



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

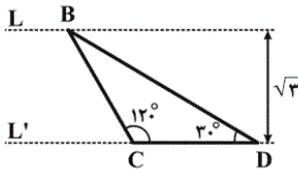
(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی ۱، مثلثات

۱۰۱- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه CD کدام است؟



- ۱ (۱) $\sqrt{3}-1$ (۳)
۲ (۲) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ (۴)

۱۰۲- طول اضلاع یک متوازی‌الاضلاع $\frac{6}{b}$ و $2b$ و زاویه حاده بین این دو ضلع بزرگتر از 60° است. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام عدد می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) $\sqrt{37}$ (۲) $\sqrt{83}$ (۳) $\sqrt{109}$ (۴) $\sqrt{147}$

۱۰۳- ساده‌شده عبارت $\frac{\tan^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2}$ در دامنه تعریفش کدام است؟

- ۱ (۱) $\tan^2 x$ (۲) $\tan^4 x$ (۳) $\tan^6 x$ (۴) $\tan^8 x$

ریاضی ۱، توان های گویا و عبارت های جبری -

۱۰۴- اگر $A = \frac{(\sqrt[5]{-2})(\sqrt[6]{(-5)^6})(\sqrt[5]{-16})}{\sqrt[4]{256}}$ باشد، حاصل $\sqrt{A - \frac{1}{4}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{75}$ (۳) $\frac{1}{25}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۵- کدام یک از اعداد زیر مضرب صحیح عبارت $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$ است؟

- ۱ (۱) 68 (۲) $6(\sqrt{2}-1)$ (۳) $12(\sqrt{2}+1)$ (۴) 78

۱۰۶- اگر $A = \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \times (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ باشد، مقدار A چند برابر $\sqrt{20}$ است؟

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\sqrt{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳)

۱۰۷- اگر $a^2 + b^2 = 6ab$ باشد، حاصل $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ کدام است؟ ($a \neq b$)

۴ (۲)

۲ (۱)

۸ (۴)

۶ (۳)

۱۰۸- حاصل عبارت $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

$\sqrt{n+1}$ (۲)

$\sqrt{n+1}+1$ (۱)

$\sqrt{n+1}-1$ (۴)

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (۳)

۱۰۹- حاصل $T = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)\frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ برابر کدام است؟

۱ (۲)

$(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$ (۱)

$(\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{2}}$ (۴)

$(2-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ (۳)

۱۱۰- اگر $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-3} = 1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-3}$ کدام است؟

۲ (۲)

۳ (۱)

۴ (۴)

۵ (۳)

۱۵۱- نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط مثلث بزرگ‌تر ۱۸ باشد، محیط مثلث کوچک‌تر کدام است؟

۸ (۴)

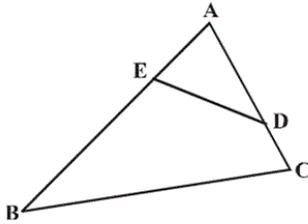
۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

۱۵۲- در شکل زیر، اگر $AD=3$ ، $AE=2$ ، $AB=6$ و $AC=4$ ، آنگاه فاصله A تا وسط پاره خط ED چند برابر فاصله A تا وسط

ضلع BC است؟



$\frac{2}{3}$ (۲)

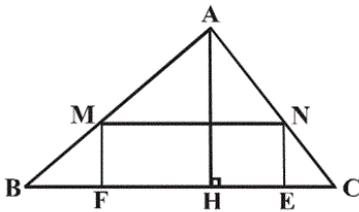
$\frac{2}{5}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

۱۵۳- مثلث ABC به ضلع $BC=8$ و به ارتفاع $AH=6$ مفروض است. در این مثلث، مستطیل $MNEF$ به عرض $MF=2$ محاط شده

است. طول این مستطیل کدام است؟



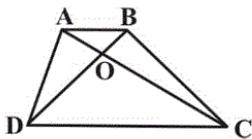
۵ (۲)

۴ (۱)

$\frac{14}{3}$ (۴)

$\frac{16}{3}$ (۳)

۱۵۴- در ذوزنقه شکل زیر، اگر $S_{\triangle AOD} = \frac{\sqrt{10}}{2} S_{\triangle AOB}$ باشد، آنگاه مساحت مثلث AOB چه کسری از مساحت مثلث COD است؟



$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

۱۵۵- کدام یک از چهارضلعی‌های زیر، الزاماً یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟

(۱) چهارضلعی‌ای که زوایای روبه‌رویش، دوبه‌دو با هم مساوی باشند.

