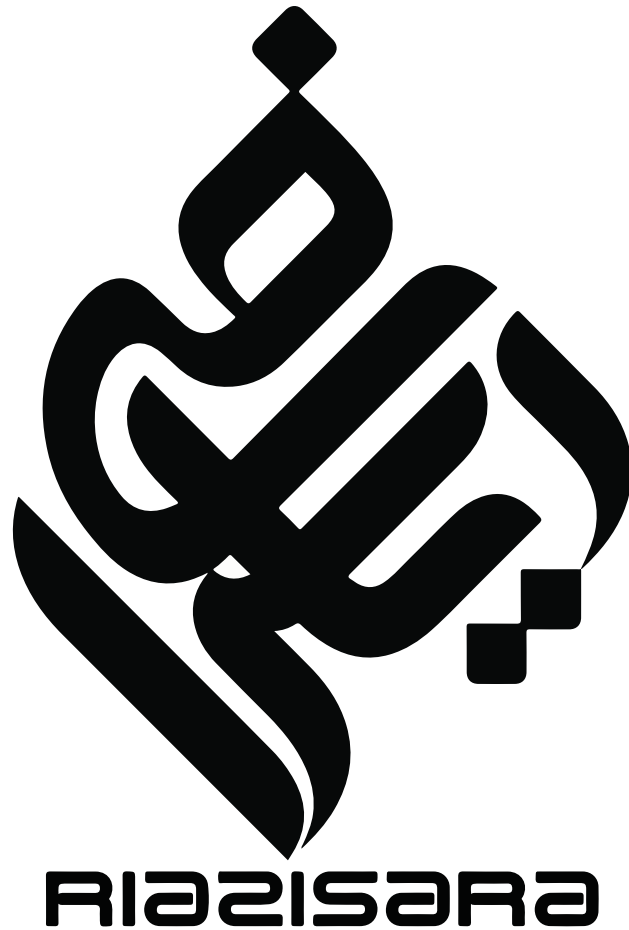




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

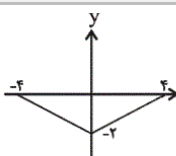
<https://t.me/riazisara>

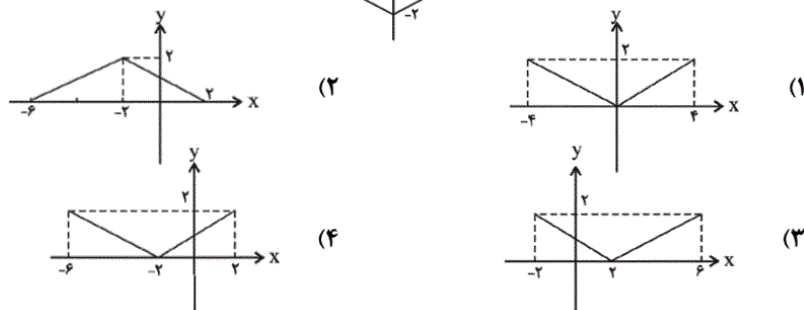


ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



۴۱- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت  باشد، نمودار تابع $y = f(x-2) + 2$ کدام است؟



۴۲- توابع f و g در $\mathbb{R}$ به ترتیب همانی و ثابت می‌باشند؛ به طوری که $g(0) = 6$ است. در این صورت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب معادله $(f(x) + 2x)(x - g(x)) = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۱

۴۳- برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & , |x| < 1 \\ x + \frac{|2x|}{x} & , |x| \geq 1 \end{cases}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

۴۴- اگر نمودار تابع $y = (3-x)^2$ را ۲ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار حاصل و نمودار اولیه در نقطه‌ای با کدام عرض متقاطع‌اند؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) غیرمتقاطع‌اند

۴۵- در شهری شامل n منطقه بین هر دو منطقه دقیقاً یک راه ارتباطی وجود دارد. اگر تعداد کل راه‌ها ۵۵ باشد، این شهر شامل چند منطقه است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

۴۶- با ارقام ۹، ۷، ۵، ۱، ۰ چند عدد سه رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۵

۴۷- با حروف کلمه «مهربانی» چند کلمه ۳ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به طوری که حرف اول آن نقطه‌دار باشد؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۲۰ (۳) ۶۰ (۴) ۴۸

۴۸- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه دارد که شامل عضوهای ۱، ۲ و ۵ باشد ولی شامل عضوهای ۷ و ۹ نباشد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) ۱۲۸

۴۹- اگر $m^2 + 2m = \binom{m+3}{2}$ باشد، حاصل $P(7, m)$ کدام است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۲۱۰ (۳) ۸۴۰ (۴) ۲۵۲۰

۵۰- با توجه به شکل زیر، چند چهارضلعی محدب می توان ساخت که رئوس آن از نقاط مشخص شده، روی اضلاع مثلث باشند؟



- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۹

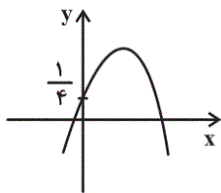
حسابان ۱ - ۱۰ سوال -

۵۱- در یک دنباله حسابی با جملات غیر صفر، مجموع ده جمله اول، چهار برابر مجموع پنج جمله اول است.

در این دنباله، جمله هشتم، چند برابر جمله سوم است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۵۲- اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + (2-a)x + b$ به صورت شکل زیر باشد، در این صورت مجموعه مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟



- (۱) $\{a | a < 0\}$
(۲) $\{a | a < 1\}$
(۳) $\{a | -2 < a < 0\}$
(۴) $\{a | a < -2\}$

۵۳- حاصل ضرب ریشه های معادله $55 = 13x^2 - (x^2 - 1)^2$ کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۶ (۳) ۵۶ (۴) ۷۲

۵۴- اگر خسرو به تنهایی تعداد مشخصی کاغذ تبلیغاتی را پخش کند، ۴ ساعت دیرتر از زمانی که با علی کار کند، این کار را به اتمام می رساند. همچنین وی اگر به تنهایی این کار را انجام دهد، ۱۲ ساعت زودتر از علی این کار را تمام می کند. خسرو به تنهایی در چند ساعت کاغذهای تبلیغاتی را پخش می کند؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۵۵- اگر $x = 1$ یک جواب معادله $|x+2| - \sqrt{a-x} = 1$ باشد، این معادله چند جواب دیگر دارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) مشخص نیست.

۵۶- مثلث متساوی الساقین، به رأس های $A(4, 8)$ ، $B(-3, 1)$ و $C(2, 3)$ را در نظر بگیرید. طول ارتفاع CH کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

۵۷- اگر دو تابع $f(x) = \frac{5}{x-3}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم مساوی باشند، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) -۷ (۴) -۱۰

۵۸- اگر جزء صحیح $x^2 + x$ برابر -۱ باشد، در این صورت حاصل $[x^{1398}]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۱۳۹۸

۵۹- اگر $f(x) = \frac{1}{[-x] + [x]}$ باشد، مقدار $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) تعریف نشده

۶۰- ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 - 6x$ با شرط $D_f = (3, +\infty)$ کدام است؟

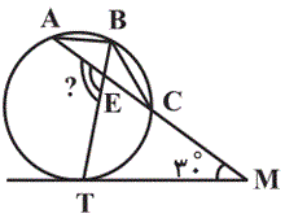
(۱) $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+9}$ (۲) $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+9}$

(۳) $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-9}$ (۴) $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x-9}$

هندسه ۲ - ۱۰ سوال

۱۰۱- در شکل زیر MT بر دایره مماس و $AB = BC$ است. اگر $\hat{M} = 3^\circ$ باشد، اندازه زاویه AET چند

درجه است؟



(۱) ۹۰

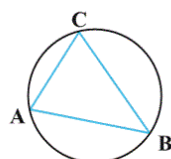
(۲) ۹۵

(۳) ۱۰۰

(۴) ۱۰۵

۱۰۲- در شکل زیر، $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 50^\circ$ است. از نقطه O مرکز دایره، بر اضلاع AB ، AC و BC به ترتیب عمودهای OP ، OQ

و OR رسم می‌شود. کدام مورد درست است؟



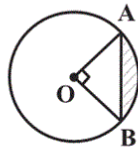
(۱) $OP > OR > OQ$

(۲) $OQ > OR > OP$

(۳) $OP > OQ > OR$

(۴) $OQ > OP > OR$

۱۰۳- در شکل زیر مثلث OAB قائم‌الزاویه است. اگر مساحت قطعه هاشورخورده برابر $(\pi - 2)$ باشد، آنگاه اندازه محیط آن کدام است؟



(۱) $\frac{\pi}{2} + 2$

(۲) $\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}$

(۳) $\pi + 2$

(۴) $\pi + 2\sqrt{2}$

۱۰۴- در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ واحد، نقطه M روی وتر BC قرار دارد. اگر $OM = 3$ باشد، حاصل $BM \times CM$ کدام است؟

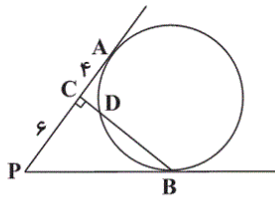
(۱) ۱۶

(۲) ۱۸

(۳) ۲۰

(۴) ۲۲

۱۰۵- در شکل زیر، PA و PB بر دایره مماس هستند و BC بر PA عمود است. اگر $PC = 6$ و $CA = 4$ باشند، طول CD کدام است؟



(۱) ۳

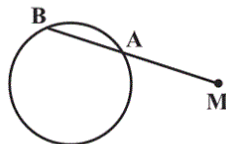
(۲) $\sqrt{6}$

(۳) $\sqrt{5}$

(۴) ۲

۱۰۶- در شکل زیر، فاصله نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره تا نقطه مفروض M به ترتیب برابر ۴ و ۹ است. قاطع MAB نسبت به دایره به طوری

رسم شده است که اندازه MA یک واحد بیش‌تر از AB است. اندازه MB کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۱۰۷- اگر اندازه دو تا از مماس مشترک‌های دو دایره متخارج ۴ و ۶ باشد، حاصل ضرب طول شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

۱۰۸- در یک هشت ضلعی نیمساز زاویه‌ها در نقطه I هم‌رس‌اند. اگر محیط این هشت ضلعی برابر $۸\sqrt{۲} - ۱۶$ و مساحت آن $۸\sqrt{۲} - ۸$ باشد، مجموع

