۱۶۱- خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم (-44) بر ۱۷ به‌ترتیب q و r هستند. باقی‌ماندهٔ تقسیم q بر r کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۷
۳) ۳-
۴) ۴

۱۶۲- اگر a، b، c و d اعدادی صحیح و $ad = bc$ باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

۱) $c^2 \mid ad$
۲) $a = c$ و $b = d$
۳) $a \mid bc^2$
۴) $bc^2 \mid ad$

۱۶۳- برای دو عدد صحیح a و b $(a \neq 0)$، اگر $a^3 \mid b^2$، آنگاه کدام رابطهٔ زیر ممکن است نادرست باشد؟

۱) $a \mid b$
۲) $a^2 \mid b$
۳) $a^4 \mid b^5$
۴) $a \mid b^2$

۱۶۴- در یک تقسیم، باقی‌مانده برابر ۸ است. با افزودن k واحد به مقسوم و با ثابت ماندن مقسوم‌علیه، خارج قسمت یک واحد افزایش یافته و باقی‌مانده برابر ۲ گردیده است. k چند عدد طبیعی یک رقمی می‌تواند باشد؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۱۶۵- چند عدد طبیعی a وجود دارد به طوری که دو عدد $7n + 3$ و $3n + a$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، نسبت به هم اول باشند؟

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۱۶۶- اگر a عدد زوجی باشد که بر ۴ بخش‌پذیر نیست، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^4 + a^2 + 1$ بر ۴ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۶۷- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

۲) حاصل‌ضرب هر n عدد صحیح متوالی مضرب n است.

۳) مربع هر عدد اول به‌صورت $8k + 1$ است. $(k \in \mathbb{Z})$

۴) مجموع پنج عدد طبیعی متوالی، مضرب ۵ است.

۱۶۸- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۱، باقی‌مانده $\frac{7}{3}$ خارج قسمت است. بیش‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) ۶۹
۲) ۱۳۰
۳) ۱۴۰
۴) ۲۱۰

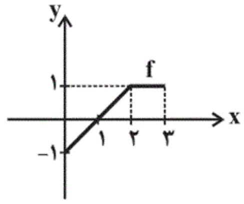
۱۶۹- اگر a عددی طبیعی باشد، آنگاه به ازای چند مقدار a، عدد $a^2 + 2$ بر عدد $a + 2$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۷۰- باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد طبیعی a و $3a$ بر عدد طبیعی b به ترتیب برابر ۱۷ و ۶ هستند. b کدام است؟

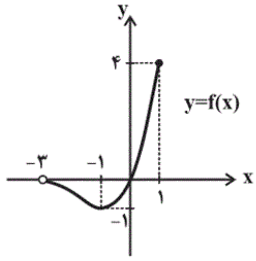
۱) ۳۹
۲) ۴۲
۳) ۴۵
۴) ۴۸

۹۱- اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=-f(x+۲)-۱$ از کدام ناحیه(های) دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟



۱) فقط دوم
۲) اول و دوم
۳) دوم و سوم
۴) فقط اول

۹۲- شکل زیر مربوط به نمودار تابع f است. اگر دامنهٔ تابع $h(x)=-۳f(۱-۲x)+۴$ بازهٔ $[۰,a)$ و برد آن بازهٔ $[b,۷]$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

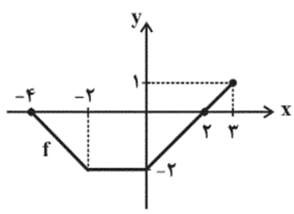


۱) -۶
۲) -۸
۳) -۴
۴) ۴

۹۳- نقطهٔ A روی نمودار تابع f به نقطهٔ A' روی نمودار تابع $y=۲+f\left(\frac{x}{۲}-۱\right)$ تبدیل می‌شود. کم‌ترین فاصلهٔ دو نقطهٔ A و A' از یکدیگر کدام است؟ $(D_f=\mathbb{R})$

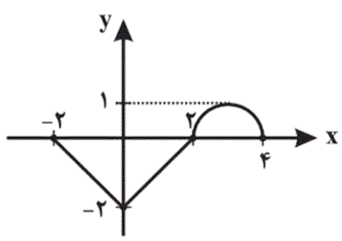
۱) ۲
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۴

