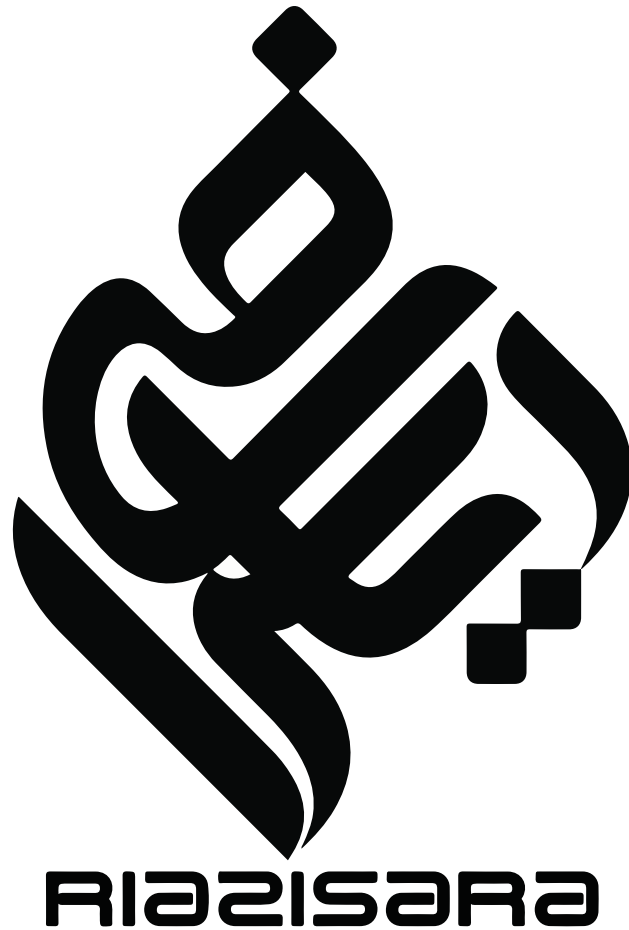




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۸۱- کدام دو تابع مساوی نیستند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \end{array} \right. \quad (۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \log x^2 \\ g(x) = 2 \log x \end{array} \right. \quad (۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = |x| \end{array} \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x|x| \\ g(x) = x^2 \end{array} \right. \quad (۱)$$

۸۲- اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + a}}{2x - b}$ به صورت $D_f = [-2, 2] - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟
(۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۸۳- برد تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3} - \left[\frac{2x-6}{6} \right]} + 3$ بازه $[a, b]$ است. حاصل $b^2 - a$ کدام است؟ $(\quad)$ ، نماد جزء صحیح است.
(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۵

۸۴- کدام تابع وارون پذیر است؟ $(\quad)$ ، نماد جزء صحیح است.
(۱) $x[x]$ (۲) $x^2|x|$ (۳) $x - [x]$ (۴) $2x + |x-1|$

۸۵- اگر تابع $f = \{(1, 6), (3, 9), (1, a + \sqrt{a}), (2, 4), (b, 9)\}$ وارون پذیر باشد، حاصل $f^{-1}(a) + f^{-1}(2b)$ کدام است؟
(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۱۰ (۴) ۴

۸۶- اگر $f(x) = 3x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشد، عرض از مبدأ تابع $(f \circ g)^{-1}$ کدام است؟
(۱) $\frac{10}{9}$ (۲) $-\frac{8}{9}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۸۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار وارون تابع $f(x) = \sqrt{x+4} + 1 + a$ از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟
(۱) $a \geq -3$ (۲) $a \leq -3$ (۳) $|a| \geq 3$ (۴) $-1 \leq a \leq 3$

۸۸- اگر داشته باشیم: $f = \{(2, 3), (-1, -4), (3, 5)\}$ ، $g = \{(2, a), (-4, -1), (3, b)\}$ و $\frac{f}{g-1} = \{(2, -1)\}$ ، حاصل $a - b$ کدام است؟
(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

۸۹- اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $D_{f \circ g} = [a, +\infty) - \{b\}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

