{۱۵} \times ۳۶۰^\circ = ۹۶^\circ$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

✓۱   ۲   ۳   ۴

$$۱۰ = \frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times ۶۰ = \text{فراوانی مطلق دستهٔ دوم}$$

پس $x+۱=۱۰$ و در نتیجه $x=۹$ است. بنابراین فراوانی مطلق دستهٔ سوم برابر است با $x-۳=۶$ و زاویهٔ متناظر با آن در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\frac{۶}{۶۰} \times ۳۶۰^\circ = ۳۶^\circ$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۱   ۲ ✓   ۳   ۴

-۱۳۴ (آرش رحیمی)

از هر یک از داده‌ها، ۲۴ واحد کم می‌کنیم. در این صورت از میانگین نیز ۲۴ واحد کم می‌شود.

$x_i - ۲۴$	-۶	-۳	۰	۳	۶
f_i	۳	۲	x	۶	۲

اگر $x'_i = x_i - ۲۴$ باشد، داریم:

$$\bar{x}' = \frac{\sum f_i x'_i}{n} = \frac{(-۱۸)+(-۶)+۰+۱۸+۱۲}{۱۳+x} = ۰/۲۴$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{۱۳+x} = ۰/۲۴ \Rightarrow x = ۱۲$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۳۵ (سروش موئینی)

اگر این اعداد متوالی را به صورت $x+۳$ ، $x+۲$ ، $x+۱$ ، x ، $x-۱$ ، $x-۲$ ، $x-۳$ بنویسیم، آن‌گاه میانهٔ این اعداد برابر x و میانگین آن‌ها برابر $\bar{x} = \frac{۷x}{۷} = x$ می‌باشد. یعنی میانگین و میانهٔ آنها برابر یکدیگرند.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۳۶ (مهرداد ملوندی)

تعداد داده‌های ۱۷ از سایر داده‌ها بیش‌تر است، پس مد داده‌ها برابر ۱۷ می‌باشد. تعداد کل داده‌ها برابر ۲۳ است، پس اگر داده‌ها از کوچک به بزرگ، مرتب شوند، دوازدهمین داده، میانهٔ داده‌هاست که این داده برابر ۱۴ می‌باشد.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۳۷ (امیرحسین ابومحبوب)

داده‌های دستهٔ دوم، از اضافه کردن ۱۱۰ واحد به داده‌های دستهٔ اول به دست آمده‌اند، پس میانگین و میانهٔ آن‌ها نیز ۱۱۰ واحد بیش‌تر از داده‌های دستهٔ اول است.

اما انحراف معیار این دو دسته از داده‌ها، برابر یکدیگر است. با توجه به تغییر میانگین و ثابت ماندن انحراف معیار، ضریب تغییرات داده‌ها نیز در دو دسته متفاوت است.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۸۴ تا ۹۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

میانگین ۴ دادهٔ حذف شده برابر است با:

$$\frac{10+15+45+50}{4}=30$$

بنابراین میانگین ۲۱ دادهٔ باقی‌مانده نیز برابر ۳۰ می‌باشد.

$$\sigma^2=64\Rightarrow$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{21}(x_i-30)^2\right)+(10-30)^2+(15-30)^2+(45-30)^2+(50-30)^2}{25}=64$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{21}(x_i-30)^2+1250=1600$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{21}(x_i-30)^2=350$$

بنابراین واریانس داده‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$\sigma'^2=\frac{\sum_{i=1}^{21}(x_i-30)^2}{21}=\frac{350}{21}\simeq 16/66$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۸۵ و ۹۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

اگر میانگین و انحراف‌معیار داده‌های x_i $(1 \le i \le n)$ به‌ترتیب برابر $\bar{x}$ و

$\sigma = 2$ باشد، آنگاه میانگین و انحراف معیار داده‌های

$5x_i + 2$ $(1 \le i \le n)$ به‌ترتیب $5\bar{x} + 2$ و $5\sigma = 10$ است. برای ضریب

تغییرات داده‌ها در حالت اول داریم:

$$c = \frac{2}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{c}$$

اگر ضریب تغییرات داده‌های جدید را با CV نمایش دهیم، داریم:

$$CV = \frac{10}{5\bar{x} + 2} = \frac{10}{5 \times (\frac{2}{c}) + 2} = \frac{10}{\frac{10}{c} + 2} = \frac{5c}{5 + c}$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۹۳ تا ۹۷)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۹, ۱۹