(۲) چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

(۳) چهارضلعی‌ای که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد.

(۴) چهارضلعی‌ای که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.

۱۵۶- یک n ضلعی محدب ۴۴ قطر دارد. از هر رأس این n ضلعی چند قطر می‌گذرد؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

۱۵۷- کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- (۱) اگر هر قطر یک چهار ضلعی محدب، آن را به دو مثلث هم نهشت تقسیم کند، این چهار ضلعی لزوماً لوزی است.
 (۲) اگر هر قطر یک چهار ضلعی محدب، نیمساز زوایای دو سر آن قطر باشد، این چهار ضلعی لزوماً مربع است.
 (۳) اگر در یک چهار ضلعی محدب دو ضلع موازی بوده و دو ضلع دیگر آن مساوی باشند، این چهار ضلعی لزوماً قطرهای منصف هم دارد.
 (۴) اگر قطرهای یک چهار ضلعی محدب منصف یکدیگر و مساوی با همدیگر باشند، این چهار ضلعی لزوماً مستطیل است.

۱۵۸- روی اضلاع لوزی $ABCD$ ، نقاط P, N, M, Q را روی ۴ ضلع و در یک جهت طوری انتخاب می‌کنیم

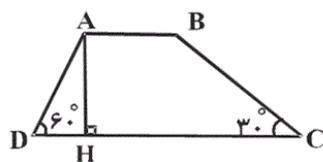
که $AM = BN = CP = DQ$ باشد. دو قطر چهار ضلعی $MNPQ$ همواره ...

- (۱) با هم مساوی هستند. (۲) یکدیگر را نصف می‌کنند. (۳) بر هم عمود هستند. (۴) با اضلاع لوزی موازی هستند.

۱۵۹- مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر $AB=3$ و $AC=3\sqrt{3}$ ، آنگاه فاصله رأس B از میانه وارد بر وتر کدام است؟

- ۲ (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۴)

۱۶۰- در دوزنقه شکل زیر، زوایای مجاور قاعده بزرگ‌تر برابر 30° و 60° هستند. اگر $AB=5$ و $CD=13$ قاعده‌های دوزنقه باشند،



اندازه ارتفاع AH کدام است؟

- ۴ (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$ (۳)

ریاضی ۱ (احتمال)، شمارش، بدون شمارش

۱۷۱- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$ چند زیرمجموعه ۵ عضوی با دست کم ۳ عضو فرد دارد؟

- ۶۰ (۱) ۱۶ (۲) ۲۱ (۳) ۸۱ (۴)

۱۷۲- به چند طریق می‌توان ۵ نفر را در ۴ اتاق متمایز جای داد به طوری که در هر اتاق حداقل یک نفر قرار گیرد؟

- ۲۴۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

۱۷۳- چهار جفت کفش متمایز را روی هم ریخته و از بین آن‌ها چهار لنگه کفش انتخاب می‌کنیم. تعداد حالاتی که در بین چهار لنگه انتخاب شده تنها یک جفت کفش وجود داشته باشد، چقدر است؟

- ۴۸ (۱) ۳۶ (۲) ۶۰ (۳) ۲۴ (۴)

۱۷۴- ۶ نفر به نام‌های f, e, d, c, b, a به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار یکدیگر قرار گیرند به گونه‌ای که a و b مجاور یکدیگر ولی c و d مجاور هم نباشند؟