فاصله‌های نقطه I از اضلاع این هشت ضلعی کدام است؟

(۱) $۴\sqrt{۲}$

(۲) $۸\sqrt{۲}$

(۳) ۴

(۴) ۸

۱۰۹- مثلثی با طول اضلاع ۳، ۵ و ۶ مفروض است. اندازه شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی این مثلث چند برابر اندازه شعاع کوچک‌ترین دایره

محاطی آن است؟

(۴) ۷

(۳) ۴

(۲) $\frac{۷}{۴}$

(۱) $\frac{۴}{۳}$

۱۱۰- شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر رأس A از ΔABC به ترتیب برابر $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۷}{۵}$ می‌باشد. اگر طول مماس مرسوم از نقطه A بر

دایره محاطی داخلی برابر ۵ باشد، طول مماس مشترک داخلی دو دایره مفروض کدام است؟

(۲) ۵

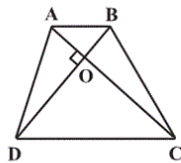
(۱) $\frac{۲}{۵}$

(۴) ۶

(۳) ۳

هندسه ۱ - ۱۰ سوال -

۹۱- مطابق شکل، قطرهای دوزنقه ABCD بر هم عمودند. اگر $AD = ۸$ و $\hat{ADO} = ۳۰^\circ$ باشد، مساحت مثلث BOC کدام است؟



(۱) $۶\sqrt{۲}$

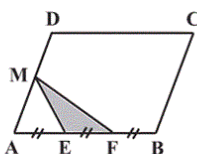
(۲) $۶\sqrt{۳}$

(۳) $۸\sqrt{۲}$

(۴) $۸\sqrt{۳}$

۹۲- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. نقطه M وسط ضلع AD و $AE = EF = BF$ است. مساحت مثلث MEF چه

کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است؟



(۲) $\frac{۱}{۱۸}$

(۱) $\frac{۱}{۲۴}$

(۴) $\frac{۱}{۲۰}$

(۳) $\frac{۱}{۱۲}$

۹۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع قائم ۳ و ۴، فاصله نقطه هم‌رسی میانه‌ها تا وسط وتر کدام است؟

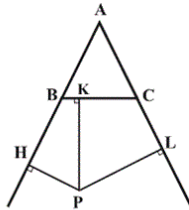
$$\frac{5}{6} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\frac{6}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{4} \quad (3)$$

۹۴- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع، $PH = 3\sqrt{3}$ ، $PK = 4\sqrt{3}$ و $PL = 5\sqrt{3}$ است. طول هر ضلع مثلث ABC کدام است؟



$$6 \quad (1)$$

$$8 \quad (2)$$

$$9 \quad (3)$$

$$12 \quad (4)$$

۹۵- یک کایت شبکه‌ای که اندازه قطرهای آن ۴ و ۵ هستند، مفروض است. اگر تعداد نقاط شبکه‌ای درون این کایت برابر ۸ باشد، آن‌گاه تعداد نقاط شبکه‌ای واقع بر محیط این کایت کدام است؟ (فاصله طولی و عرضی بین نقاط شبکه برابر واحد است.)

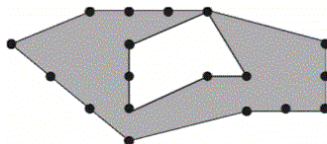
$$7 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

$$26 \quad (4)$$

$$17 \quad (3)$$

۹۶- اختلاف مساحت دو چندضلعی شبکه‌ای زیر برابر $16/5$ است. تعداد نقاط درونی چندضلعی بزرگ‌تر، چقدر از تعداد نقاط درونی چندضلعی کوچک‌تر، بیشتر است؟ (فاصله طولی و عرضی بین نقاط شبکه برابر واحد است.)



$$11 \quad (1)$$

$$12 \quad (2)$$

$$13 \quad (3)$$

$$14 \quad (4)$$

۹۷- دو وجه مقابل یک مکعب را در نظر می‌گیریم. چند جفت ضلع (یال) متناظر در این دو وجه می‌توان یافت؟

$$8 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$10 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

۹۸- اگر دو خط متمایز L و L' با صفحه P موازی باشند، آن‌گاه وضعیت L و L' کدام است؟

(۲) متقاطع‌اند

(۱) موازی‌اند

(۴) هر سه حالت امکان‌پذیر است.

(۳) متناظرند

۹۹- دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی‌اند. چه تعداد از گزاره‌های زیر لزوماً صحیح است؟

الف) اگر صفحه‌ای مانند P با یکی از این دو خط موازی باشد، آنگاه با دیگری نیز موازی است.

ب) اگر صفحه P شامل یکی از این دو خط باشد، آنگاه می‌تواند شامل خط دیگر نیز باشد.

پ) اگر صفحه P با یکی از دو خط متقاطع باشد، آنگاه خط دیگر را نیز قطع می‌کند.

(۱) هیچ (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۰- خط d به تمامی در صفحه P قرار دارد. اگر خط Δ خارج از صفحه P ، با این صفحه موازی باشد، آنگاه دو خط d و Δ نسبت به هم چه

وضعی دارند؟

(۱) فقط متنافر (۲) فقط متقاطع

(۳) موازی یا متنافر (۴) متقاطع یا متنافر

حسابان ۱- گواه ۱۰ سوال

۶۱- در یک دنباله هندسی افزایشی به صورت $\dots, b, 9, a, 4$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

(۱) $81\frac{3}{8}$ (۲) $81\frac{7}{8}$ (۳) $82\frac{3}{8}$ (۴) $83\frac{1}{8}$

۶۲- در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر 5 واحد بیشتر است. m کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۶۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

۶۴- اگر یکی از جواب‌های معادله $\frac{12-x}{x^2+x} = \frac{x}{x+1} + \frac{A}{x}$ برابر با $x=1$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ ($A \in \mathbb{R}$)

(۱) ۷ (۲) -۷ (۳) ۶ (۴) ریشه دیگری ندارد.

۶۵- مساحت ناحیه مثلثی محدود به نمودار تابع $y = |x-3|$ و نیمساز ناحیه اول و محور x ها کدام است؟

(۱) ۴/۵ (۲) ۲/۲۵ (۳) ۹ (۴) ۶

۶۶- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) $7/2$ (۲) $9/6$ (۳) $11/4$ (۴) $12/8$

۶۷- برای تابع $f: (-1, 1) \rightarrow (-\infty, 2)$ کدام یک از نمایش‌های زیر قابل قبول است؟
 $f(x) = -|x|$

- (۱) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = -|x|$ (۲) $f: (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$
 $f(x) = -|x|$

- (۳) $f: (-1, 1) \rightarrow [-1, 0]$
 $f(x) = -|x|$ (۴) $f: (-1, 1) \rightarrow (-\infty, 0)$
 $f(x) = -|x|$

۶۸- اگر دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+a-5}$ برابر $\mathbb{R} - \{b\}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

- (۱) -5 (۲) -6 (۳) $\frac{23}{4}$ (۴) $\frac{25}{4}$

۶۹- بزرگ‌ترین فاصله‌ای که تابع $f(x) = |x-1| - |x+3|$ در آن بازه وارون‌پذیر است، کدام است؟

- (۱) $[-4, 4]$ (۲) $[-3, 1]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $\emptyset$

۷۰- اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ ، نسبت به نیمساز ربع اول، متقارن باشند، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ± 3 (۲) ± 2 (۳) $2, -3$ (۴) $-2, 3$

ریاضی ۱- سوالات موازی - ۱۰ سوال

۷۱- یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه، سه برابر شعاع نیم‌کره باشد، نمایش حجم تانکر به صورت تابعی از شعاع کره کدام است؟

- (۱) $V(r) = 3\pi r^3$ (۲) $V(r) = 4\pi r^3$
(۳) $V(r) = \frac{13}{3}\pi r^3$ (۴) $V(r) = \frac{14}{3}\pi r^3$

۷۲- اگر تابع $f(x) = (a-c)x^2 + (a-b)x + 3x - 4 + b$ تابع همانی باشد، مقدار $\frac{f(a)+f(b)}{f(a+c)}$ کدام گزینه است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) 4 (۴) 2

۷۳- تابع $g(x) = \{(a^3 - 25a, 0), (2, 3b-4), (26, a^2+1)\}$ همانی است. اگر a ، عضو برد تابع $f(x) = |1-x| - 2b$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) 7 (۲) 3 (۳) -7 (۴) -3

۷۴- اگر نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 10 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را ۲ واحد به سمت راست و ۵ واحد به سمت پایین منتقل کنیم، ضابطه تابع حاصل کدام خواهد بود؟

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 11 & x \geq 3 \\ 3x - 12 & x < 3 \end{cases} \quad (2) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 6 & x \geq 1 \\ 3x - 7 & x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 11 & x \geq 1 \\ 3x & x < 1 \end{cases} \quad (4) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 11 & x \geq 3 \\ 3x & x < 3 \end{cases} \quad (3)$$

۷۵- به چند طریق می توان ۹ خودروی متمایز را که فقط ۳ تای آنها سفید رنگ هستند، کنار هم چید به طوری که هر سه خودروی سفید هم زمان کنار هم دیده نشوند؟

$$9! - 3! \quad (1) \quad 9! - 7! \quad (2) \quad 7! \times 3! \quad (3) \quad 9! - 7! \times 3! \quad (4)$$

۷۶- سه کتاب ریاضی، هندسه و فیزیک را به همراه سه کتاب دیگر با موضوعات مختلف، به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که کتاب فیزیک بین کتاب های ریاضی و هندسه (نه لزوماً بلافاصله) قرار گیرد؟

$$360 \quad (1) \quad 120 \quad (2) \quad 180 \quad (3) \quad 240 \quad (4)$$

۷۷- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد زوج چهاررقمی بزرگتر از ۲۰۰۰ می توان نوشت به طوری که ارقام آن غیر تکراری باشد؟

$$210 \quad (1) \quad 280 \quad (2) \quad 340 \quad (3) \quad 360 \quad (4)$$

۷۸- تساوی $\left(\frac{72}{x^2 + 12} \right) = \left(\frac{72}{7x} \right)$ ، به ازای چند مقدار x برقرار می باشد؟

$$\text{صفر} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

۷۹- در چند کلمه ۱۰ حرفی با حروف A، B و C، سومین حرف B در جایگاه هشتم کلمه قرار دارد؟