۹۴- نمودار تابع f به‌صورت زیر است. دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{f(x)-f(-۲x)}}$ کدام است؟



۱) $\left[-\frac{۳}{۲},۰\right)$
۲) $\left[-\frac{۳}{۲},۲\right)-\{۰\}$
۳) $(۰,۲)$
۴) $\left[-\frac{۳}{۲},۲\right)$

۹۵- اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، حدود m کدام باید باشد تا معادلهٔ $|f(۲x)+۱|-m=۰$، چهار جواب داشته باشد؟



۱) $۰\leq m\leq ۱$
۲) $۰\leq m\leq ۲$
۳) $۰< m\leq ۱$
۴) $۰< m\leq ۲$

۹۶- کدام تابع اکیداً صعودی است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=[x]+[-x]$
۲) $y=x+|x-1|$
۳) $y=x+[x]$
۴) $y=\begin{cases} x+1 & ;x<0 \\ x^2 & ;x\geq 0 \end{cases}$

۹۷- اگر تابع $y=\dfrac{ax+b}{x-1}$ روی بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a+b\geq 0$
۲) $a-b>0$
۳) $b<0$
۴) $a+b<0$

۹۸- اگر تابع $f=\{(4,ax),(2,-2),(3,x^2+b)\}$ به ازای $x\in[-1,2]$ صعودی باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۳

۹۹- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $f(x)=x^3+x^2+ax+b$ بر $x-1$ و $x+1$ به‌ترتیب ۴ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۲

۱۰۰- باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)=x^5-3x^4+ax-1$ بر $x-1$ برابر ۲ و خارج قسمت آن $q(x)$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۹-
۳) ۷
۴) ۷-

هندسه ۳- دوازدهم ، ماتریس،و کاربردها

۱۴۱- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های وارون ماتریس $A+I$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) ۱
۴) ۲

۱۴۲- اگر A و B دو ماتریس مربعی و $A+B=3I$ باشد، ماتریس $A^2+3B+AB$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $8I$ ۳) $9I$ ۴) $6I$

۱۴۳- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times 2}$ مفروض‌اند. اگر $b_{ij}=i^2+1$ باشد، حاصل $(A-B)(A+B)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -11 & -7 \\ -31 & -34 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -44 & -52 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -31 & -62 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -49 & -36 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

۱۴۴- ماتریس اسکالر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مفروض است. اگر $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $C=AB$ و $c_{32}=-4$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۶- ۳) ۳ ۴) ۹

۱۴۵- اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} b & a \\ -2 & 5 \\ a+1 & -b \end{bmatrix}$ و ماتریس AB، ماتریسی قطری باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۴۶- اگر $AXB+C=D$ و A، B و C ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه و وارون‌پذیر باشند، ماتریس X کدام است؟

۱) $D-C$ ۲) $A^{-1}(D-C)B^{-1}$ ۳) $D-A^{-1}CB^{-1}$ ۴) $A(D-C)$

۱۴۷- اگر $A=\begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس A^2 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix}$

۱۴۸- اگر $A^2-2A=I$ باشد، آنگاه A^4-5I کدام است؟

۱) $10A-I$ ۲) $12A-I$ ۳) $12A$ ۴) $10A$

۱۴۹- اگر $A_i=\begin{bmatrix} n & i \\ i & n \end{bmatrix}$، به ازای چه مقداری از n، ماتریس $B=\sum_{i=1}^{21} A_i$ وارون‌پذیر <u>نیست</u>؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۵۰- اگر $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ و $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} c & a \\ b & d \end{bmatrix}$، کدام‌یک از روابط زیر لزوماً برقرار است؟

۱) $c=d=0$ ۲) $a+d=b$ و $c=0$ ۳) $a+d=c$ و $b=0$ ۴) $a+b=c$ و $d=0$

-۱۶۱ (سروش موئینی)

$$-۴۴ = ۱۷(-۳) + ۷ \Rightarrow \begin{cases} q = -۳ \\ r = ۷ \end{cases}$$

$$-۳ = ۷(-۱) + ۴ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = ۴$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۶۲ (علیرضا شریف‌خطیبی)

