



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...و

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم، آشنایی با نظریه‌ی اعداد - ۱۰ سوال

۱۶۱- عکس کدام یک از قضیه‌های شرطی زیر، یک قضیه‌ی شرطی است؟

(۱) اگر $x > 2$ ، آنگاه $x^2 > 4$. (۲) اگر $x^2 \geq 8$ ، آنگاه $x^2 \geq 4$.

(۳) اگر $x = 1$ ، آنگاه $|x^2 - 1| + |x - 1| = 0$. (۴) اگر $x = 2$ ، آنگاه $x^2 - 4 = 0$.

۱۶۲- فرض کنید a و b اعدادی صحیح باشند. کدام یک از موارد زیر با مثال نقض رد می‌شود؟

(۱) اگر a و b دو عدد فرد باشند، آنگاه $a - b$ زوج است. (۲) اگر $a + b$ فرد باشد، آنگاه ab زوج است.

(۳) اگر ab زوج باشد، آنگاه $a + b$ زوج است. (۴) اگر a^2 مضرب 7 باشد، آنگاه a مضرب 7 است.

۱۶۳- فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

(۱) دست کم یکی از اعداد a^2 و $a^4 - 1$ گنگ است. (۲) دست کم یکی از اعداد a^2 و $a^4 + 1$ گنگ است.

(۳) دست کم یکی از اعداد a^2 و a^4 گویا است. (۴) حداکثر یکی از اعداد a^2 و a^4 گویا است.

۱۶۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟ ($a, b, x, y \in \mathbb{N}$)

الف) $a - b | a \Rightarrow (a - b)^2 | ab$ ب) $a - b | a \Rightarrow ab | a - b$

پ) $4 | y, 6 | x \Rightarrow 36 | 3xy$ ت) $4 | y, 6 | x \Rightarrow 18 | 2xy$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶۵- سه عدد اول p, q و r مفروض‌اند. اگر $p | 8, q | p^2 + 3$ و $r | p^2 + q$ ، مقدار r کدام است؟

(۱) ۱۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۱۶۶- اگر a و b دو عدد صحیح باشند، چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ ($m, n \in \mathbb{N}$)

الف) اگر $a | b$ ، آنگاه $a^m | b^n$.

ب) اگر $a | b$ ، آنگاه $|a| \leq |b|$.

پ) اگر $a | b$ و $b | c$ ، آنگاه $ab | c$.

ت) اگر $a | 6m + 5$ و $a | 7m + 6$ ، آنگاه $a = \pm 1$.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۱۶۷- اگر a ، b و c اعدادی طبیعی باشند به طوری که $ac | b^2$ و $a | b$ ، آنگاه همواره کدام رابطه زیر برقرار است؟

$b | c$ (۲)

$c | b^2$ (۱)

$c | ab$ (۴)

$c | a^2$ (۳)

۱۶۸- اگر $a - b | a + b$ ، آنگاه کدام نتیجه‌گیری در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد؟

$a - b | 4a + b$ (۲)

$a - b | 2a$ (۱)

$a - b | 2b$ (۴)

$a - b | 3a + b$ (۳)

۱۶۹- اگر a ، b و c سه عدد صحیح باشند و $a | b + c$ ، آنگاه کدام یک از روابط زیر همواره صحیح است؟

$a | b^2 + c^2$ (۲)

$a | b^2 - c^2$ (۱)

$a | c$ یا $a | b$ (۴)

$a^2 | bc$ (۳)

۱۷۰- به ازای چند مقدار طبیعی x ، حاصل کسر $\frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$ عددی صحیح است؟

۳ (۲)

۴ (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

۱۰۱- دامنه تابع $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ بازه $[-6, 2]$ است. دامنه تابع $f(4x+1)$ کدام است؟