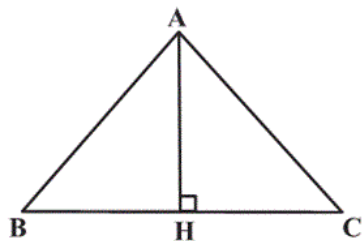
$$1512 \quad (1) \quad 2016 \quad (2) \quad 6048 \quad (3) \quad 3024 \quad (4)$$

۸۰- به چند طریق می توان از بین ۷ نفر که ۲ نفر از آنها با هم قهر هستند ۵ نفر را انتخاب کرد به طوری که این دو نفر با هم انتخاب نشوند؟

$$21 \quad (1) \quad 18 \quad (2) \quad 10 \quad (3) \quad 11 \quad (4)$$

۱۱۱- در شکل زیر، $AB = AC$ ، $AH = ۴$ و $BC = ۶$ است. اگر M نقطه دلخواهی روی قاعده مثلث

باشد، مجموع فواصل M از دو ضلع AB و AC کدام است؟



(۱) $۴/۸$

(۲) $۳/۶$

(۳) $۵/۴$

(۴) $۵/۲$

۱۱۲- اگر مجموع فواصل هر نقطه درون یک مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن $۴\sqrt{3}$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

(۴) ۶۴

(۳) $۳۲\sqrt{3}$

(۲) $۱۶\sqrt{3}$

(۱) $۸\sqrt{3}$

۱۱۳- در شکل زیر، اگر نقطه M وسط ضلع BC و مساحت متوازی الاضلاع $ABCD$ برابر ۳۰ باشد، آنگاه مساحت ناحیه هاشورخورده کدام

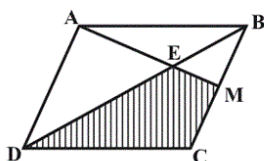
است؟

(۱) ۱۰

(۲) $۱۱/۲۵$

(۳) ۱۲

(۴) $۱۲/۵$



۱۱۴- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد مربع است. حداکثر تعداد نقاط مرزی این چندضلعی کدام است؟

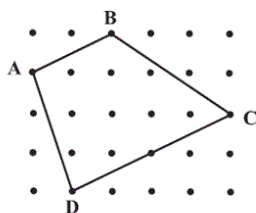
(۲) ۶

(۱) ۴

(۴) ۱۲

(۳) ۸

۱۱۵- در دوزنقه شبکه‌ای زیر، فاصله دو ضلع موازی AB و CD چند برابر $\sqrt{5}$ است؟



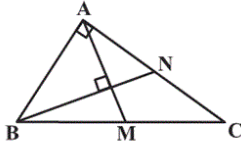
(۱) $۱/۴$

(۲) $۱/۲$

(۳) $۱/۳$

(۴) $۱/۵$

۱۱۶- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، میانه AM بر میانه BN عمود است. نسبت BN به AB کدام است؟



(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

۱۱۷- دو خط d' و d'' موازی‌اند و خط d با آن‌ها متنافر است. نقاط برخورد d و d'' با صفحه P را به ترتیب A و B می‌نامیم. وضعیت دو خط

AB و d' کدام است؟

(۱) متقاطع یا متنافر

(۲) موازی یا متقاطع

(۳) متنافر یا موازی

(۴) موازی یا منطبق

۱۱۸- کدام یک از گزینه‌های زیر همواره درست است؟

(۱) از سه نقطه همواره دقیقاً یک صفحه می‌گذرد.

(۲) از دو خط متقاطع در فضا دقیقاً یک صفحه می‌گذرد که هر دوی آن‌ها را شامل شود.

(۳) دو خط عمود بر یک خط در فضا، با هم موازی‌اند.

(۴) از نقطه A خارج صفحه P بی‌شمار صفحه موازی صفحه P می‌توان رسم کرد.

۱۱۹- در یک منشور سه پهلوی به ترتیب چند جفت خط متمایز دو به دو موازی و چند جفت خط متمایز دو به دو متنافر وجود دارد؟

(۱) $3 - 6$

(۲) $3 - 9$

(۳) $6 - 9$

(۴) $6 - 12$

۱۲۰- دو خط متنافر d و d' با صفحه P متقاطع هستند. چند خط یافت می‌شود که این دو خط را قطع کند و با صفحه P موازی باشد؟

(۱) بی‌شمار

(۲) یک

(۳) دو

(۴) هیچ

۸۱- مساحت دایره (A)، به عنوان تابعی از محیط آن (P) کدام است؟

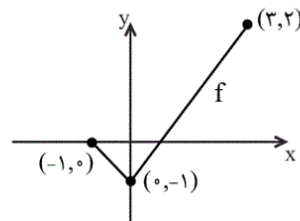
$$A(P) = \frac{P^2}{4\pi} \quad (2) \quad A(P) = 4\pi P^2 \quad (1)$$

$$A(P) = 2\pi P^2 \quad (4) \quad A(P) = \frac{P^2}{2\pi} \quad (3)$$

۸۲- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، آنگاه چند تابع همانی از A به A وجود دارد؟

(۱) یکی (۲) دو تا (۳) سه تا (۴) چهار تا

۸۳- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = a|x+b|+k$ در بازه $[-1, 3]$ است. برد تابع $f(x-1)+2$ ، کدام بازه زیر است؟



(۱) $[1, 4]$
(۲) $[2, 6]$
(۳) $[-1, 3]$
(۴) $[1, 3]$

۸۴- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax-3 & , x < 0 \\ 2bx^2+7 & , x \geq 0 \end{cases}$ از نقطه $(-1, 3)$ عبور می‌کند. اگر $f(2) = 5$ باشد، ab کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۸۵- مدیر یک رستوران اگر بخواهد در منوی رستوران خود دسر در نظر بگیرد می‌تواند هر کدام از ژله‌های با طعم‌های زعفرانی، آلبالویی، موزی، پرتقالی و طالبی را در منو قرار دهد. البته این امکان هم وجود دارد که هیچ یک از آن‌ها را در منو قرار ندهد. چند حالت برای این کار امکان‌پذیر است؟

(۱) ۶ (۲) ۶۴ (۳) ۵ (۴) ۳۲

۸۶- رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می‌توانند از حروف فارسی {ب، ج، د، ر، ز} یا حروف انگلیسی {a, b, c, d} باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۶۰

۸۷- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه DAMDARAN، به شرط آن که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۶۰

۸۸- از ۱۲ نفر دانش‌آموز نمونه، به چند طریق می‌توان سه نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه، انتخاب کرد؟

(۱) ۱۳۲۰ (۲) ۶۶۰ (۳) ۳۳۰ (۴) ۲۲۰

۸۹- یک نقاش، قوطی‌هایی از ۵ رنگ مختلف دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند رنگ متمایز بتواند یک رنگ جدید به وجود آورد و سپس از سه رنگ از رنگ‌های حاصل در نقاشی خود استفاده کند، تعداد کل حالات رنگ‌آمیزی کدام است؟

(۱) ۲۶۰۰ (۲) ۳۲۰۰ (۳) ۲۴۰۰ (۴) ۲۸۰۰

۹۰- از هر یک از ۸ مدرسه علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود به طوری که هر دو نفر هم‌تیمی، از یک مدرسه باشند؟

(۱) ۴۲۰۰ (۲) ۵۴۰۰ (۳) ۵۶۰۰ (۴) ۶۳۰۰

(شکلب رهبی)

مطابق نمودار گزینه «۳»، اگر نمودار تابع $y = f(x)$ دو واحد به سمت

راست و دو واحد به سمت بالا منتقل شود نمودار تابع

$$y = f(x - 2) + 2 \text{ به دست می‌آید.}$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

☐ ۴

☒ ۳ ✓

☐ ۲

☐ ۱

بنابر فرضیات مسئله داریم:

$$3g(0) = 6 \Rightarrow g(0) = 2 \xrightarrow{\text{تابع } g \text{ ثابت است}} g(x) = 2$$

از طرفی تابع $f(x)$ یک تابع همانی می‌باشد. پس $f(x) = x$ و در نتیجه

خواهیم داشت:

$$(f(x) + 2x)(x - g(x)) = 1 \Rightarrow (x + 2x)(x - 2) = 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0 \xrightarrow[\Delta = b^2 - 4ac]{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \left| 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

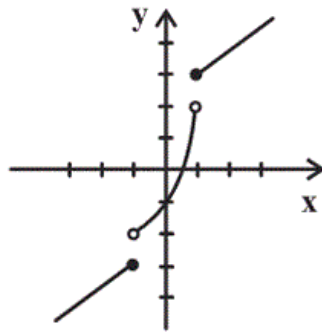
(ریاضی ۱- تابع - صفحه ۱۱۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱



با توجه به نمودار تابع، روشن است که دو عدد صحیح ۲ و -۲ عضو برد تابع f نیستند. به عبارتی:

$$R_f = (-\infty, -3] \cup (-2, 2) \cup [3, +\infty)$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۴۴

(سینا معمور)

$$y = (3 - x)^2 \xrightarrow[\text{واحد به سمت راست}]{x \rightarrow x - 2} y = (5 - x)^2$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به سمت بالا}]{4} y = (5 - x)^2 + 4$$

برای یافتن نقطه تقاطع، معادله‌های دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$(3 - x)^2 = (5 - x)^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 10x + 29$$

$$\Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 4$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

از هر یک از مناطق، $(n-1)$ راه به مناطق دیگر وجود دارد. از طرفی می‌دانیم که راه بین دو منطقه (1) و (2) هم جزء راه‌های منطقه (1) به حساب می‌آید و هم جزء راه‌های منطقه (2) ، پس داریم:

$$\underbrace{(n-1) + \dots + (n-1)}_{\text{تا } n} = 2 \times 55$$

$$n(n-1) = 11 \times 10 \Rightarrow n = 11$$

برای حل معادله درجه دوم می‌توانستید از روش کلی (دلتا) هم استفاده کنید.