اگر $a = ۶$، $b = ۴$، $c = ۳$ و $d = ۲$ باشد، آنگاه رابطهٔ $ad = bc$ برقرار است. داریم:

گزینهٔ «۱» نادرست است. $۳^۲ \nmid ۶ \times ۲ \Rightarrow c^۲ \nmid ad$

گزینهٔ «۲» نادرست است. $۶ \neq ۳$ یا $۴ \neq ۲ \Rightarrow a \neq c$ یا $b \neq d$

گزینهٔ «۴» نادرست است. $۴ \times ۹ \nmid ۶ \times ۲ \Rightarrow bc^۲ \nmid ad$

اثبات درستی گزینه «۳»: $ad = bc \Rightarrow a \mid bc \xrightarrow{\times c} a \mid bc^۲$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۶۳ (سیدمحسن فاطمی)

$$a^{۳} \mid b^{۲} \Rightarrow a \times a^{۲} \mid b^{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \mid b^{۲} \\ a^{۲} \mid b^{۲} \Rightarrow a \mid b \Rightarrow a^{۴} \mid b^{۴} \Rightarrow a^{۴} \mid b^{۴} \times b \Rightarrow a^{۴} \mid b^{۵} \end{cases}$$

پس رابطه‌های گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» همواره درست هستند ولی رابطهٔ گزینهٔ «۲» در حالت کلی نتیجه نمی‌شود. به عنوان مثال نقض برای گزینهٔ «۲»، $a = ۴$ و $b = ۸$ را درنظر بگیرید.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ✓۲ ۳ ۴

-۱۶۴ (امیرحسین ابومحبوب)

$$a = bq + ۸$$

$$a + k = b(q + ۱) + ۲ \Rightarrow bq + ۸ + k = bq + b + ۲ \Rightarrow b = k + ۶$$

$$r < b \Rightarrow ۸ < k + ۶ \Rightarrow k > ۲$$

بنابراین k می‌تواند مقادیر ۳ تا ۹ را بپذیرد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

✓۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنید $d = (3n + a, 7n + 3)$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 3n + a \xrightarrow{\times 7} d \mid 21n + 7a \\ d \mid 7n + 3 \xrightarrow{\times 3} d \mid 21n + 9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 7a - 9$$

اگر به ازای تمامی مقادیر n، $d = 1$ باشد، آنگاه لزوماً $7a - 9 = \pm 1$ است

و داریم:

$$\begin{cases} 7a - 9 = 1 \Rightarrow a = \frac{10}{7} \notin \mathbb{N} \\ 7a - 9 = -1 \Rightarrow a = \frac{8}{7} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

عدد زوجی که بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، به‌صورت $۴k + ۲ \; (k \in \mathbb{Z})$ قابل نمایش است. داریم:

$$a^{۲} = (۴k + ۲)^{۲} = ۱۶k^{۲} + ۱۶k + ۴ = ۴\underbrace{\left(۴k^{۲} + ۴k + ۱\right)}_{q}$$

$$= ۴q \; (q \in \mathbb{Z})$$

$$a^{۴} = (۴q)^{۲} = ۱۶q^{۲} = ۴\left(۴q^{۲}\right) = ۴q'$$

$$\Rightarrow a^{۴} + a^{۲} + ۱ = ۴q' + ۴q + ۱ = ۴\underbrace{(q' + q)}_{k} + ۱ = ۴k + ۱ \; (k \in \mathbb{Z})$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۱   ✓۲   ۳   ۴

گزینهٔ «۱»: در میان هر سه عدد متوالی، قطعاً یکی مضرب ۳ و حداقل یکی زوج است، پس حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی مضرب ۶ است.

گزینهٔ «۲»: در بین هر n عدد صحیح متوالی، یکی قطعاً بر n بخش‌پذیر است، پس حاصل‌ضرب هر n عدد صحیح متوالی مضرب n است.

گزینهٔ «۳»: عدد ۲، عددی اول است ولی مربع آن به‌صورت $8k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$ نیست.