- ۱۹۶ (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۱۷۵- ۹ نفر در سه ردیف سه تایی نشسته‌اند. می‌خواهیم از بین آن‌ها دو نفر به تصادف انتخاب کنیم. در چند حالت، افراد انتخاب شده در یک ردیف نیستند؟

- ۳۶ (۱) ۲۷ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴)

۱۷۶- با حروف کلمه «TRIANGLE» و بدون تکرار حروف، چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت به طوری که فقط یکی از دو حرف R و T به کار رفته باشد؟

- ۷۲۰ (۱) ۸۴۰ (۲) ۹۶۰ (۳) ۶۰۰ (۴)

۱۷۷- حاصل $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{10}{5} + \binom{11}{4}$ کدام است؟

- $\binom{11}{5}$ (۱) $\binom{13}{3}$ (۲) $\binom{12}{4}$ (۳) $\binom{12}{7}$ (۴)

۱۷۸- یک چهارم زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از اعداد طبیعی کوچک‌تر از n ، شامل عدد ۱ هستند. n کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴)

۱۷۹- حروف کلمه CANADA را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به گونه‌ای که هیچ دو حرف A کنار هم نباشند؟

- ۳۶ (۱) ۲۴ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲ (۴)

۱۸۰- چند خط راست متمایز وجود دارد که شامل حداقل ۲ نقطه از بین ۸ نقطه زیر است؟

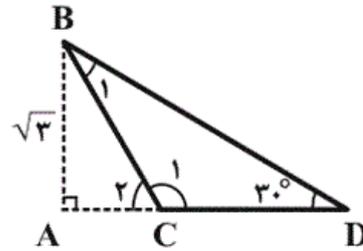
- ۲۸ (۱) ۲۳ (۲) ۱۷ (۳) ۲۶ (۴)



(سید میلاد موسوی پاشمی)

۱۰۱- [مشاهده جزوه](#)

با رسم ارتفاع خواهیم داشت:



$$\hat{C}_2 = 180^\circ - \hat{C}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 30^\circ$$

$$\Delta ABC : \sin \hat{C}_2 = \sin 60^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2$$

از طرفی مثلث BCD، متساوی الساقین است و داریم:

$$CD = BC = 2$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۴

۳

۲

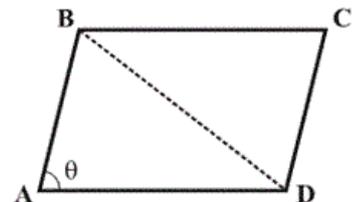
۱

(علی اکبر علینزاده)

۱۰۲- [مشاهده جزوه](#)

$S =$ (مساحت مثلث ABD) $\times 2 =$ مساحت متوازی الاضلاع

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times 2b \times \frac{6}{b} \times \sin \theta = 12 \sin \theta$$



$$60^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta < 1$$

$$\underline{\hspace{10em}} \rightarrow 6\sqrt{3} < S < 12$$

$$\Rightarrow \sqrt{108} < S < \sqrt{144}$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{aligned} \frac{\tan^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2} &= \frac{(\tan^4 x) \left(1 - \frac{\sin^4 x}{\tan^4 x}\right)}{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x - 2)} \\ &= \frac{(\tan^4 x)(1 - \cos^4 x)}{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x - 2)} = \frac{(\tan^4 x)(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}{-(1 - \sin^2 x)(1 - \cos^2 x - 2)} \\ &= \frac{(\tan^4 x)(\sin^2 x)(1 + \cos^2 x)}{-(\cos^2 x)(-(1 + \cos^2 x))} = \tan^4 x \cdot \tan^2 x = \tan^6 x \end{aligned}$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt[5]{(-2)(-16)}) \cdot \sqrt[6]{(-5)^6}}{\sqrt[4]{2^8}} = \frac{(\sqrt[5]{2^5}) \cdot |-5|}{2^2} = \frac{2 \times 5}{4} = \frac{10}{4} \\ \Rightarrow \sqrt{A - \frac{1}{4}} &= \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5 \end{aligned}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2+2\sqrt{2}} + \sqrt{9+2-6\sqrt{2}} &= \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} \\ &= |1+\sqrt{2}| + |3-\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}+3-\sqrt{2} = 4 \end{aligned}$$

در بین گزینه‌ها، فقط ۶۸ مضرب صحیح ۴ است.