- ۹۰- اگر $f(x) = \frac{x}{[x]}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ باشد، دامنه تابع gof کدام است؟ $(\quad)$ ، نماد جزء صحیح است.
- (۱) $\mathbb{R}^-$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $\mathbb{R}^- - \mathbb{Z}$ (۴) $\mathbb{R} - [0, 1) - \mathbb{Z}$

هندسه ۲، دایره - ۱۰ سوال

۱۲۱- دو دایره $C(O, 1)$ و $C'(O', 4)$ مماس خارج هستند. اگر از نقطه O مماس OA بر دایره C' رسم شود (A نقطه تماس است)، اندازه پاره خط OA کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۲- در شکل زیر $AM = 2$ ، $AB = 5$ و $AC = 7$ است. محیط مثلث ABC کدام است؟



- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) نمی توان تعیین کرد.

۱۲۳- اگر طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع های ۳ و ۱، برابر $4\sqrt{3}$ باشد، بیش ترین فاصله بین نقاط این دو دایره کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $12\sqrt{3}$ (۴) ۱۲

۱۲۴- یک دوزنقه متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع R محیط شده است. اگر محیط دوزنقه ۴۰ و طول قاعده کوچک آن ۴ باشد، مساحت دوزنقه چقدر است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۴۰ (۴) ۹۰

۱۲۵- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', 4)$ خارج یکدیگرند. اگر مماس مشترک داخلی این دو دایره، خط المکرزین $OO' = 8$ را به نسبت

۲ به ۱ قطع کند، طول این مماس مشترک چقدر است؟ ($R < 4$)

- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) $3\sqrt{7}$ (۳) $2\sqrt{7}$ (۴) $\frac{3}{2}\sqrt{7}$

۱۲۶- دو دایره به شعاع‌های $R = 1$ و $R' = 3$ ، مماس خارج هستند. زاویه بین مماس مشترک خارجی این دو دایره با امتداد خط

المركزين، چند درجه است؟

۱۵ (۱)

۳۰ (۲)

۴۵ (۳)

۶۰ (۴)

۱۲۷- نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، درون مثلث بوده و به فاصله ۳ از قاعده $BC = 8$ قرار

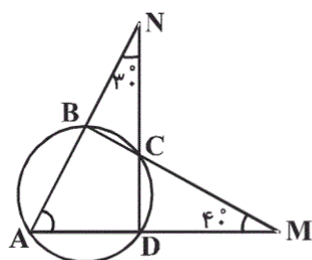
دارد. فاصله نقطه O از هر یک از ساق‌ها چقدر است؟

۱ (۱) $\sqrt{5}$

۲ (۲) $2/5$

۳ (۳) $\sqrt{6}$

۴ (۴) ۲



۱۲۸- در شکل مقابل، زاویه A چند درجه است؟

۱ (۱) ۶۵

۲ (۲) ۷۰

۳ (۳) ۵۵

۴ (۴) ۶۰

۱۲۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، از نقطه I محل تلاقی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث، دو عمود IH و IH' به ترتیب بر

دو ضلع AB و AC رسم شده است. اگر فاصله نقطه I از وتر، برابر $2\sqrt{2}$ باشد، طول HH' کدام است؟

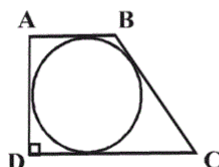
۱ (۱) ۳

۲ (۲) $2\sqrt{6}$

۳ (۳) $4\sqrt{2}$

۴ (۴) ۴

۱۳۰- مطابق شکل، دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ بر دایره‌ای محیط شده است. اگر دایره، ساق بزرگ‌تر را به دو پاره‌خط به اندازه‌های ۲ و ۸



تقسیم کند، طول بزرگ‌ترین قاعده دوزنقه کدام است؟

۱ (۱) ۱۰

۲ (۲) ۱۲

۳ (۳) ۱۴

۴ (۴) ۱۶

۱۳۱- سه مجموعه دلخواه A ، B و C را در نظر بگیرید. حاصل عبارت $(A \cup B) - C$ همواره کدام است؟
 (۱) $(C - A') \cap (C - B')$ (۲) $(C - A) \cup (C - B)$ (۳) $(A \cap C) - (B \cap C)$ (۴) $(A - C) \cup (B - C)$