گزینهٔ «۴»: ۵ عدد طبیعی متوالی را در نظر می‌گیریم. اگر کوچک‌ترین عدد را برابر n فرض کنیم، داریم:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10$$

$$=5\underbrace{(n+2)}_{k}=5k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(علی سعیدی‌زاد)

$$a = ۲۱q + \frac{۷}{۳}q$$

$$۰ \le r < b \Rightarrow ۰ \le \frac{۷}{۳}q < ۲۱ \Rightarrow ۰ \le q < ۹$$

چون باقی‌مانده عددی صحیح و نامنفی است، پس $\max(q) = ۶$ می‌باشد و

داریم:

$$\max(a) = ۲۱ \times ۶ + \frac{۷}{۳} \times ۶ = ۱۲۶ + ۱۴ = ۱۴۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۴}$

$$\left.\begin{aligned} a+2 \mid a+2 &\xrightarrow{\times a} a+2 \mid a^2+2a \\ & a+2 \mid a^2+2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a+2 \mid 2a-2$$

$$\left.\begin{aligned} a+2 \mid a+2 &\xrightarrow{\times 2} a+2 \mid 2a+4 \\ & a+2 \mid 2a-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a+2 \mid 6$$

$$\Rightarrow a+2=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

اگر $a+2$ برابر ۳ یا ۶ باشد، آنگاه a عددی طبیعی خواهد بود، پس تنها دو مقدار برای a وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(فرهاد وفایی)

مطابق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} a = bq + ۱۷, ۱۷ < b & (۱) \\ ۳a = bq' + ۶, ۶ < b & (۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a = b(۳q) + ۵۱ \\ ۳a = bq' + ۶ \end{cases} \Rightarrow b(۳q) + ۵۱ = bq' + ۶$$

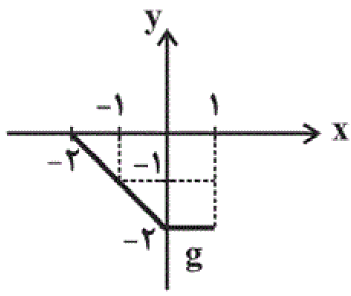
$$\Rightarrow b(q' - ۳q) = ۴۵ \Rightarrow b \mid ۴۵ \xrightarrow{b>۱۷} b = ۴۵$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۹۱ (سیدمیلاد موسوی‌چاشمی)

با انتقال نمودار تابع f به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا و سپس قرینه کردن آن نسبت به محور x ها، نمودار تابع g به‌دست می‌آید. با توجه به شکل، واضح است که نمودار تابع g از نواحی اول و دوم نمی‌گذرد.



(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۲ (حمید علیزاده)

$D_f = (-۳,۱]$

$D_h : -۳ < ۱-۲x \le ۱ \Rightarrow -۴ < -۲x \le ۰ \Rightarrow ۰ \le x < ۲$

$\Rightarrow D_h = [۰,۲) = [۰,a) \Rightarrow a = ۲$

$R_f = [-۱,۴]$

$R_h : -۱ \le f(۱-۲x) \le ۴ \Rightarrow -۱۲ \le -۳f(۱-۲x) \le ۳$

$\Rightarrow -۸ \le -۳f(۱-۲x)+۴ \le ۷ \Rightarrow R_h = [-۸,۷] = [b,۷] \Rightarrow b = -۸$

$\Rightarrow a+b = ۲+(-۸) = -۶$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

نقطهٔ $A'(\alpha',\beta')$ را تبدیل‌یافتهٔ $A(\alpha,\beta)$ در نظر می‌گیریم.

$$A':\begin{cases}\dfrac{\alpha'}{۲}-۱=\alpha \Rightarrow \alpha'=۲\alpha+۲\\ \beta'=۲+\beta\end{cases} \Rightarrow A'=\left(۲(\alpha+۱),\beta+۲\right)$$

$$\Rightarrow |AA'|=\sqrt{(۲\alpha+۲-\alpha)^۲+(\beta+۲-\beta)^۲}=\sqrt{(\alpha+۲)^۲+۴}$$