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد، لذا دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد؛

$$\begin{array}{c} \text{حالت ۴} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{حالت ۳} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{حالت ۱} \\ \hline \end{array} \Rightarrow 4 \times 3 = 12 \text{ : تعداد حالات}$$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد؛

$$\begin{array}{c} \text{حالت ۳} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{حالت ۳} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{حالت ۱} \\ \hline \end{array} \Rightarrow 3 \times 3 = 9 \text{ : تعداد حالات}$$

در نتیجه طبق اصل جمع تعداد اعداد سه رقمی مطلوب برابر است با:

$$12 + 9 = 21$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

توجه کنید «ی» در اول کلمه، حرف نقطه‌دار است.

$$\begin{array}{c} \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c} \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c} \text{ت ب ی} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} ۳ \\ \hline \end{array} = ۶۰$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

هر عدد از مجموعه، می‌تواند در زیرمجموعه مد نظر موجود باشد یا نباشد. لذا برای هر عدد دو حالت داریم، اما باید به این نکته توجه داشت که اعداد ۱، ۲، ۵، ۷ و ۹ تکلیفشان مشخص است و دقیقاً یک حالت دارند. پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\frac{1}{1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2} \Rightarrow 2^5 = 32$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۴

۳

۲✓

۱

$$\binom{m+3}{2} = m^2 + 2m$$

$$\Rightarrow \frac{(m+3)(m+2)}{2} = m(m+2) \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$$

مقدار $m = -2$ ، قابل قبول نیست، زیرا $\binom{1}{2}$ بی‌معنی است.

$$\Rightarrow P(7, m) = P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۰)

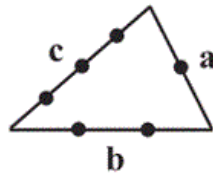
۴

۳

۲✓

۱

در کل سه حالت برای تشکیل یک چهارضلعی محدب وجود دارد که عبارتند از:



حالت ۱: یک رأس از ضلع a ، یک رأس از ضلع b و دو رأس از ضلع c انتخاب شود:

$$\binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{2} = 6$$

حالت ۲: یک رأس از ضلع a ، دو رأس از ضلع b و یک رأس از ضلع c انتخاب شود:

$$\binom{1}{1} \binom{2}{2} \binom{3}{1} = 3$$

حالت ۳: دو رأس از ضلع b و دو رأس از ضلع c انتخاب شود:

$$\binom{2}{2} \binom{3}{2} = 3$$

بنابراین تعداد چهارضلعی‌های حاصل برابر است با:

$$6 + 3 + 3 = 12$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶ و ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$S_{10} = 4S_5 \Rightarrow \frac{10}{2}[2a_1 + 9d] = 4 \times \frac{5}{2}[2a_1 + 4d]$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 9d = 4a_1 + 8d \Rightarrow d = 2a_1$$

$$\Rightarrow \frac{a_8}{a_3} = \frac{a_1 + 7d}{a_1 + 2d} = \frac{15a_1}{5a_1} = 3$$

(مسابقان ۱- چیر و معادله- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲✓

۱

دهانه سهمی رو به پایین است. پس $a < 0$ می‌باشد.

از طرفی نمودار تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{4}$ قطع کرده

است. پس $b = \frac{1}{4}$. حال از آنجایی که طول رأس سهمی عددی مثبت است، داریم:

$$-\frac{(2-a)}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{2-a}{2a} < 0 \xrightarrow{a < 0} 2-a > 0 \Rightarrow a < 2$$

و در نهایت باید شرط $\Delta > 0$ را هم بررسی کنیم:

$$\Delta = (2-a)^2 - 4a\left(\frac{1}{4}\right) = a^2 - 4a + 4 - a = a^2 - 5a + 4 > 0$$

$$\Rightarrow (a-4)(a-1) > 0 \Rightarrow a > 4 \text{ یا } a < 1$$

از اشتراک روابط فوق نتیجه می‌گیریم که: $a < 0$

(مسابقان ۱- چیر و معادله- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱✓

ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(x^2 - 1)^2 - 13x^2 + 13 + 42 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)^2 - 13(x^2 - 1) + 42 = 0$$

حال با تغییر متغیر $x^2 - 1 = t$ داریم:

$$t^2 - 13t + 42 = 0 \Rightarrow (t - 6)(t - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 7 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 6 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 - 1 = 7 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \sqrt{7} \times (-\sqrt{7}) \times \sqrt{8} \times (-\sqrt{8}) = 7 \times 8 = 56$$

(مسابان ۱- چبر و معادله - صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳✓

۲

۱

(سینا مهمرپور)

فرض می‌کنیم خسرو در t ساعت کاغذهای تبلیغاتی را پخش می‌کند. در این صورت علی در $t + 12$ و هر دو با هم در $t - 4$ ساعت این کار را انجام می‌دهند. بنابراین:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+12} = \frac{1}{t-4} \xrightarrow{\times t(t-4)(t+12)}$$

$$(t+12)(t-4) + t(t-4) = t(t+12)$$

$$\Rightarrow t^2 + 8t - 48 + t^2 - 4t = t^2 + 12t$$

$$\Rightarrow t^2 - 8t - 48 = 0 \Rightarrow (t-12)(t+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 12 \\ t = -4 \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

(مسابان ۱- چبر و معادله - صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳✓

۲

۱

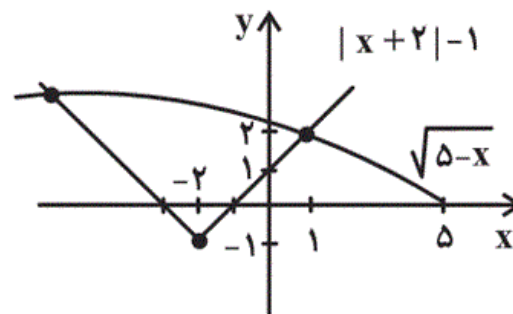
می‌دانیم $x = 1$ یک جواب معادله است. پس باید در رابطه مذکور صدق کند:

$$|x+2| - \sqrt{a-x} = 1 \xrightarrow{x=1} |3| - \sqrt{a-1} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-1} = 2 \Rightarrow a-1 = 4 \Rightarrow a = 5$$

در نتیجه معادله به صورت $|x+2| - 1 = \sqrt{5-x}$ خواهد بود.

حال کافی است به روش هندسی تعداد نقاط برخورد دو تابع را بیابیم:



(مسابقه ۱- پیر و معادله - صفحه‌های ۱۴ و ۲۰ تا ۲۸)

۴

۳

۲✓

۱

راه‌حل اول: معادله خط AB را می‌نویسیم:

$$y - 1 = \frac{1-1}{4-(-3)}(x - (-3)) \Rightarrow y = x + 4 \text{ یا } x - y + 4 = 0$$

طول ارتفاع CH ، همان فاصله نقطه C از خط AB است:

$$\frac{|2-3+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

راه‌حل دوم: اگر طول اضلاع را حساب کنیم مشخص می‌شود که $CA = CB$ می‌باشد. پس مثلث در رأس C متساوی‌الساقین است. از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، میانه وارد بر قاعده نیز می‌باشد. پس کافیست مختصات نقطه وسط AB را محاسبه کنیم:

$$H = \frac{A+B}{2} \Rightarrow H\left(\frac{4-3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

۴

۳✓

۲

۱

دو تابع f و g را برابر می‌نامیم، به شرطی که:

$$D_f = D_g \quad (۱)$$

(۲) به ازای هر x از دامنه دو تابع $f(x) = g(x)$

پس می‌توان نتیجه گرفت برای این که دو تابع برابر باشند، باید ضابطه تابع g به صورت زیر باشد:

$$g(x) = \frac{a(x + \frac{b}{a})}{x^2 + cx + d} = \frac{a(x - 3)}{(x - 3)^2} = \frac{5}{x - 3}$$

$$\Rightarrow x^2 + cx + d = (x - 3)^2 \Rightarrow x^2 + cx + d = x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow c = -6, \quad d = 9$$

$$a = 5 \quad \text{از طرفی:}$$

$$\frac{b}{a} = -3 \Rightarrow b = -15$$

بنابراین:

$$a + b + c + d = 5 - 15 - 6 + 9 = -7$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$$

$$(۱) \quad x^2 + x < 0$$

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$(۲) \quad x^2 + x \geq -1$$

$$x^2 + x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

از اشتراک روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^{1398} < 1 \Rightarrow [x^{1398}] = 0$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Z}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Z}} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{-1} + \frac{1}{-1} = -2$$

(مسابقان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

۶۰-

(یاسین سپهر)

$$f(x) = x^2 - 6x \Rightarrow y = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} - 9 \Rightarrow y = (x-3)^2 - 9$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = y+9 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = \sqrt{y+9} \Rightarrow x = 3 + \sqrt{y+9} \\ x-3 = -\sqrt{y+9} \Rightarrow x = 3 - \sqrt{y+9} \end{cases} \text{ (غ ق ق)}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+9}$$

(مسابقان ۱- تابع - صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

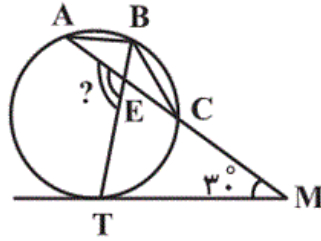
۴

۳

۲

۱ ✓

چون طول دو وتر AB و BC برابر است، پس طول دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ نیز برابر است. حال با توجه به شکل داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{E\hat{T}M} = \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CT}}{2} \xrightarrow{\widehat{AB} = \widehat{BC}} \widehat{E\hat{T}M} = \widehat{T\hat{E}M} \\ \widehat{T\hat{E}M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CT}}{2} \end{array} \right.$$

پس مثلث TEM متساوی الساقین است و داریم:

$$\widehat{M} + \widehat{E\hat{T}M} + \widehat{T\hat{E}M} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{T\hat{E}M} = \widehat{E\hat{T}M} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{A\hat{E}T} = 180^\circ - \widehat{T\hat{E}M} = 105^\circ$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

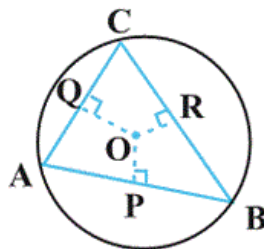
۴ ✓

۳

۲

۱

در هندسه دهم آموختیم که در یک مثلث، ضلع روبه‌رو به بزرگ‌ترین زاویه، بزرگ‌ترین ضلع است و ضلع روبه‌رو به کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌ترین ضلع است. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = 70^\circ \\ \hat{B} = 50^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} < \hat{C} < \hat{A} \Rightarrow AC < AB < BC$$

می‌دانیم هر چه وتر بزرگ‌تر باشد، به مرکز دایره نزدیک‌تر است. پس:

$$AC < AB < BC \Rightarrow OQ > OP > OR$$

(هنر سه ۲- صفحه ۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\begin{cases} S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 \\ S_{AOB \text{ قطاع}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad \alpha = 90^\circ = \frac{\pi R^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه دایره}} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) = \pi - 2 \Rightarrow R = 2$$