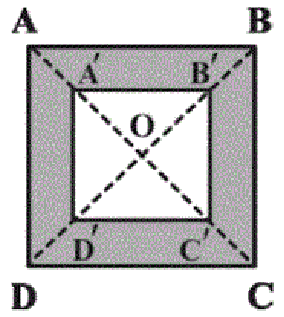
تعداد داده‌ها برابر ۱۵ است، پس هشتمین داده یعنی ۱۵، میانه بوده و میانهٔ ۷ دادهٔ اول، یعنی دادهٔ چهارم برابر چارک اول و میانـهٔ ۷ دادهٔ آخـر، یعنـی دادهٔ دوازدهم برابر چارک سوم اسـت. پـس $Q_1 = ۱۲$ و $Q_3 = ۱۷$ مـی‌باشـند. از طرفی داده‌های ابتدا و انتهای جعبه به‌ترتیـب همـان چـارک‌هـای اول و سـوم داده‌ها هستند، پس داریم:

دامنهٔ تغییرات داده‌های داخل و روی جعبه $= Q_3 - Q_1 = ۱۷ - ۱۲ = ۵$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

(سؤال ۹۰۲ کتاب آبی)



اگر مساحت مربع ABCD به ضلع a را S فرض کنیم، مساحت مربع $A'B'C'D'$ برابر $\frac{۴}{۹}S$ خواهد بود. پس مساحت ناحیهٔ محدود بین مربع و تصویرش برابر $S-\frac{۴}{۹}S=\frac{۵}{۹}S$ است، در نتیجه داریم:

$$\frac{۵}{۹}S=۵ \Rightarrow S=۹ \Rightarrow a^{۲}=۹ \Rightarrow a=۳$$

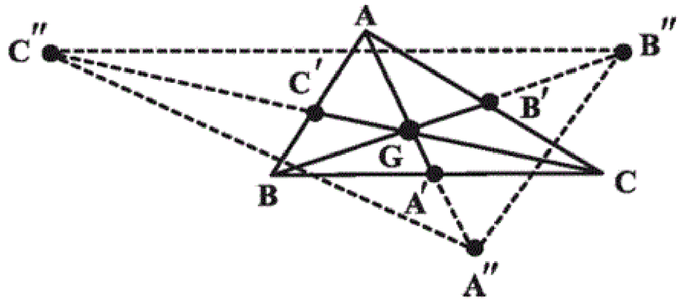
$\Rightarrow$ محیط مربع $=۴a=۱۲$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۲- (سؤال ۹۰۳ کتاب آبی)

می‌دانیم میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. پاره‌خط‌های AA'' و BB'' و CC'' یکدیگر را در نقطهٔ G (محل همرسی میانه‌های مثلث ABC) قطع می‌کنند، پس نقطهٔ G مرکز تجانسی است که مثلث ABC را به روی مثلث $A''B''C''$ تصویر می‌کند. داریم:



$$\begin{cases} GA = \frac{۲}{۳}AA' \\ GB = \frac{۲}{۳}BB' \\ GC = \frac{۲}{۳}CC' \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} GA' = \frac{۱}{۳}AA' \\ GB' = \frac{۱}{۳}BB' \\ GC' = \frac{۱}{۳}CC' \end{cases}$$

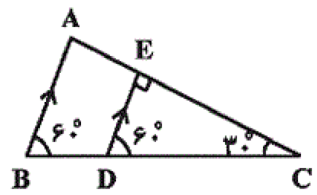
از طرفی بنابه فرض مسئله $A'A'' = \frac{۲}{۳}AA'$ ، $B'B'' = \frac{۲}{۳}BB'$ و $C'C'' = \frac{۲}{۳}CC'$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} GA'' = GA' + A'A'' = \frac{۱}{۳}AA' + \frac{۲}{۳}AA' = AA' = \frac{۳}{۲}GA \\ GB'' = GB' + B'B'' = \frac{۱}{۳}BB' + \frac{۲}{۳}BB' = BB' = \frac{۳}{۲}GB \\ GC'' = GC' + C'C'' = \frac{۱}{۳}CC' + \frac{۲}{۳}CC' = CC' = \frac{۳}{۲}GC \end{cases}$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

(سؤال ۹۰۵ کتاب آبی)

بنا به داده‌های مسئله، اندازهٔ زاویهٔ بین DC و EC برابر 30° است و چون در تجانس زاویه‌ها ثابت می‌ماند، پس اندازهٔ زاویهٔ بین مجانس‌های ایـن دو پاره‌خط نیز در هر تجانسی، برابر همان ۳۰ درجه است.