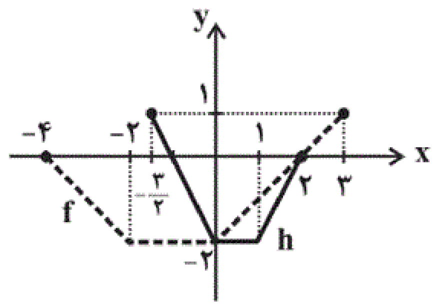
کم‌ترین مقدار $|AA'|$ زمانی رخ می‌دهد که $(\alpha+۲)^۲$ کم‌ترین مقدار یعنی صفر باشد. این حالت با توجه به اینکه دامنهٔ تابع f کل اعداد حقیقی است، امکان‌پذیر است.

$$\Rightarrow |AA'|_{min}=\sqrt{۴}=۲$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

نمــودار دو تــابع $y=f(x)$ و $h(x)=f(-2x)$ را در یــک دســتگاه مختصات رسم می‌کنیم.



$$D_g=\{x\in D_f\cap D_h \mid f(x)>h(x)\}$$

$$=\left\{x\in\left[-\frac{۳}{۲},۲\right] \mid x\in(۰,۲)\right\}=\left[-\frac{۳}{۲},۲\right]\cap(۰,۲)=(۰,۲)$$

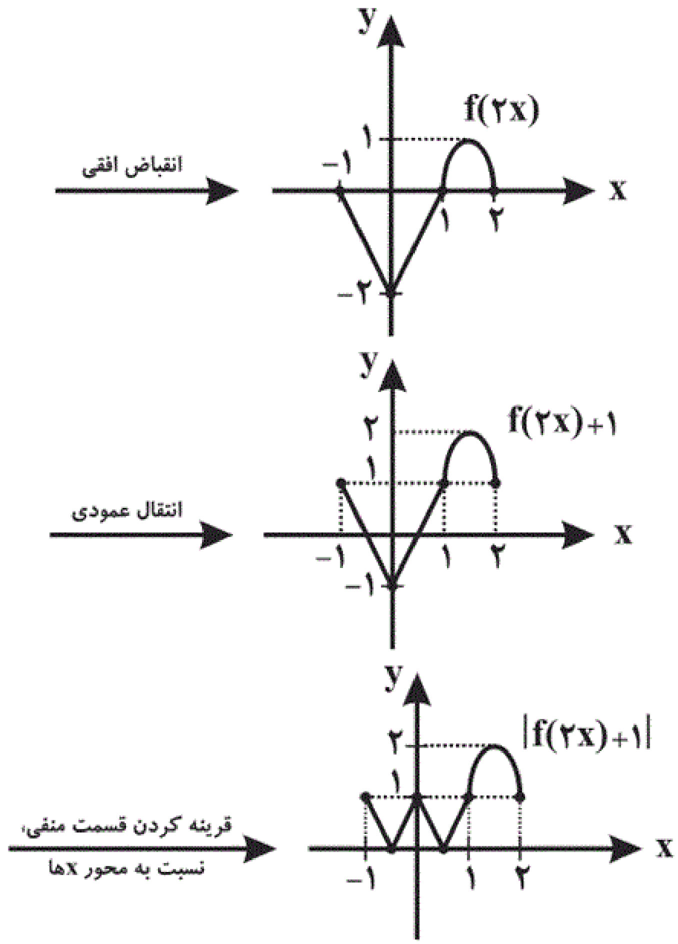
در این بازه نمـودار تـابع f بـالاتر از نمـودار تـابع h اسـت و حاصـل زیـر رادیکال مثبت است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(جهانبخش نیکنام)

معادله را به فرم $m = \left|f(2x)+1\right|$ می‌نویسیم. نمودار $\left|f(2x)+1\right|$ را رسم می‌کنیم.



مطابق نمودار، برای این که خط $y = m$ نمودار را در ۴ نقطه قطع کند باید $0 < m \leq 1$ باشد.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

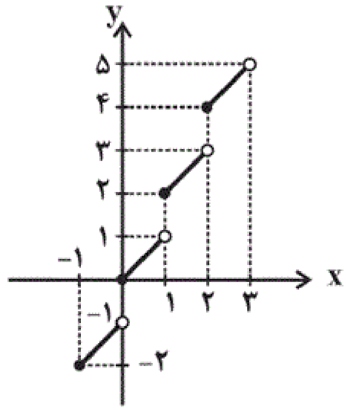
گزینهٔ «۱»: واضح است که این تابع غیریکنواست.