حال برای محاسبه محیط قطعه دایره، باید طول کمان AB را با طول وتر AB جمع کنیم:

$$\begin{cases} \Delta AOB \Rightarrow AB = R\sqrt{2} \quad R=2 \Rightarrow 2\sqrt{2} \\ \text{طول کمان AB} = \frac{\pi R}{180} \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط قطعه دایره} = \pi + 2\sqrt{2}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۲ و ۲۳)

۴ ✓

۳

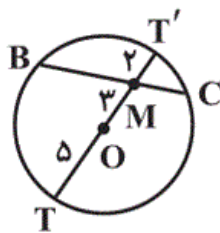
۲

۱

(امیر حسین ابومحبوب)

۱۰۴-

با رسم امتداد OM از دو طرف و مشخص شدن قطر TT' داریم:



$$\begin{cases} OT = R = 5 \Rightarrow MT = R + OM = 5 + 3 = 8 \\ MT' = OT' - OM = R - OM = 5 - 3 = 2 \end{cases}$$

حال با توجه به قضیه روابط طولی در دایره داریم:

$$BM \times MC = T'M \times MT = 2 \times 8 = 16$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

می‌دانیم که مماس‌های رسم شده بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره طول‌های مساوی دارند. لذا: $PA = PB = ۱۰$. در نتیجه، طبق قضیه فیثاغورس:

$$BC = \sqrt{PB^2 - PC^2} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸$$

اکنون بنابر روابط طولی در دایره، داریم:

$$CA^2 = CD \times CB \Rightarrow ۴^2 = CD \times ۸ \Rightarrow CD = ۲$$

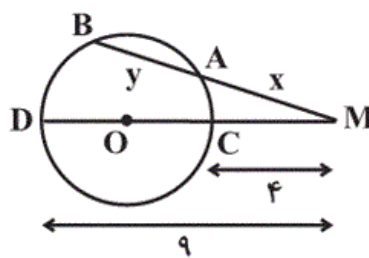
(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۲۰)

۴ ✓

۳

۲

۱



$$MA \times MB = MC \times MD = ۴ \times ۹ = ۳۶ \Rightarrow x(x + y) = ۳۶$$

از طرفی طبق فرض مسئله $x = y + ۱$ است، با جای گذاری داریم:

$$(y + ۱)(y + ۱ + y) = ۳۶ \Rightarrow (y + ۱)(۲y + ۱) = ۳۶$$

$$\Rightarrow ۲y^2 + ۳y - ۳۵ = ۰ \Rightarrow y = \frac{-۳ \pm \sqrt{۲۸۹}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} y = ۳/۵ \\ y = -۵ \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

پس $AB = ۳/۵$ و $MA = ۴/۵$ و در نتیجه $MB = ۳/۵ + ۴/۵ = ۸$ است.

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

نکته: همواره طول مماس مشترک خارجی از طول مماس مشترک داخلی دو دایره بزرگ‌تر است، حال با توجه به روابط آن‌ها داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{طول مماس مشترک خارجی} : ۶ = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (R_1 - R_2)^2} \\ \text{طول مماس مشترک داخلی} : ۴ = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (R_1 + R_2)^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ۳۶ = (O_1O_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 \\ ۱۶ = (O_1O_2)^2 - (R_1 + R_2)^2 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{تفریق}} ۲۰ = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 \Rightarrow ۲۰ = ۴R_1R_2$$

$$\Rightarrow R_1R_2 = ۵$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱

یک چندضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چندضلعی است. اگر

S مساحت و $2P$ محیط باشد، اندازه شعاع دایره محاطی برابر $r = \frac{S}{P}$ است،

بنابراین:

$$2P = ۱۶ - ۸\sqrt{۲} \Rightarrow P = ۸ - ۴\sqrt{۲}$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{۸\sqrt{۲} - ۸}{۸ - ۴\sqrt{۲}} = \frac{۸(\sqrt{۲} - ۱)}{۴\sqrt{۲}(\sqrt{۲} - ۱)} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

فاصله نقطه I از هر هشت ضلع برابر $\sqrt{۲}$ است، پس مجموع فاصله‌های نقطه I از اضلاع، برابر $۸\sqrt{۲}$ می‌باشد.

(هندسه ۲ - صفحه ۲۵)

۴

۳

۲✓

۱

هر مثلث چهار دایره محاطی دارد (یک دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی) کوچک ترین دایره محاطی هر مثلث، دایره محاطی داخلی آن و بزرگ ترین دایره محاطی هر مثلث، دایره محاطی خارجی نظیر بزرگ ترین ضلع مثلث است.

(از دو رابطه $r = \frac{S}{P}$ و $r_a = \frac{S}{P-a}$ این موضوع مشخص می شود.)

حال با توجه به رابطه دایره محاطی داریم: (با فرض این که محیط مثلث $2P$ باشد)

$$P = \frac{3+5+6}{2} = 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{شعاع بزرگ ترین دایره محاطی } r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{S}{7-6} = S \\ \text{شعاع کوچک ترین دایره محاطی } r = \frac{S}{P} = \frac{S}{7} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{r_a}{r} = \frac{S}{\frac{S}{7}} = 7$$

(هندسه ۲ - صفحه های ۲۵ و ۲۶)

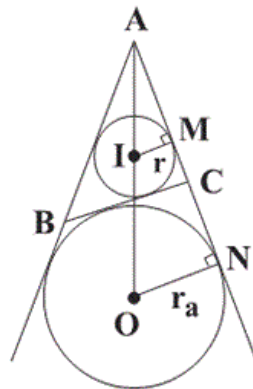
۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا شکل صورت سوال را رسم می‌کنیم. می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس:



$$\hat{I}MA = \hat{O}NA = 90^\circ \Rightarrow MI \parallel ON$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{r}{r_a} = \frac{AM}{AN}$$

$$\Rightarrow \frac{2/5}{7/5} = \frac{5}{AN} \Rightarrow AN = 15$$

$$\Rightarrow MN = 15 - 5 = 10$$

می‌دانیم طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی این دو دایره به ترتیب از

رابطه‌های $\sqrt{OI^2 - (r_a - r)^2}$ و $\sqrt{OI^2 - (r_a + r)^2}$ به دست می‌آید.

پس:

$$MN = 10 = \sqrt{OI^2 - (7/5 - 2/5)^2}$$

$$\Rightarrow OI^2 = 125$$

$$\Rightarrow \text{طول مماس مشترک داخلی دو دایره} = \sqrt{OI^2 - (r_a + r)^2}$$

$$= \sqrt{125 - (7/5 + 2/5)^2} = 5$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۱، ۲۱، ۲۲ و ۲۶)

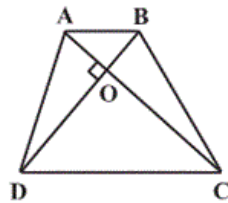
۴

۳

۲✓

۱

در هر مثلث قائم الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف طول وتر است.
داریم:



$$\begin{cases} AD = 8 \\ \angle ADO = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow AO = 4, DO = 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle AOD} = 8\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BCD} \Rightarrow S_{\triangle ADC} - S_{\triangle OCD} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle OCD}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} \Rightarrow S_{\triangle BOC} = 8\sqrt{3}$$

(هنر سه ۱- پنر ضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

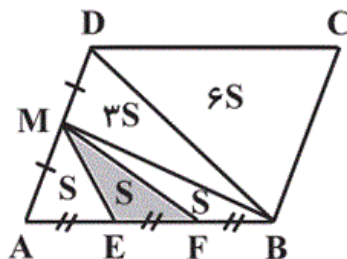
۴✓

۳

۲

۱

فرض کنید مساحت مثلث MEF برابر S باشد، MB و قطر BD را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث‌های AME، MEF و MFB با هم برابر است. BM میانه وارد بر ضلع AD در مثلث ABD است، پس مساحت مثلث MBD برابر ۳S می‌شود. اما قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند، پس مساحت مثلث BDC برابر ۶S می‌شود.



$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت } \triangle MEF}{\text{مساحت } ABCD} = \frac{S}{12S} = \frac{1}{12}$$

(هنر سه ۱- پنر ضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۴

۳✓

۲

۱

در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$$

با توجه به این که میانه‌ها در هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، داریم:

$$AG = 2GM \Rightarrow \frac{GM}{AG} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

(هندسه ۱- پندرضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

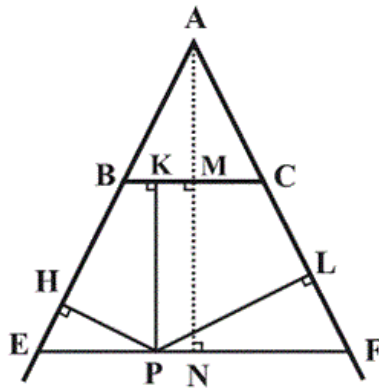
☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

از نقطه P خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند.



از نقطه A، عمودی بر BC (و در نتیجه EF) رسم می‌کنیم. مثلث AEF متساوی‌الاضلاع است، زیرا سه زاویه 60° دارد و در نتیجه طول ارتفاع‌های این مثلث برابر یکدیگر است. بنا به فعالیت ۱ صفحه ۶۸ کتاب درسی هندسه ۱ داریم:

$$PH + PL = AN \Rightarrow ۸\sqrt{۳} = AN \Rightarrow ۸\sqrt{۳} = AM + MN$$

$$\xrightarrow{MN=PK} ۸\sqrt{۳} = AM + ۴\sqrt{۳} \Rightarrow AM = ۴\sqrt{۳}$$

اگر طول هر ضلع مثلث ABC را a فرض کنیم، داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۸$$

(هندسه ۱- پندرضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴

۳

۲✓

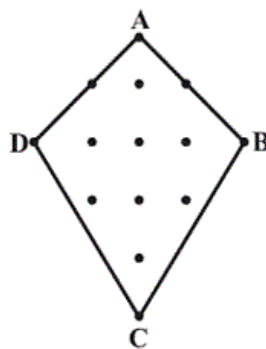
۱

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$$

حال طبق رابطه پیک اگر تعداد نقاط شبکه‌ای واقع در درون یک چندضلعی شبکه‌ای (نقاط درونی) برابر i و تعداد نقاط شبکه‌ای واقع بر روی رئوس و اضلاع چندضلعی (نقاط مرزی) برابر b باشد، اندازه مساحت برابر است با:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 10 = \frac{b}{2} + i - 1 \xrightarrow{i=8} \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$

پس ۶ نقطه روی محیط کایت قرار دارد. شکل زیر یکی از حالت‌های کایت مفروض را نمایش می‌دهد:



(هنر سه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۵، ۶۶ و ۶۹ تا ۷۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

۹۶-

(رضا عباسی اصل)

تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی بزرگ‌تر را b و i و چندضلعی کوچک‌تر را b' و i' می‌نامیم. بنابه فرض داریم:

$$S - S' = \left(i + \frac{b}{2} - 1\right) - \left(i' + \frac{b'}{2} - 1\right) = (i - i') + \left(\frac{b}{2} - \frac{b'}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16/5 = i - i' + \frac{13}{2} - \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow 16/5 = i - i' + 3/5 \Rightarrow i - i' = 13$$

(هنر سه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

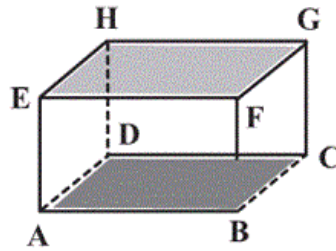
۴

۳ ✓

۲

۱

مطابق شکل دو وجه $ABCD$ و $EFGH$ را در نظر می‌گیریم. ضلع AB در وجه $ABCD$ با ضلع‌های GF و EH در وجه $EFGH$ متناظر است.