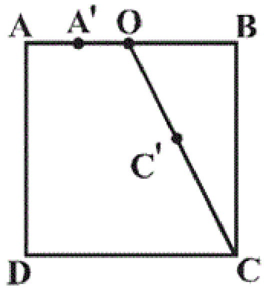
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

(سؤال ۹۰۸ کتاب آبی)

در این تجانس، نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ است. یعنی:

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$$



بنابراین، نقطهٔ C'، تصویر نقطهٔ C، وسط OC واقع است. یعنی:

$$OC' = CC' = \frac{OC}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC، $BC = \sqrt{5}$ و $OB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است، بنابراین داریم:

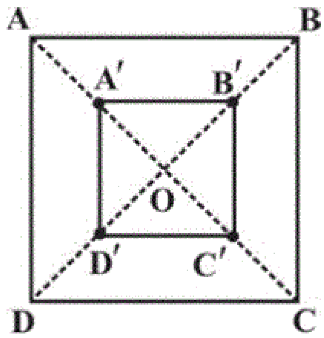
$$OC^2 = OB^2 + BC^2 = \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow OC = \frac{5}{2} \Rightarrow CC' = \frac{5}{4}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

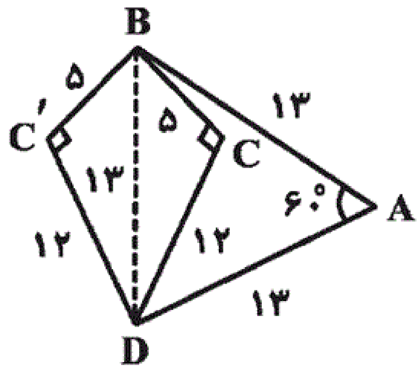
(سؤال ۹۰۹ کتاب آبی)



تجانس، شیب خط‌ها را حفظ می‌کند ولی طول را با ضریب نسبت تجانس تغییر می‌دهد، یعنی تصویر مربع ABCD تحت این تجانس همان مربع است که به نسبت $\frac{1}{2}$ کوچک شده است و داخل مربع ABCD قرار می‌گیرد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓



کافی است رأس C را نسبت به BD بازتاب داده و به C' برسیم. دقت کنید که مثلث ABD متساوی‌الاضلاع و مثلث BC'D قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases} AB = AD \ , \quad \hat{A} = ۶۰^\circ \Rightarrow AB = AD = BD = ۱۳ \\ BC'^{۲} + C'D^{۲} = ۵^{۲} + ۱۲^{۲} = ۱۶۹ = BD^{۲} \Rightarrow \hat{C'} = ۹۰^\circ \end{cases}$$

مساحت چهارضلعی ABC'D از مساحت چهارضلعی ABCD به اندازهٔ مساحت چهارضلعی BCDC' بیشتر است و مساحت این چهارضلعی دو برابر مساحت مثلث BCD است، پس:

$$S_{BCDC'} = ۲S_{\overset{\Delta}{BCD}} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times BC \times CD = ۵ \times ۱۲ = ۶۰$$

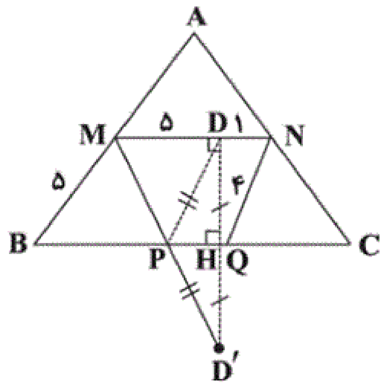
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۱   ۲✓   ۳   ۴

سوال را مانند مسئلهٔ جادهٔ ساحلی حل می‌کنیم.

N را یک واحد به سمت M انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید.