$$y=\begin{cases} 0 & ; x\in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

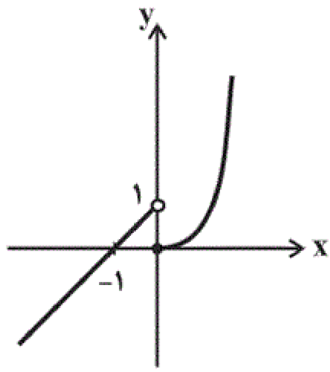
گزینهٔ «۲»: این تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

$$y=\begin{cases} 1 & ; x<1 \\ 2x-1 & ; x\ge 1 \end{cases}$$

گزینهٔ «۳»: این تابع اکیداً صعودی است.



گزینهٔ «۴»: این تابع غیریکنواست.



(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$✓ $\boxed{4}$

-۹۷ (طاهر دادستانی)

$$y=\frac{ax-a+a+b}{x-1}=a+\frac{a+b}{x-1}$$

$$1<x_1<x_2\Rightarrow 0<x_1-1<x_2-1\Rightarrow \frac{1}{x_1-1}>\frac{1}{x_2-1}$$

تابع $\frac{1}{x-1}$ در $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی است. حال بـرای اینکـه تـابع $\frac{a+b}{x-1}$ اکیداً صعودی باشد، لازم است $a+b<0$ باشد.

$$\Rightarrow \frac{a+b}{x_1-1}<\frac{a+b}{x_2-1}\Rightarrow a+\frac{a+b}{x_1-1}<a+\frac{a+b}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow y_1<y_2$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۸ (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$f=\{(2,-2),(3,x^2+b),(4,ax)\}\xrightarrow{\text{تابع صعودی است}}x^2+b\le ax$$

$$x^2-ax+b\le 0$$

از آن‌جا که جواب این نامعادلهٔ بازهٔ $[-1,2]$ است، پـس $x=-1$ و $x=2$ باید ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ ۲ بالا باشند.

$$\left.\begin{array}{l}a=S=2-1=1\\ b=P=(2)(-1)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow a-b=3$$

لازم به ذکر است که با مقـدار $b=-2$، شـرط $x^2+b\ge -2$ نیـز برقـرار خواهد بود.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۹- (محمد پیمانی)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-۱$ و $x+۱$ به‌ترتیب برابر است با $f(۱)$ و $f(-۱)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=a+b+۲=۴ \Rightarrow a+b=۲ & (۱) \\ f(-۱)=-a+b=۶ & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=-۲, b=۴$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۳+x^۲-۲x+۴$$

$\Rightarrow x-۲$ بر $f(x)$ باقی‌ماندهٔ تقسیم : $r=f(۲)=۱۲$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۰- (سیدعادل حسینی)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۱$ برابر است با $p(۱)$:

$$p(۱)=۲ \Rightarrow ۱-۳+a-۱=۲ \Rightarrow a=۵$$

$$\Rightarrow p(x)=x^۵-۳x^۴+۵x-۱=(x-۱)q(x)+۲$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x-۲$، $q(۲)$ است:

$$x=۲: p(۲)=-۷=q(۲)+۲$$

$$\Rightarrow q(۲)=-۹$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۴۱ (سروش موئینی)

$$A+I=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+I)^{-۱}=\frac{۱}{۲(۵)-۲(۳)}\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}$$

$(A+I)$ مجموع درایه‌های وارون $=\frac{۱}{۴}(۵-۲-۳+۲)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳، ۲۲ و ۲۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۴۲ (جواد حاتمی)

$$A^{۲}+AB+۳B=A\underbrace{(A+B)}_{۳I}+۳B=۳A+۳B$$

$$=۳\underbrace{(A+B)}_{۳I}=۹I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

$$b_{۱۱}=b_{۱۲}=۱^{۲}+۱=۲\ ,\ b_{۲۱}=b_{۲۲}=۲^{۲}+۱=۵$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۴ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$(A-B)(A+B)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۴ & -۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۴ \\ -۵۲ & -۴۴ \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۹)