(۴) $[-6, 2]$

(۳) $[-11, 5]$

(۲) $\left[-\frac{11}{4}, \frac{3}{4}\right]$

(۱) $[-1, 0]$

۱۰۲- نقطه $A(-1, 2)$ روی نمودار تابع f ، متناظر با کدام نقطه روی نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}f(x-1) + 2$ است؟

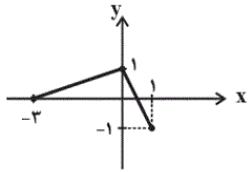
(۴) $(0, 3)$

(۳) $(0, 1)$

(۲) $(-2, 1)$

(۱) $(-2, -2)$

۱۰۳- نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ به صورت زیر است و دامنه و برد تابع $y = -2f(1-x)$ به ترتیب به صورت $[a, b]$ و $[c, d]$ می‌باشد. حاصل $a - b + c + d$ کدام است؟



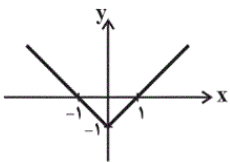
(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۰۴- اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت شکل زیر باشد، مساحت محدود به نمودار $y = f(|x|-1) - 1$ و محور x ها کدام است؟



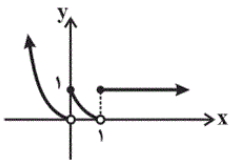
(۲) ۲

(۱) ۷

(۴) ۳

(۳) ۶

۱۰۵- نمودار تابع f به شکل زیر است. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟



(۲) f در بازه $(0, +\infty)$ نزولی است.

(۱) f در بازه $[0, 1]$ اکیداً نزولی است.

(۴) f در بازه $[1, +\infty)$ نزولی است.

(۳) f در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

۱۰۶- با توجه به توابع $f = \{(2, 1), (3, 4), (1, 2), (4, 3)\}$ و $g = \{(2, x^2), (3, 1), (1, 0), (0, 1)\}$ ، به ازای چند مقدار صحیح x تابع

$f + g$ صعودی است؟

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۳

(۳) ۱

۱۰۷- اگر تابع نزولی f از نقاط $A(-1, |x|)$ و $B(2, |x-1|)$ عبور کند، حدود x کدام است؟

$$x \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$x \leq \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$x \geq \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$x \geq \frac{1}{3} \quad (4)$$

۱۰۸- اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه \mathbb{R} و برد \mathbb{R}^- باشد، جواب نامعادله $\frac{f(2x+1)}{f(x-2)} \geq 1$ کدام است؟

$$x \geq 3 \quad (1)$$

$$x \leq 3 \quad (2)$$

$$x \geq -3 \quad (3)$$

$$x \leq -3 \quad (4)$$

۱۰۹- نمودار تابع $f(x) = |2x| - |x-1|$ در بازه‌ای که اکیداً نزولی است، چند نقطه مشترک با نمودار تابع $y = x^2 - 2x^2 - 2x + 1$ دارد؟

دارد؟

$$1 \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (4)$$

۱۱۰- به ازای چه مقداری از a ، تابع $f(x) = \begin{cases} |x+1| & ; x \leq -1 \\ -\frac{x}{2} + a & ; -1 < x < 1 \\ -\sqrt{x-1} - 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$ اکیداً نزولی خواهد بود؟

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (4)$$

هندسه ۳- دوازدهم، ماتریس، و کاربردها - ۱۰ سوال

۱۴۱- ماتریس A به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $i = j$ و $\begin{cases} 2^{i-j} & i < j \\ 2 & i = j \\ 2^{j-i} & i > j \end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

$$\frac{19}{2} \quad (1)$$

$$\frac{19}{2} \quad (2)$$

$$\frac{17}{2} \quad (3)$$

$$\frac{17}{2} \quad (4)$$

$$9 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

۱۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $A^T + 3AB$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۱۴۳- اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 2ij - i^2 & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$ تعریف شده باشد، آنگاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^T