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\begin{aligned} A &= \left(\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \right) (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{5\sqrt{5}} \right) \\ &= \left(\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \right) \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \left(\sqrt[3]{5\sqrt{5}} \right) \\ &= \left(\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \right) \sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2} \times \sqrt{5} \\ &= \sqrt[6]{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} \times \sqrt{5} = \sqrt[6]{49-48} \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \\ \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{20}} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۴۷ تا ۶۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{6ab+2ab}{6ab-2ab} = \frac{8ab}{4ab} = 2$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

⋮

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1}$$

$$= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \dots + \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-1$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-1) \times \frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = (\sqrt{3}-1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

دقت کنید اگر $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = a$ باشد، داریم:

$$a^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[4]{2+\sqrt{3}} \sqrt[4]{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{4}} (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$$

$$= (2-\sqrt{3})^{-\frac{1}{4}} (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{4}} = (2-\sqrt{3})^{\frac{3}{4}}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-3})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-3}) \\ &= (\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-3}) = (2x-1)-(2x-3) = 2 \\ &\Rightarrow \sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-3} = 2 \end{aligned}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارات‌های جبری، مشابه تمرین ۵ صفحه ۶۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر مربع نسبت تشابه آن دو مثلث است،

پس:

$$k^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k = \frac{2}{3} = \frac{\text{محیط مثلث کوچک‌تر}}{\text{محیط مثلث بزرگ‌تر}}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث کوچک‌تر} = \frac{2}{3} \times 18 = 12$$

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴

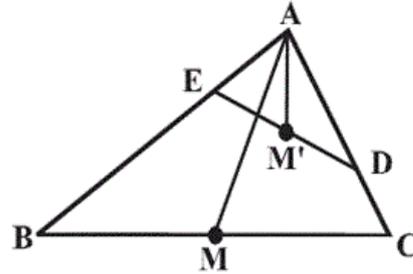
۳

۲ ✓

۱

(مسئله ریاضی)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AED$$



پس نسبت میانه‌های AM و AM' در دو مثلث متشابه AED و ABC برابر

است با نسبت تشابه، یعنی، داریم:

$$\frac{AM'}{AM} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۴

۳

۲

۱

$$AH' = AH - H'H = AH - MF = 6 - 2 = 4$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{MN}{8} = \frac{4}{6} \Rightarrow MN = \frac{16}{3}$$

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۴

۳

۲

۱

دو مثلث AOD و AOB در ارتفاع خارج شده از رأس A مشترک هستند،

پس:

$$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{OD}{OB} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{OD}{OB} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

دو مثلث AOB و COD به حالت تساوی زوایا با هم متشابه‌اند، پس نسبت

مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست:

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta COD}} = \left(\frac{OB}{OD}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

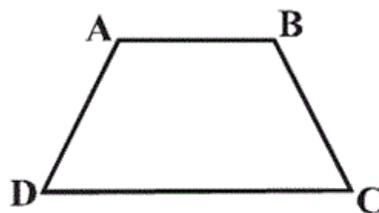
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسین فابیو)



مثال نقض برای گزینه «۴»، دوزنقه متساوی‌الساقین مطابق شکل است که در

آن $AD = BC$ و $AB \parallel CD$ است.

(هندسه ۱- پند ضلعی‌ها، صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

$$\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی محدب: } \frac{n(n-3)}{2} = 44$$

$$\Rightarrow n(n-3) = 11 \times 8 \Rightarrow n = 11$$

می‌دانیم که از هر رأس n ضلعی محدب، $n-3$ قطر می‌گذرد، پس از هر رأس این ۱۱ ضلعی محدب، ۸ قطر می‌گذرد.

(هندسه ۱- پنر ضلعی‌ها، صفحه ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(داریوش ناظمی)

گزینه (۱) : متوازی الاضلاع است که لزوماً لوزی نیست.