۱   ۲✓   ۳   ۴

چون A ماتریس اسکالر است، بنابراین ماتریس مربعی می‌باشد. از طرفی ضرب AB تعریف شده است، پس تعداد ستون‌های ماتریس A برابر تعداد سطرهای ماتریس B یعنی برابر ۳ می‌باشد. حال چون ماتریس A اسکالر می‌باشد، پس به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$c_{32}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}=2a=-4 \Rightarrow a=-2$$

A مجموع درایه‌های قطر اصلی $= a+a+a=3a=3(-2)=-6$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ ۵ & -۲ \\ -b & a+۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a+۱۰+۲b & b-۴-۲a-۲ \\ -a+۱۵-۴b & -b-۶+۴a+۴ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a+۲b+۱۰ & b-۲a-۶ \\ -a-۴b+۱۵ & ۴a-b-۲ \end{bmatrix}$$

چون ماتریس AB ، ماتریسی قطری است، پس درایه‌های خارج قطر اصلی آن برابر صفر هستند. داریم:

$$\begin{cases} b-۲a-۶=۰ \\ -a-۴b+۱۵=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a+b=۶ \\ a+۴b=۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=۴ \end{cases}$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۵ & -۲ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۵ & ۱۰ & ۱۸ \\ ۷ & ۴ & -۱۸ \\ -۴ & -۸ & ۸ \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های BA = ۱۲

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۹)

۱   ۲   ۳   ۴ ✓

$$AXB + C = D$$

$$\Rightarrow AXB = D - C \xrightarrow{A^{-1}\times} A^{-1}(AXB) = A^{-1}(D-C)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(A^{-1}A\right)}_{I} XB = A^{-1}(D-C) \Rightarrow XB = A^{-1}(D-C)$$

$$\xrightarrow{\times B^{-1}} (XB)B^{-1} = A^{-1}(D-C)B^{-1}$$

$$\Rightarrow X\underbrace{\left(BB^{-1}\right)}_{I} = A^{-1}(D-C)B^{-1}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}(D-C)B^{-1}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۴۷ (امیرحسین ابومحبوب)

$$A^2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2\theta - \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۴۸- (جواد حاتمی)

$$A^۲ - ۲A = I \Rightarrow A^۲ = ۲A + I \Rightarrow \left(A^۲\right)^۲ = (۲A + I)^۲$$

$$\Rightarrow A^۴ = ۴A^۲ + ۴AI + I^۲ \Rightarrow A^۴ = ۴(۲A + I) + ۴A + I$$

$$= ۱۲A + ۵I \Rightarrow A^۴ - ۵I = ۱۲A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$B = A_{۱} + A_{۲} + ... + A_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & n \\ n & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & n \\ n & ۲ \end{bmatrix} + ... + \begin{bmatrix} ۲۱ & n \\ n & ۲۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱+۲+...+۲۱ & ۲۱n \\ ۲۱n & ۱+۲+...+۲۱ \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $۱+۲+...+۲۱ = \frac{۲۱(۲۱+۱)}{۲} = ۲۳۱$ است، داریم:

$$B = \begin{bmatrix} ۲۳۱ & ۲۱n \\ ۲۱n & ۲۳۱ \end{bmatrix}$$

اگر B وارون‌پذیر نباشد، باید داشته باشیم:

$$(۲۳۱)^۲ - (۲۱n)^۲ = ۰ \Rightarrow (۲۱n)^۲ = (۲۳۱)^۲ \Rightarrow n = \pm\frac{۲۳۱}{۲۱} = \pm ۱۱$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۱۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳، ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

(علی ایمانی)

اتحادهای جبری تنها زمانی برای ماتریس‌های A و B برقرار هستند که این دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، بنابراین داریم:

$$BA = AB \Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲a + c & ۳c \\ ۲d + b & ۳b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲a & ۲c \\ a + ۳d & c + ۳b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a + c = ۲a \Rightarrow c = ۰ \\ ۳b = c + ۳b \Rightarrow c = ۰ \\ ۳c = ۲c \Rightarrow c = ۰ \end{cases}$$

$$۲d + b = a + ۳d \Rightarrow a + d = b$$

حالت $c = d = ۰$ ممکن است رخ دهد اما لزوماً برقرار نیست.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۱)

۱   ۲✓   ۳   ۴