سپس بازتاب آن نسبت به BC را D' می‌نامیم، داریم:



$$\left.\begin{matrix} PQ \parallel ND \\ PQ = ND \end{matrix}\right\} \Rightarrow PDNQ \text{ متوازی‌الاضلاع } \Rightarrow NQ = PD$$

$$DD' = ۲DH = ۲ \times ۴ = ۸$$

$$MP + QN = MP + PD = MD'$$

$$\overset{\Delta}{MDD'} : MD'^{۲} = ۵^{۲} + ۸^{۲} = ۸۹ \Rightarrow MD' = \sqrt{۸۹}$$

$$MPQN \text{ محیط } = MN + (MP + QN) + PQ$$

$$= ۶ + \sqrt{۸۹} + ۱ = ۷ + \sqrt{۸۹}$$

توجه داشته باشید که با توجه به فرضیات مسئله و در نتیجه موازی بودن MN و BC، طول MN از رابطهٔ $MN = \frac{۱}{۲}BC$ به دست می‌آید.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحهٔ ۵۵)

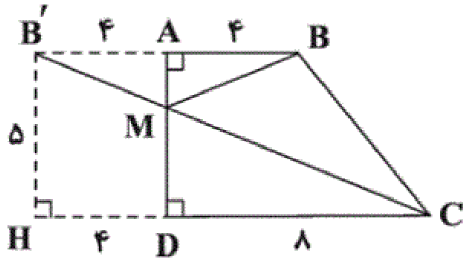
۱ ۲ ۳✓ ۴

(سؤال ۹۳۵ کتاب آبی)

بازتاب نقطهٔ B نسبت به ساق AD را B' می‌نامیم. از C به B' وصل می‌کنیم. محل برخورد پاره‌خط $B'C$ با ساق AD، همان نقطهٔ M است.

طبق مسئلهٔ هرون می‌دانیم $MB+MC=B'C$. پس داریم:

$$\overset{\Delta}{B'HC}: B'C^۲ = B'H^۲ + HC^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow B'C = ۱۳$$

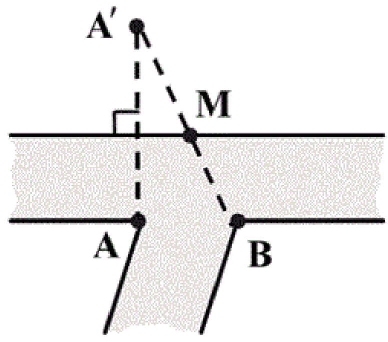


(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحهٔ ۵۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(سؤال ۹۳۷ کتاب آبی)

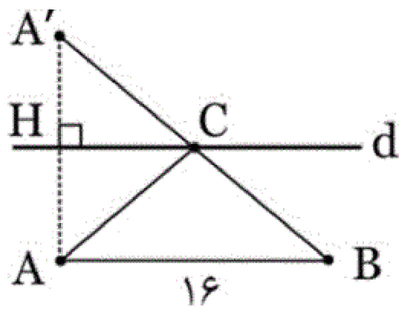
طول مسیر $MABM$ برابر با $MA+AB+MB$ است. چون طول AB ثابت است، پس برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر $MABM$ باید کم‌ترین مقدار $MA+MB$ را بیابیم. از طرفی بنا به مسئلهٔ هرون می‌دانیم برای یافتن کم‌ترین مقدار $MA+MB$، باید از تبدیل بازتاب کمک بگیریم.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحهٔ ۵۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(سؤال ۹۵۰ کتاب آبی)



اگر طول ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث ABC را برابر h در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times h}{۲} \Rightarrow ۴۸ = \frac{۱۶ \times h}{۲} \Rightarrow h = ۶$$

پس رأس C روی خطی به‌فاصلهٔ ۶ واحد از ضلع AB قرار دارد.

چون مقدار AB ثابت است و می‌خواهیم محیط ABC کم‌ترین مقدار ممکن باشد، مسئله تبدیل می‌شود به پیدا کردن رأس C روی خط d به‌گونه‌ای که مقدار $AC + BC$ کم‌ترین باشد. با توجه به مسئلهٔ اول هرون، قرینهٔ A را نسبت به d پیدا می‌کنیم (نقطهٔ A'). چون $AC = A'C$، بنابراین حداقل مقدار $AC + CB$ برابر است با:

$$AC + CB = A'C + BC = A'B$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'B$ داریم:

$$A'B = \sqrt{AA'^{۲} + AB^{۲}} = \sqrt{۱۲^{۲} + ۱۶^{۲}} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

پس کمترین مقدار محیط مثلث ABC برابر است با:

$$۱۶ + ۲۰ = ۳۶$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحهٔ ۵۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