کدام است؟

$$392 \quad (۴)$$

$$368 \quad (۳)$$

$$340 \quad (۲)$$

$$324 \quad (۱)$$

۱۴۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $C = A^T + B^T + AB$ کدام است؟

$$10I \quad (۴)$$

$$9I \quad (۳)$$

$$3I \quad (۲)$$

$$I \quad (۱)$$

۱۴۵- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2a-1 & a+2 \\ b-1 & a+b \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری و ماتریس $B = \begin{bmatrix} -a & b-1 \\ a+2 & c \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است. مجموع

درایه‌های ماتریس AB کدام است؟

$$-12 \quad (۴)$$

$$12 \quad (۳)$$

$$10 \quad (۲)$$

$$-10 \quad (۱)$$

۱۴۶- اگر برای ماتریس‌های A, B, C و D ، روابط $AB = C$ و $BC = D$ برقرار باشد، مرتبه ماتریس D لزوماً با مرتبه کدام

ماتریس یکسان است؟

$$B \quad (۲)$$

$$C \quad (۱)$$

$$CA \quad (۴)$$

$$A \quad (۳)$$

۱۴۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس A با چه تعداد از ماتریس‌های زیر تعویض پذیر است؟

(ب) $A - I$

(الف) $A^T + A$

(ت) $A^T + I$

(پ) $A + I$

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۴۸- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و $AB - BA = I$ باشد، حاصل $AB^T - B^T A$ همواره برابر کدام است؟

(۲) $2B$

(۱) B

(۴) $-2B$

(۳) $-B$

۱۴۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $A^k = kA$ باشد، k کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۱۶

(۳) ۸

۱۵۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟ ($y \neq 0$)

(۲) ۱

(۱) $\frac{2}{3}$

(۴) ۲

(۳) $\frac{1}{3}$

(امیرمسین ابومحبوب)

۱۶۱ - گزینه ۳

عکس قضیه شرطی گزینه «۳» خود یک قضیه شرطی است، زیرا داریم:

$$|x^2 - 1| + |x - 1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ |x^2 - 1| = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

جواب مشترک دو معادله $x = 1$ است، پس معادله تنها به ازای این مقدار x

برقرار است.

مثالهای نقض سایر گزینهها عبارتاند از:

گزینه «۱»: اگر $x = -3$ باشد، آنگاه $(-3)^2 > 4$ ولی $-3 \leq 2$.

گزینه «۲»: اگر $x = -3$ باشد، آنگاه $(-3)^2 \geq 4$ ولی $(-3)^3 < 8$.

گزینه «۴»: اگر $x = -2$ باشد، $(-2)^2 - 4 = 0$ ولی $-2 \neq 2$.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۲، ۳ و ۸)

۴

۳

۲

۱

(عمیدرضا امیری)

۱۶۲ - گزینه ۳

اگر $a = 2$ و $b = 3$ باشد، آنگاه $ab = 6$ زوج است ولی $a + b = 5$ فرد

می‌باشد. سایر موارد قضایای کلی هستند و همواره برقرارند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۲ و ۳)

۴

۳

۲

۱

مثال نقض گزینه «۱»: $a = \sqrt{2}$

مثال نقض گزینه‌های «۲» و «۳»: $a = \sqrt[3]{2}$

در گزینه «۴» بنا به برهان خلف، اگر اعداد a^2 و a^3 هر دو گویا باشند، آنگاه

$$\frac{a^3}{a^2} = a$$

نیز عددی گویا می‌شود که خلاف فرض است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۲ تا ۶)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

درستی هر کدام از گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} a-b \mid a \\ a-b \mid a-b \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a-b \mid b \quad \text{«الف»}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b \mid a \\ a-b \mid b \end{cases} \Rightarrow (a-b)^2 \mid ab \text{ (گزاره الف درست است.)}$$