پس هر ضلع وجه پایین با دو ضلع وجه بالا متناظر است، لذا ۸ جفت ضلع متناظر در وجه‌های مزبور وجود دارد.

(هندسه ۱- تقسیم فضایی - صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

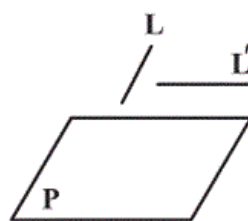
۴

۳

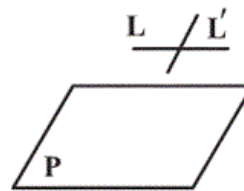
۲ ✓

۱

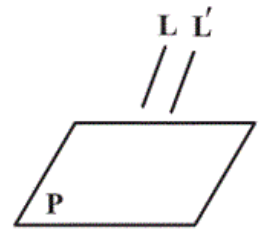
دو خط متمایز L و L' با صفحه P موازی‌اند، با توجه به شکل زیر این دو خط می‌توانند متناظر، متقاطع یا موازی باشند.



متناظر



متقاطع



موازی

(هندسه ۱- تقسیم فضایی - صفحه‌های ۷۹ تا ۸۱)

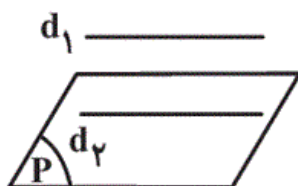
۴ ✓

۳

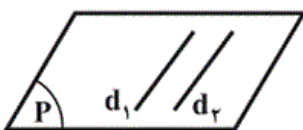
۲

۱

گزاره «الف» الزاماً درست نیست. مطابق شکل اگر خط d_1 با صفحه P موازی باشد، آنگاه خط d_2 می‌تواند بر صفحه واقع باشد.



گزاره «ب» درست است. مطابق شکل، صفحه P می‌تواند شامل دو خط موازی d_1 و d_2 باشد.



گزاره «پ» درست است. اگر صفحه P یکی از دو خط موازی d_1 و d_2 را قطع کند، لزوماً دیگری را نیز قطع خواهد کرد.

(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه ۸۱)

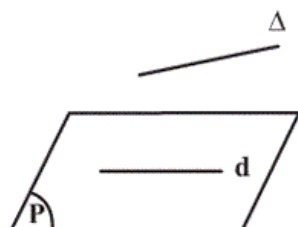
۴

۳✓

۲

۱

خط Δ با خط d نمی‌تواند متقاطع باشد، زیرا اگر خط Δ خط d را قطع کند، آنگاه صفحه P را نیز قطع می‌کند که این خلاف فرض است. پس دو خط d و Δ می‌توانند موازی یا متناظر باشند.



(هندسه ۱- تجسم فضایی- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۱)

۴

۳✓

۲

۱

دنباله افزایشی است، پس قدر نسبت آن بزرگ‌تر از یک است، داریم:

$$4, a, 9, b, \dots$$

بنا به تعریف دنباله هندسی:

$$\frac{a}{4} = \frac{9}{a} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

قدر نسبت دنباله برابر است با:

$$q = \frac{a}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{4\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{3}{2}} = 8\left(\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1\right)$$

$$\Rightarrow S_6 = 8\left(\frac{729}{64} - 1\right) = \frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{2} + 5 + \beta = 8 \Rightarrow \frac{3\beta}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 2$$

β ریشه معادله است، پس در آن صدق می‌کند، بنابراین:

$$\beta = 2 : (2)^2 - 8(2) + m = 0 \Rightarrow m = 12$$

(حسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۷ تا ۱۶)

۴

۳

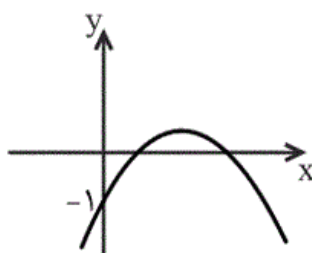
۲ ✓

۱

ضریب x^2 باید منفی باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع درجه دوم الزاماً از ناحیه اول می‌گذرد. بنابراین:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

با توجه به اینکه $a < 3$ است، حالتی را در نظر می‌گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد، سپس مجموعه جواب بدست آمده را از جواب $a < 3$ کم می‌کنیم. چون عرض از مبدأ -1 است و $a < 3$ (ماکزیمم دارد) پس نمودار زیر برای عبور تابع از ناحیه اول قابل رسم است.



با توجه به نمودار، شرط‌های زیر برقرار خواهند بود:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+6) > 0$$

$$a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad \text{I}$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها مثبت: } \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a < 3 \quad \text{II}$$

$$\text{جمع ریشه‌ها مثبت: } \frac{-a}{a-3} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3 \quad \text{III}$$

از اشتراک شرط‌های I، II و III، مجموعه مقادیر a به صورت $2 < a < 3$ خواهد بود. یعنی اگر $2 < a < 3$ باشد نمودار حتماً از ناحیه اول می‌گذرد. با کم کردن این جواب، از شرط $a < 3$ خواهیم داشت:

$$a \leq 2$$

پس با شرط $a \leq 2$ نمودار تابع از ناحیه اول نمی‌گذرد.

(مسئله ۱- فیبر و معادله - صفحه‌های ۷ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\frac{11}{2} = \frac{1}{2} + A \Rightarrow A = 5 \Rightarrow \frac{12-x}{x^2+x} = \frac{x}{x+1} + \frac{5}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{12-x}{x(x+1)} = \frac{x^2+5x+5}{x(x+1)}$$

$$\Rightarrow x^2+5x+5=12-x$$

$$\Rightarrow x^2+6x-7=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-7 \end{cases}$$

بنابراین جواب دیگر معادله، $x = -7$ است.

(مسئله ۱- فیبر و معادله - صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

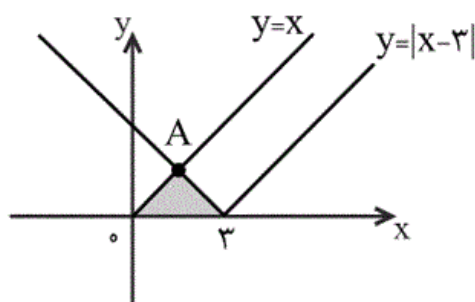
۲ ✓

۱

۶۵-

(کتاب آبی)

نمودار تابع $y = |x-3|$ را رسم می‌کنیم. اگر نمودار تابع $y = |x|$ را سه واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y = |x-3|$ به دست می‌آید:



در نمودار فوق، ناحیه هاشورخورده بین نمودار تابع $y = |x-3|$ ، نیمساز ناحیه اول و محور x ها محدود شده است. مختصات نقطه تلاقی (A) را به دست می‌آوریم:

$$x_A = |x_A - 3| \xrightarrow{x_A < 3} x_A = -(x_A - 3)$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{3}{2} \xrightarrow{y=x} y_A = \frac{3}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2.25$$

(مسئله ۱- فیبر و معادله - صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به شکل، برای یافتن طول اضلاع این مستطیل، باید فاصله نقطه A را از دو خط L و L' بدست آوریم.

$$AB = \frac{|2 \times 8 - 5 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}, AC = \frac{|2(5) + 8 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S(ABDC) = AB \times AC = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9 \frac{3}{5}$$

(مسابان ۱- جبر و معادله - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

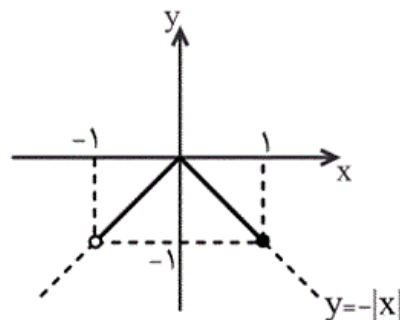
۲✓

۱

۶۷-

(کتاب آبی)

گزینه (۱) قابل قبول نیست، زیرا دامنه تابع باید بازه $[-1, 1]$ باشد و قابل تغییر نیست. برای بررسی گزینه‌های دیگر، ابتدا برد تابع را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن برد تابع، نمودار آن را با توجه به دامنه رسم می‌کنیم.



همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود، برد تابع، بازه $[0, -1]$ است که باید زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه باشد. از آنجا که در گزینه‌های (۲) و (۴) بازه $[0, -1]$ زیرمجموعه هم‌دامنه نیست، این دو گزینه نیز رد می‌شوند و پاسخ سؤال گزینه (۳) است.