گزینه (۲) : لوزی است که لزوماً مربع نیست.

گزینه (۳) : می‌تواند ذوزنقه متساوی الساقین باشد، که قطرهای آن یکدیگر

را نصف نمی‌کنند.

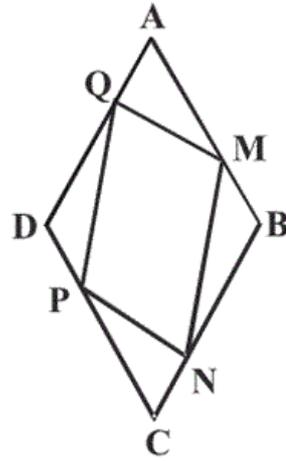
(هندسه ۱- پنر ضلعی‌ها، صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



دو مثلث AMQ و CPN بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت هستند.

در نتیجه $MQ = NP$ است.

هم‌چنین دو مثلث DPQ و BMN نیز بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین

هم‌نهشت هستند. در نتیجه $MN = PQ$ می‌باشد.

بنابراین چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است و دو قطر آن یکدیگر را

نصف می‌کنند.

(هندسه ۱- پنر ضلعی‌ها، صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

۴

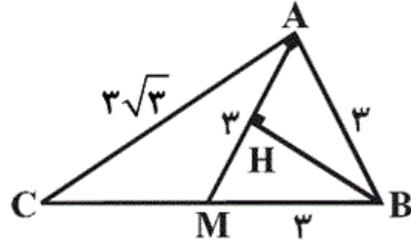
۳

۲ ✓

۱

$$\Delta ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36$$

$$\Rightarrow BC=6 \Rightarrow AM=MB=3$$



طبق فرض سؤال $AB = 3$ است، بنابراین مطابق شکل، اندازه BH برابر

طول ارتفاع یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع 3 است. بنابراین:

$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه 1- پنذضلعی ها، صفحه 40)

 4

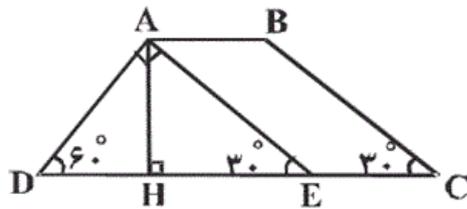
 3

 2

 1

مطابق شکل، از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در نقطه E قطع کند، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AED} = \widehat{C} = 30^\circ \xrightarrow{\widehat{D}=60^\circ} \widehat{DAE} = 90^\circ \\ \text{مورب EC و } AE \parallel BC \Rightarrow \\ \text{متوازی الاضلاع } ABCE \Rightarrow AB = CE = 5 \Rightarrow DE = CD - CE = 8 \end{array} \right.$$



می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف

طول وتر و طول ضلع روبه‌رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است، پس:

$$\triangle ADE : \widehat{D} = 60^\circ \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{3}}{2} DE = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle AHE : \widehat{E} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AE}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- پنذضلعی‌ها، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(بهزاد نظام‌هاشمی)

$$A = \{\underbrace{1, 3, 5, 7, 9}_{\text{فرد } 5}, \underbrace{2, 4, 6, 8}_{\text{زوج } 4}\}$$

تعداد زیر مجموعه‌های مورد نظر برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{2} + \binom{5}{4} \times \binom{4}{1} + \binom{5}{5} \times \binom{4}{0} = 10 \times 6 + 5 \times 4 + 1 \times 1 = 81$$

فرد ۵ فرد ۴، ۱، زوج ۳ فرد ۳، زوج ۲، زوج

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(رامین فسروی)

از فرض سؤال نتیجه می‌شود که اتاقی وجود دارد که حتماً دو نفر در آن قرار دارد و در بقیه اتاق‌ها هر کدام یک نفر. پس ابتدا دو نفر را انتخاب می‌کنیم و