مثال نقض گزاره «ب»:

$$\begin{cases} a=8 \\ b=4 \end{cases}, 8-4 \mid 8, 4 \times 8 \not\mid 4$$

«پ»:

$$\begin{cases} 4 \mid y \Rightarrow y = 4k \\ 6 \mid x \Rightarrow x = 6k' \end{cases} \Rightarrow xy = 24kk' \Rightarrow 3xy = 72kk'$$

$$\Rightarrow 3xy = 36(2kk') \Rightarrow 36 \mid 3xy \text{ (گزاره پ درست است.)}$$

مثال نقض گزاره «ت»:

$$\begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases}, 18 \not\mid 2(6 \times 4)$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر p عددی اول و $a \in \mathbb{N}$ باشد به طوری که $p \mid a^n$ ، آنگاه $p \mid a$. همچنین

اگر $a \mid p$ ، آنگاه $a = 1$ یا $a = p$ است. داریم:

$$p \mid 8 \xrightarrow{8=2^3} p \mid 2 \xrightarrow{p \text{ عدد اول}} p = 2$$

$$q \mid p^3 + 3 \Rightarrow q \mid 11 \xrightarrow{q \text{ عدد اول}} q = 11$$

$$r \mid p^4 + q \Rightarrow r \mid 27 \xrightarrow{27=3^3} r \mid 3 \xrightarrow{r \text{ عدد اول}} r = 3$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزاره «الف» در حالت کلی زمانی صحیح است که همراه با شرط $m \leq n$

باشد. به عنوان مثال $2|4$ ولی $25/42$.

گزاره «ب»: با شرط $b \neq 0$ صحیح است.

گزاره «پ»: در حالت کلی صحیح نیست. به عنوان مثال $3|6$ و $6|12$.

ولی $3 \times 6/12$.

گزاره «ت»:

$$\left. \begin{array}{l} a | 7m + 6 \Rightarrow a | 42m + 36 \\ a | 6m + 5 \Rightarrow a | 42m + 35 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای اعداد طبیعی a ، b و c ، طبق فرض سؤال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a | b \xrightarrow{\times c} ac | bc \\ b^2 | ac \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 | bc \xrightarrow{\div b} b | c$$

اعداد $a = 1$ ، $b = 2$ و $c = 8$ مثال نقضی برای نادرستی سه گزینه دیگر

هستند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b | a + b \\ a - b | 2a \end{array} \right. \xrightarrow{\text{مجموع}} a - b | 3a + b \text{ :گزینه «۳»}$$

$$\text{مثال نقض گزینه «۲» : } \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - b | a + b \\ a - b \nmid 2a \end{array} \right.$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱

$$a | b + c \Rightarrow a | (b - c)(b + c) \Rightarrow a | b^2 - c^2$$

به عنوان مثال نقض گزینه‌های دیگر $a = 3$ ، $b = 4$ و $c = 5$ را در نظر

بگیرید.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

اگر حاصل کسر $\frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$ عددی صحیح شود، آنگاه

$x + 1 \mid x^2 + x - 3$ و در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x + 1 \mid x^2 + x - 3 \\ x + 1 \mid x(x + 1) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x + 1 \mid -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 1 & \Rightarrow x = 0 \\ x + 1 = -1 & \Rightarrow x = -2 \\ x + 1 = 3 & \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = -3 & \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

از بین مقادیر به دست آمده، فقط $x = 2$ مقداری طبیعی است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سیرمیلار موسوی پاشمی)

۱۰۱ - ریاضیات گسسته

$$-6 \leq x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq \frac{1}{2}x \leq 1 \Rightarrow D_{f(x)} = [-3, 1]$$

در تابع $f(4x + 1)$ باید داشته باشیم:

$$-3 \leq 4x + 1 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$$

(مسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$A(-1, 2) \xrightarrow{\text{واحد به راست}} (0, 2) \xrightarrow{\text{عرض نقطه ضرب در } -\frac{1}{2}} (0, -1)$$

$$\xrightarrow{\text{عرض نقطه به اضافه ۲}} (0, 1)$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