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۴

۳✓

۲

۱

برای اینکه دامنه تابع داده شده $R - \{b\}$ باشد، باید مخرج کسر فقط یک ریشه $x = b$ را داشته باشد، یعنی تابع f باید به صورت

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-b)^2} \text{ باشد.}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-b)^2} = \frac{2x+1}{x^2 - 2bx + b^2}$$

از مقایسه عبارت فوق با $f(x) = \frac{2x+1}{x^2 - 3x + a - 5}$ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} -2b = -3 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ b^2 = a - 5 \Rightarrow a = \frac{9}{4} + 5 = \frac{29}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - b = \frac{29}{4} - \frac{3}{2} = \frac{23}{4}$$

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳✓

۲

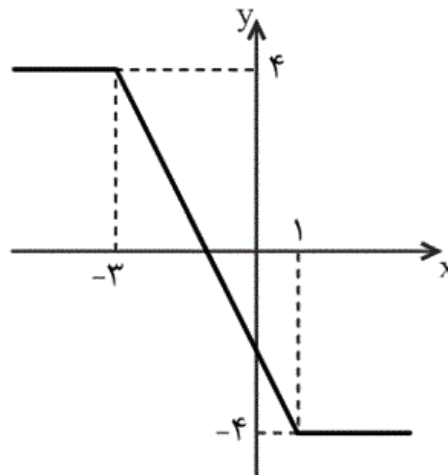
۱

با تعیین علامت قدرمطلق، تابع سه ضابطه‌ای زیر حاصل شود:

$$|x-1| - |x+3| = \begin{cases} -x+1+x+3 & , \quad x \leq -3 \\ -x+1-x-3 & , \quad -3 < x < 1 \\ x-1-x-3 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & , \quad x \leq -3 \\ -2x-2 & , \quad -3 < x < 1 \\ -4 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

پس نمودار تابع به صورت زیر است.



با توجه به نمودار، تابع در فاصله $[-3, 1]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

(مسئله ۱- ترکیبی- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵ و ۵۴ تا ۵۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

دو تابع $ax + by = ۸$ و $۲x - ۳y = b$ نسبت به خط $y = x$ متقارن هستند، بنابراین وارون یکدیگرند. در نتیجه اگر در یکی از این توابع جای x و y را عوض کنیم باید با دیگری مساوی و منطبق بر آن باشد، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ax + by = ۸ & (۱) \\ ۲x - ۳y = b \end{cases} \xrightarrow[\text{خط } y = x]{\text{قرینه نسبت به}} \begin{cases} ax + by = ۸ \\ ۲y - ۳x = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۳x + ۲y = b \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲), (۱)} \frac{a}{-۳} = \frac{b}{۲} = \frac{۸}{b} \Rightarrow b^2 = ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۴ \Rightarrow \frac{a}{-۳} = ۲ \Rightarrow a = -۶ \Rightarrow a + b = -۲ \\ b = -۴ \Rightarrow \frac{a}{-۳} = -۲ \Rightarrow a = ۶ \Rightarrow a + b = ۲ \end{cases}$$

(مسائل ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

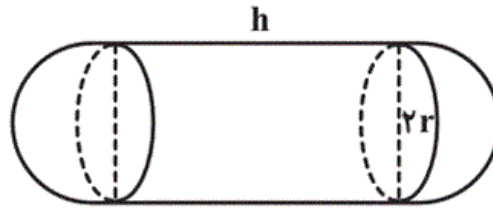
۴

۳

۲ ✓

۱

اگر شعاع نیم کره را r در نظر بگیریم، می توانیم حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسیم:



$$V_{\text{تانکر}} = V_{\text{استوانه}} + 2(V_{\text{نیم کره}}) = V_{\text{استوانه}} + V_{\text{کره}}$$

$$\Rightarrow V(r) = \pi r^2 h + \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\xrightarrow{h=3r} V(r) = 3\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{13}{3}\pi r^3$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه های ۱۰۹ و ۱۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

می دانیم ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ می باشد. پس:

اولاً ضرب x^2 باید برابر صفر باشد $\leftarrow a - c = 0 \leftarrow a = c$

دوماً قسمت عددی باید صفر باشد $\leftarrow -4 + b = 0 \leftarrow b = 4$

سوماً ضرب x در مجموع باید برابر ۱ باشد

$$\leftarrow a - b = -2 \leftarrow a = b - 2$$

$$\xrightarrow{b=4} a = 4 - 2 = 2 \xrightarrow{c=a} c = 2$$

می دانیم در تابع همانی $f(x) = x$ می باشد، پس:

$$f(a) = a = 2$$

$$f(b) = b = 4 \Rightarrow \frac{2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f(a+c) = a+c=6$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه های ۱۰۹ و ۱۱۰)

۴

۳

۲✓

۱

از آنجایی که تابع g یک تابع همانی می‌باشد، لذا مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب آن برابرند:

$$\begin{cases} a^2 - 25a = 0 \Rightarrow a(a-5)(a+5) = 0 \Rightarrow a = 0, & a = \pm 5 & (1) \\ 2 = 3b - 4 \Rightarrow b = 2 \\ 26 = a^2 + 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5 & (2) \end{cases}$$

از اشتراک روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $a = \pm 5$

۴

۳

۲✓

۱

با انتقال تابع به اندازه ۲ واحد به سمت راست و به اندازه ۵ واحد به سمت پایین، ضابطه تابع به صورت زیر می‌شود:

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 10 - 5 & x-2 \geq 1 \\ 3(x-2) - 1 - 5 & x-2 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 11 & x \geq 3 \\ 3x - 12 & x < 3 \end{cases}$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲✓

۱

از تعداد کل حالت‌ها که $9!$ است، تعداد حالت‌هایی را که ۳ خودروی سفید هم‌زمان کنار هم قرار می‌گیرند کم می‌کنیم. توجه کنید که اگر ۳ خودروی سفید کنار هم باشند، ۳! جایگشت با هم دارند و مجموعه آن‌ها با سایر خودروها ۷! جایگشت دارند که تعداد حالت‌ها $7! \times 3!$ می‌شود. پس:

$$3! \times 7! - 9! = \text{تعداد حالت‌های مورد نظر}$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۴✓

۳

۲

۱

شش کتاب به $۷۲۰ = ۶!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند. از طرفی سه کتاب ریاضی، هندسه و فیزیک روی هم $۶ = ۳!$ جایگشت دارند که در ۲ حالت آن، کتاب فیزیک بین کتاب‌های ریاضی و هندسه قرار می‌گیرد. پس تعداد جایگشت‌های مدنظر برابر است با:

$$\frac{۲}{۶} \times ۶! = \frac{۱}{۳} \times ۷۲۰ = ۲۴۰$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

تعداد اعداد زوج بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ با رقم یکان صفر:

$$\underline{\quad ۵ \quad} \times \underline{\quad ۵ \quad} \times \underline{\quad ۴ \quad} \times \underline{\quad ۱ \quad} = ۱۰۰$$

تعداد اعداد زوج بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ با رقم یکان ۲ یا ۴ یا ۶:

$$\underline{\quad ۴ \quad} \times \underline{\quad ۵ \quad} \times \underline{\quad ۴ \quad} \times \underline{\quad ۳ \quad} = ۲۴۰$$

طبق اصل جمع داریم:

$$۱۰۰ + ۲۴۰ = ۳۴۰$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

می‌دانیم:

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{یا} \\ a + b = n \end{cases}$$

پس هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول:

$$x^2 + 12 = 7x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

حالت دوم:

$$x^2 + 12 + 7x = 72 \Rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow (x+12)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -12 \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰ مکان در یک ردیف در نظر می‌گیریم. در جایگاه هشتم و در ۲ جایگاه از ۷ مکان اول باید حرف B را قرار دهیم، در هر یک از ۵ مکان باقی‌مانده از ۷ مکان اول، باید یکی از حروف A یا C را قرار دهیم و در هر یک از مکان‌های نهم و دهم باید یکی از حروف A، B یا C را قرار دهیم. پس:

۲	۲	B	۲	B	۲	۲	B	۳	۳
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

$$\Rightarrow \binom{7}{2} \times 2^5 \times 3^2 = 6048$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۴۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد کل حالات} : \binom{7}{5} = 21 \\ \text{تعداد حالت‌هایی که این ۲ نفر با هم انتخاب شوند} : \binom{2}{2} \binom{5}{3} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 21 - 10 = 11$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶ و ۱۳۳ تا ۱۴۰)

☒ ۴

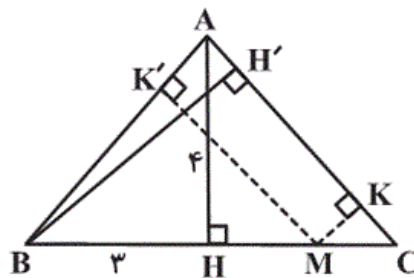
☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(علی ساوویی)

در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:



$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ &= 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AB = 5 \end{aligned}$$

در نتیجه $AC = 5$. اکنون داریم:

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{BH' \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2} \\ \Rightarrow \frac{BH' \times 5}{2} &= \frac{4 \times 6}{2} \Rightarrow BH' = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5} \end{aligned}$$

می‌دانیم که مجموع فواصل هر نقطه روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن با ارتفاع وارد بر ساق برابر است. در نتیجه:

$$MK + MK' = BH' = 4 \frac{4}{5}$$

(هندسه ۱- هندسه‌ای- صفحه ۶۸)

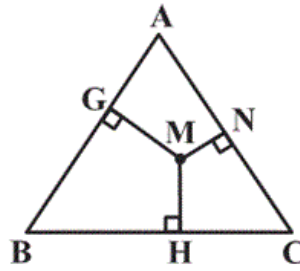
☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

در مثلث متساوی الاضلاع مذکور اگر طول یکی از اضلاع را a بگیریم، داریم:



$$MN + MG + MH = \text{ارتفاع مثلث} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow a = 8$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(8)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(64) = 16\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$S_{\Delta_{EOC}} = S_{\Delta_{EMC}} = \frac{1}{9} S_{\Delta_{ABC}} = \frac{1}{12} S_{ABCD} = \frac{1}{12} \times 30 = 2.5$$
$$S_{\Delta \text{ DOC}} = \frac{1}{f} S_{ABCD} = \frac{1}{f} \times r_0 = \gamma / \Delta$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

☒ ✓

3

2

1

آن گاه مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر $S = \frac{b}{2} + i - 1$ است.

$$\tau = \frac{b}{\gamma} + 0.1 \Rightarrow \frac{b}{\gamma} = \tau \Rightarrow b_{\max} = \lambda$$

۲

☒ 3 ✓

2

1

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2} \times h \times (AB + CD)$$

$$\Rightarrow 10/5 = \frac{1}{2} \times h \times (\sqrt{5} + 2\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow h = \frac{21}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = (1/4)\sqrt{5}$$

(هندسه ۱- پند ضلعی ها- صفحه های ۶۹ تا ۷۳)

۴

۳

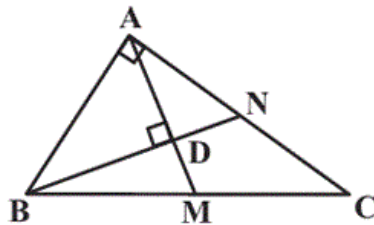
۲

۱ ✓

۱۱۶-

(سینا معمورپور)