در یکی از اتاق‌ها قرار می‌دهیم که به $\binom{5}{2} \times 4$ حالت این کار صورت

می‌گیرد، سپس ۳ نفر باقی مانده در ۳ اتاق دیگر به $3!$ طریق می‌توانند قرار

بگیرند، پس تعداد حالات مورد نظر برابر است با: $\binom{5}{2} \times 4 \times 3! = 240$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(امیر ممدطاهری)

از بین چهار جفت کفش، ابتدا یک جفت انتخاب می‌کنیم که

به $\binom{4}{1} = 4$ حالت امکان‌پذیر است. از بین سه جفت کفش باقی‌مانده، دو

جفت را انتخاب و سپس از هر یک از این جفت‌ها، یک لنگه انتخاب می‌کنیم

که به $2 \times 2 = 12$ حالت امکان‌پذیر است.

$$4 \times 12 = 48$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

ابتدا حالت‌هایی را می‌شماریم که a و b کنار یکدیگرند، سپس حالت‌هایی را که هم a و b و هم c و d کنار هم می‌باشند را شمرده و از جواب اولیه کم می‌کنیم.

برای این که a و b کنار هم باشند، آنها را با هم یک نفر فرض می‌کنیم که در این صورت تعداد حالات برابر است با $2! \times 5!$.

سپس a و b را با هم و c و d را نیز با هم در نظر می‌گیریم که در این صورت تعداد حالات برابر است با $2! \times 2! \times 4!$

$$144 = 240 - 96 = \text{تعداد حالت‌های مطلوب}$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا از بین سه ردیف موجود، دو ردیف را انتخاب کرده و سپس از هر ردیف، یک نفر را انتخاب می‌کنیم، پس تعداد کل حالات مطلوب برابر است با:

$$\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدایکی از دو حرف T و R و سپس ۳ حرف از شش حرف باقی‌مانده انتخاب کرده و جایگشت‌های آنها را در نظر می‌گیریم:

$$\binom{2}{1} \times \binom{6}{3} \times 4! = 2 \times 20 \times 24 = 960$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$۱) \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}, 1 \leq r \leq n$$

نکته:

$$۲) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, 0 \leq r \leq n$$

بنابراین طبق دو نکته فوق داریم:

$$\begin{aligned} \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{10}{5} + \binom{11}{4} &= \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{11}{4} \\ &= \binom{11}{5} + \binom{11}{4} = \binom{12}{5} = \binom{12}{7} \end{aligned}$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهرداد ملونری)

مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از n : $A = \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی } A \text{ که شامل عدد ۱ هستند} = \binom{n-2}{2}$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی } A = \binom{n-1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{1}{4} \binom{n-1}{3} = \binom{n-2}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{(n-1)!}{(n-4)!3!} = \frac{(n-2)!}{(n-4)!2!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{n-1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow n-1 = 12 \Rightarrow n = 13$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرحسین ابومصوب)

سه حرف C، N و D را به $3! = 6$ حالت می‌توان کنار هم قرار داد. مطابق شکل برای آن که هیچ دو حرف A کنار هم قرار نگیرند، باید ۳ جای خالی را از بین ۴ جای خالی انتخاب کرده و سه حرف A را در آن‌ها قرار دهیم. پس تعداد کلمات مورد نظر برابر است با:

$$-C-N-D- \quad 3! \times \binom{4}{3} = 6 \times 4 = 24$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(رامین خسروی)

اگر در شکل، هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست نبودند، تعداد خطوط راست مطلوب برابر $\binom{8}{2}$ بود، ولی ۴ نقطه‌ای که روی قطر نیم‌دایره قرار دارند، روی یک خط راست هستند و تنها یک خط را مشخص می‌کنند، پس $\binom{4}{2} - 1$ خط را اضافی شمرده‌ایم. تعداد خطوط راست موردنظر برابر است

$$\binom{8}{2} - \left(\binom{4}{2} - 1 \right) = 28 - (6 - 1) = 23 \quad \text{با:}$$

(ریاضی ۱- شماره‌ش برون شمردن، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲ ✓

۱