 ۴

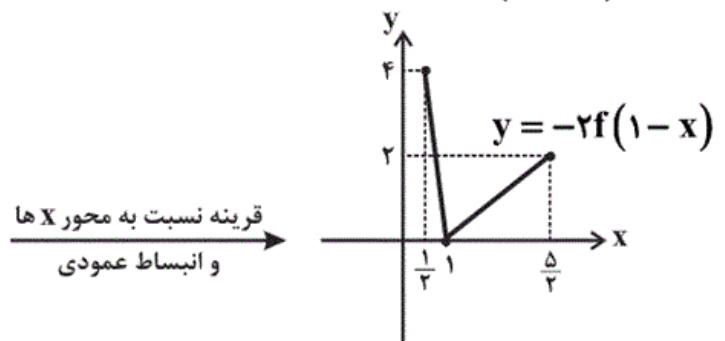
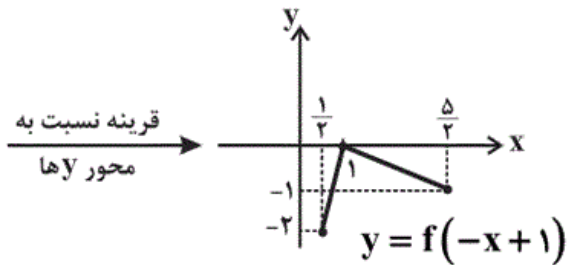
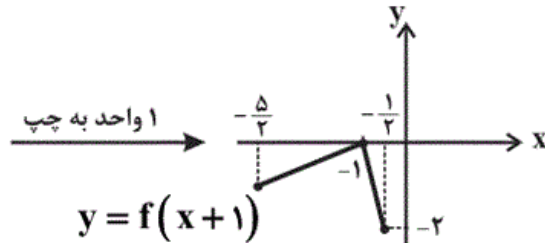
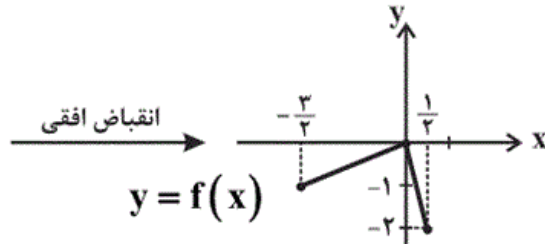
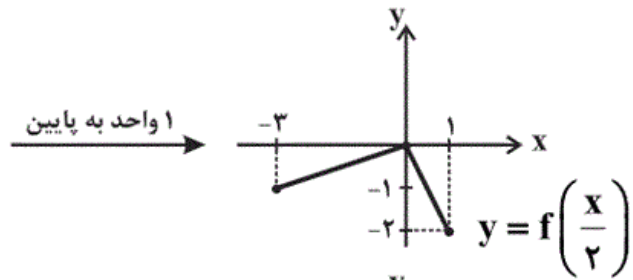
 ۳

 ۲

 ۱

به کمک نمودار $y = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ ، نمودار تابع $y = -2f(1-x)$ را مرحله

به مرحله رسم می‌کنیم:



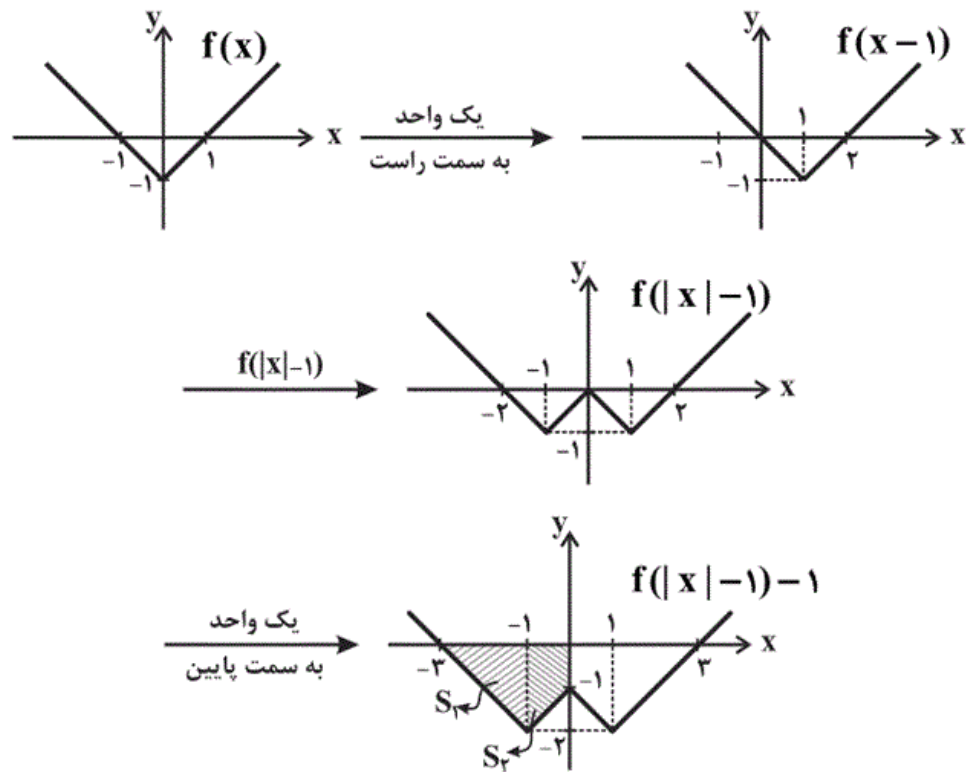
۴

۳

۲ ✓

۱

مراحل رسم به صورت زیر می باشد:



$$\begin{cases} S_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \\ S_2 = \frac{(1+2) \times 1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 2(S_1 + S_2) = 2\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 7$$

$$f(|x|) = \begin{cases} f(-x) & ; x < 0 \\ f(x) & ; x \geq 0 \end{cases}$$

نکته:

(مسئله ۲- تابع، صفحه های ۱ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است با حرکت روی نمودار (از چپ به راست) هیچ‌گاه رو به بالا حرکت نخواهیم کرد و اگر همواره رو به پایین حرکت کنیم تابع اکیداً نزولی است. با توجه به تعریف فوق، تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, 1)$ اکیداً نزولی است.

از طرفی تابع در بازه $(1, +\infty)$ ثابت است. تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میلاد سپاری لاریجانی)

$$D_{f+g} = \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow h = f + g = \left\{ (1, 2), (2, 1 + x^2), (3, 5) \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{h صعودی باشد}} x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) \leq h(x_2)$$

$$\Rightarrow 2 \leq x^2 + 1 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$$

بنابراین x می‌تواند ۴ عدد صحیح ۲، -۱، -۲، ۱ و ۲ باشد.

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عمید علیزاده)

$$-1 < 2 \xrightarrow{\text{f نزولی}} f(-1) \geq f(2)$$

$$\Rightarrow |x| \geq |x-1| \Rightarrow x^2 \geq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{f(2x+1)}{f(x-2)} \geq 1 \xrightarrow{xf(x-2) < 0} f(2x+1) \leq f(x-2)$$

$$\xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی است}} 2x+1 \geq x-2 \Rightarrow x \geq -3$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = |2x| - |x-1| = \begin{cases} -x-1 & ; x < 0 \\ 3x-1 & ; 0 \leq x < 1 \\ x+1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

تابع f در $[-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = -x - 1$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \xrightarrow{x \leq 0} x = -1$$

(مسئله ۲- تابع، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

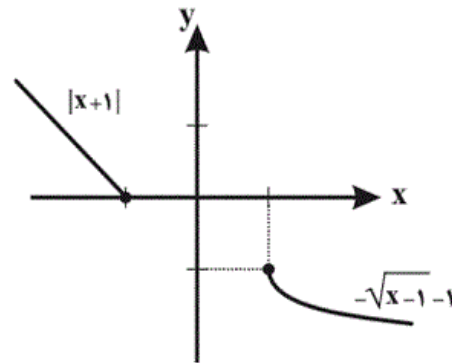
 ۲

 ۱

واضح است برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد، فقط مقدار $a = -\frac{1}{2}$ قابل

قبول است.