می دانیم که میانه ها یک دیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند. به عبارتی داریم:



$$BD = \frac{2}{3} BN \quad (*)$$

از طرفی دو مثلث قائم الزاویه ABN و DBA با یک دیگر متشابه اند. لذا:

$$\triangle ABN \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{AB}{BN} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow AB^2 = BD \cdot BN$$

$$\xrightarrow{(*)} AB^2 = \frac{2}{3} BN^2 \Rightarrow \left(\frac{BN}{AB}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{AB} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

(هندسه ۱- پند ضلعی ها- صفحه های ۶۶ و ۶۷)

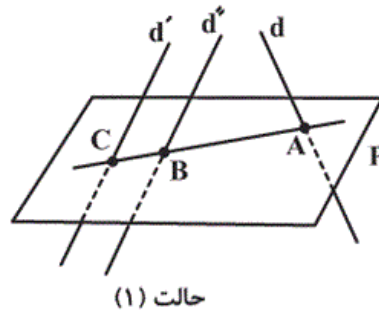
۴ ✓

۳

۲

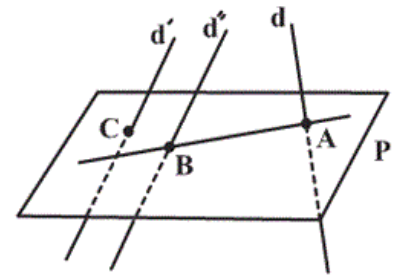
۱

می‌دانیم اگر یکی از دو خط موازی، صفحه‌ای را قطع کند، لزوماً دیگری نیز، صفحه را قطع می‌کند. پس چون خط d'' ، صفحه P را قطع می‌کند، خط d' نیز این صفحه را در نقطه‌ای مانند C قطع خواهد کرد. حال اگر امتداد AB از نقطه C عبور کند (حالت ۱)، d' و AB متقاطع‌اند و در صورتی که امتداد AB از نقطه C عبور نکند (حالت ۲)، d' و AB متناظرند.



حالت (۱)

AB و d' متقاطع‌اند.



حالت (۲)

AB و d' متناظرند

(هندسه ۱- تبسم فضایی- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱✓

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:
گزینه «۱»: در حالت کلی نادرست است؛ از هر سه نقطه غیرهمراستا همواره دقیقاً یک صفحه می‌گذرد.
گزینه «۲»: درست است.
گزینه «۳»: نادرست است؛ به عنوان مثال از هر سه یال هم‌رس در یک مکعب، دو یال بر یال سوم عمود هستند ولی با یکدیگر متقاطع‌اند.
گزینه «۴»: نادرست است؛ از نقطه A خارج صفحه P ، تنها یک صفحه موازی صفحه P می‌توان رسم کرد.

(هندسه ۱- تبسم فضایی- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

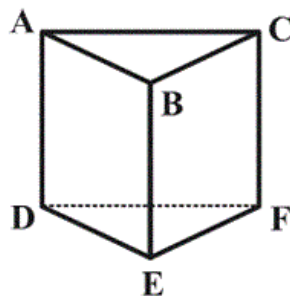
۴

۳

۲✓

۱

منشور سه پهلوی، منشوری است که قاعده آن مثلث است. با توجه به شکل تعداد جفت خط‌های متمایز دوبه‌دو موازی و متناظر مشخص می‌شود.



جفت خطوط دوبه‌دو موازی: $(DF, CA), (EF, BC), (DE, AB)$

۶ جفت $\Rightarrow (CF, AD), (CF, BE), (BE, AD)$

جفت خطوط دو به دو متناظر: $(DF, AB), (EF, AB), (CF, AB)$

$(DF, BC), (DE, BC), (AD, BC), (EF, CA), (DE, CA)$

۱۲ جفت $\Rightarrow (BE, CA), (CF, DE), (AD, EF), (BE, DF)$

(هندسه ۱- تبسم فضایی- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

۴ ✓

۳

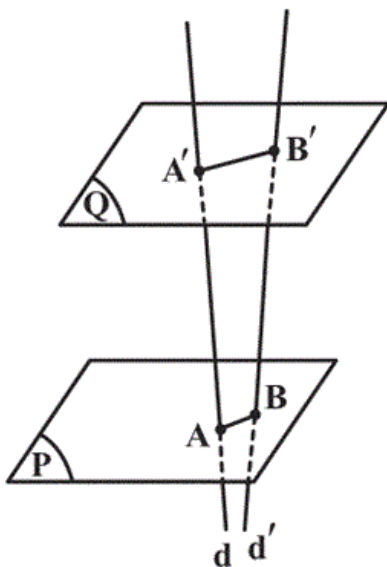
۲

۱

-۱۲۰

(محمد ابراهیم گیتی‌زاده)

می‌دانیم اگر خطی با یکی از دو صفحه موازی، متقاطع باشد، حتماً با دیگری نیز متقاطع است، پس هر صفحه موازی با صفحه P ، دو خط d و d' را قطع می‌کند و خط واصل بین دو نقطه تلاقی، شرایط مسئله را داراست. (مانند خط‌های AB و $A'B'$ در شکل زیر)



(هندسه ۱- تبسم فضایی- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

مساحت دایره $A(r) = \pi r^2$ و محیط آن $P(r) = 2\pi r$ است، پس:

$$r = \frac{P}{2\pi} \Rightarrow A(P) = \pi \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 = \frac{P^2}{4\pi}$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه ۱۰۹)

۴

۳

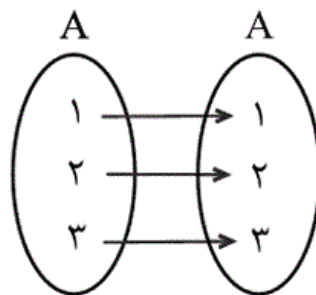
۲✓

۱

اگر هر عضو دامنه، دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، تابع همانی است. مجموعه A ، ۳ عضو دارد.

بنابراین با توجه به نمودار پیکانی، تنها یک تابع همانی وجود دارد.

دقت کنید که از هر عضو مجموعه A باید یک پیکان خارج شود.



(ریاضی ۱- تابع - صفحه ۱۱۰)

۴

۳

۲

۱✓

برد تابع f بازه $[-1, 2]$ است.

در انتقال‌های افقی برد تابع تغییر نمی‌کند.

از طرفی اگر برد تابع $y = f(x)$ ، بازه $[a, b]$ باشد، برد تابع

$f(x) + k$ بازه $[a + k, b + k]$ است.

پس برد تابع مطلوب برابر است با:

$$[-1 + 2, 2 + 2] = [1, 4]$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱✓

$$\frac{f(-1)=3}{x<0} \rightarrow f(x) = ax - 3 \Rightarrow 3 = -a - 3$$

$$\Rightarrow a = -6 \quad (1)$$

$$\frac{f(2)=5}{x \geq 0} \rightarrow f(x) = 2bx^2 + 7 \Rightarrow 5 = 8b + 7$$

$$\Rightarrow -2 = 8b \Rightarrow b = \frac{-1}{4} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} ab = (-6) \left(\frac{-1}{4} \right) = \frac{3}{2}$$

(ریاضی ۱- تابع - صفحه‌های ۱۱۲ و ۱۱۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

۸۵-

(کتاب آبی)

مدیر رستوران می‌تواند هر یک از دسرها را در منو قرار دهد یا قرار ندهد. پس برای هر کدام دو حالت وجود دارد، بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌هایی که می‌تواند دسرها را در منو قرار دهد برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

۸۶-

(کتاب آبی)

دو حالت زیر وجود دارد:

حالت اول:

$$\frac{5}{\text{حرف اول فارسی}} \times \frac{4}{\text{حرف دوم انگلیسی}} \times \frac{5}{\text{حرف سوم فارسی}} = 100$$

حالت دوم:

$$\frac{4}{\text{حرف اول انگلیسی}} \times \frac{5}{\text{حرف دوم فارسی}} \times \frac{4}{\text{حرف سوم انگلیسی}} = 80$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = 100 + 80 = 180$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

در کلمه DAMDARAN سه حرف A و دو حرف D داریم:

(AAA), (DD), M, R, N

هر کدام از (AAA) و (DD) را به صورت یک عضو در نظر می گیریم
که با M, R, N و M جمعاً ۵ شیء داریم:

$$\Rightarrow \text{تعداد جایگشتها} = 5! = 120$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۴

۳

۲

۱✓

به ۱۲ طریق، نفر اول، به ۱۱ طریق، نفر دوم و به ۱۰ طریق، نفر سوم
می توانند انتخاب شوند پس:

$$12 \times 11 \times 10 = 1320$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۴

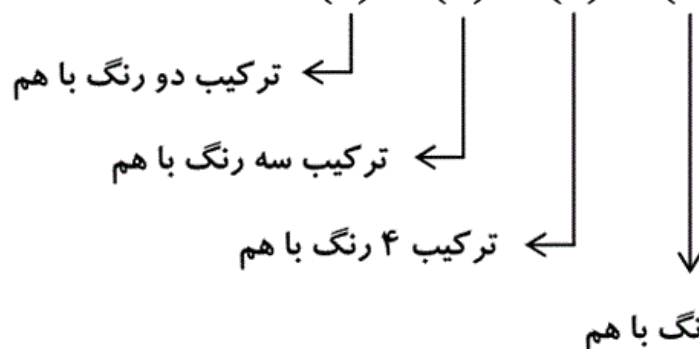
۳

۲

۱✓

ابتدا تمام ترکیبات ۵ رنگ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد کل ترکیبات رنگها} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$



$$= 10 + 10 + 5 + 1 = 26$$

حال از کل ترکیبات رنگها، سه رنگ را برای رنگ‌آمیزی انتخاب می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالات رنگ‌آمیزی} = \binom{26}{3} = \frac{26!}{3!23!}$$

$$= \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23!}{3! \times 23!} = \frac{26 \times 25 \times 24}{6} = 26 \times 25 \times 4 = 2600$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا دو مدرسه از میان هشت مدرسه انتخاب می‌کنیم که این کار به

حالت امکان‌پذیر است. پس از انتخاب این دو مدرسه، دو هم‌تیمی $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

از هر یک از مدرسه‌ها انتخاب می‌کنیم. طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های

مطلوب برابر است با:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} = 6300$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶ و ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴ ✓

۳

۲

۱