راه حل دوم: ابتدا ضابطه‌ها را رسم می‌کنیم:



حال برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد، باید شروط زیر برقرار باشد:

$$x = -1: \frac{1}{2} + a \leq 0 \Rightarrow a \leq -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$x = 1: \frac{-1}{2} + a \geq -1 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

بنابراین داریم:

$$(1) \cap (2) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = \frac{17}{2}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳✓

۲

۱

(یاسین سپهر)

-۱۴۲

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3AB = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 3AB = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳

۲✓

۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 64 & \\ & & 324 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 4 + 64 + 324 = 392$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۱، ۱۲ و ۱۷ تا ۲۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

۱۴۴

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + BA + AB \Rightarrow C = A^2 + B^2 + AB$$

$$= (A + B)^2 - BA = (2I)^2 - BA \Rightarrow C = 4I - I = 3I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$A = \begin{bmatrix} 2a-1 & a+2 \\ b-1 & a+b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2=0 \\ b-1=0 \end{cases} \xrightarrow[b=1]{a=-2} A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -a & b-1 \\ a+2 & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b-1=0 \\ a+2=0 \end{cases} \xrightarrow[b=1]{a=-2} B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها = -۱۲

تذکر: در ماتریس اسکالر، درایه‌های خارج قطر اصلی برابر صفر و درایه‌های

واقع بر قطر اصلی برابر یکدیگرند، پس در ماتریس B، c لزوماً برابر ۲

است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربرد، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

چون ضرب دو ماتریس A و B قابل تعریف است، پس می‌توانیم فرض

کنیم A و B به ترتیب ماتریس‌هایی از مرتبه‌های $m \times n$ و $n \times p$ باشند.

در این صورت ماتریس C از مرتبه $m \times p$ است. از طرفی چون ضرب دو

ماتریس B و C قابل تعریف است، پس تعداد ستون‌های B ، برابر تعداد

سطرهای C است، یعنی $m = p$ می‌باشد. در این صورت ماتریس D از

مرتبه $n \times p$ بوده و مرتبه آن با ماتریس B یکسان است.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

یک ماتریس اسکالر مانند I با هر ماتریس هم مرتبه اش تعویض پذیر است.

همچنین توان های مختلف یک ماتریس با هم تعویض پذیرند، بنابراین داریم:

$$A(A^2 + A) = A^3 + A^2 = (A^2 + A)A \quad \text{الف:}$$

$$A(A - I) = A^2 - A = (A - I)A \quad \text{ب:}$$

$$A(A + I) = A^2 + A = (A + I)A \quad \text{پ:}$$

$$A(A^2 + I) = A^3 + A = (A^2 + I)A \quad \text{ت:}$$

یعنی ماتریس A با هر 4 ماتریس داده شده تعویض پذیر است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه های ۱۹ تا ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

طرفین رابطه $AB - BA = I$ را یک بار از سمت راست و بار دیگر از

سمت چپ در ماتریس B ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} B(AB - BA) = BI \Rightarrow BAB - B^2A = B \\ (AB - BA)B = IB \Rightarrow AB^2 - BAB = B \end{array} \right\} + \Rightarrow AB^2 - B^2A = 2B$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 2A$$

$$A^4 = (A^2) \cdot (A^2) = (2A)(2A) = 4A^2 = 4(2A) = 8A$$

$$\Rightarrow k = 8$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اتحادهای جبری تنها زمانی برای دو ماتریس A و B برقرار هستند که

ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند. داریم:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+3x & y+x \\ 5 & 2y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2y & x+y \\ 5 & 3x+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