۱۳۲- A و B دو مجموعه دلخواه هستند. متمم مجموعه $(B' - A) \cup (A' - B)$ همواره کدام است؟
 (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) $A' \cap B'$ (۴) $A' \cup B'$

۱۳۳- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی و $A - B = B - A$ باشد، آنگاه حاصل $(C \cup A) \cap B'$ همواره برابر کدام است؟
 (۱) $C - A$ (۲) $A - C$ (۳) $A \cap C$ (۴) $A \cup C$

۱۳۴- اگر $A \cup B' \subseteq A \cap C$ باشد، آنگاه کدام گزاره همواره درست است؟
 (۱) $A \subseteq B$ (۲) $A \subseteq B'$ (۳) $B' \subseteq A$ (۴) $B \subseteq A$

۱۳۵- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $A \cap B = \{3, 4\}$ و مجموعه $(A \cup B) \times (B - A)$ دارای ۱۲ عضو باشد، تعداد اعضای مجموعه B کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

آمار و احتمال ، احتمال - ۵ سوال

۱۳۶- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، سکه را یک بار دیگر پرتاب می‌کنیم، در غیر این صورت سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش تصادفی، پیشامد این که حداقل یک بار «رو» ظاهر شود، چند عضو دارد؟
 (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۳۷- از بین اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۷ است؟
 (۱) $0/34$ (۲) $0/41$ (۳) $0/42$ (۴) $0/43$

۱۳۸- در جاده تهران- فیروزکوه، احتمال آنکه خواب آلودگی از عوامل مؤثر در وقوع تصادفات باشد $0/35$ و احتمال آنکه سرعت زیاد تأثیرگذار باشد $0/55$ است. هم‌چنین احتمال آنکه علت تصادف، هر دو عامل باشد $0/10$ است. احتمال آنکه در این جاده از بین دو عامل مذکور، تصادفی فقط در اثر خواب آلودگی یا فقط در اثر سرعت زیاد رخ دهد، چقدر است؟
 (۱) $0/6$ (۲) $0/7$ (۳) $0/55$ (۴) $0/8$

۱۳۹- فضای نمونه یک آزمایش تصادفی از سه پیشامد ساده a ، b و c تشکیل شده است. اگر $P(a) = 2P(b)$ و $P(c) = \frac{1}{2}P(\{a, b\})$ باشد، احتمال وقوع پیشامد $\{a, c\}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{5}{9}$

۱۴۰- در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با معکوس آن عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال آن که عددی اول رو شود کدام است؟

(۱) $\frac{60}{147}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{30}{31}$ (۴) $\frac{62}{147}$

۹۱- دو تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x}$ و $g(x) = x - 2$ به ازای هر $x \neq 0$ برابرند، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 2)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(1, -2)$ (۴) $(-1, -2)$

۹۲- برد تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

۹۳- دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{|x-1|} - 2$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۹۴- معادلهٔ $x + \frac{1}{x} = 1$ چند جواب دارد؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۹۵- اگر تابع $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ یک‌به‌یک باشد، دو تایی (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, 3)$

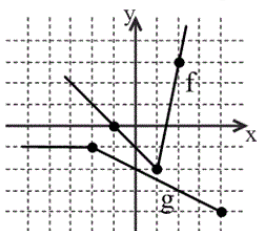
۹۶- اگر محل برخورد نمودار تابع $f(x) = 2x - |x| + 1$ با نمودار تابع وارونش نقطهٔ $A(a, b)$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۹۷- اگر $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x < 1 \\ x & ; x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = 2|x|$ باشد، نمودار تابع $f - g$ از کدام ناحیه یا نواحی دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول و دوم (۲) فقط دوم (۳) دوم و سوم (۴) فقط اول

۹۸- نمودار دو تابع f و g در شکل روبه‌رو رسم شده است. حاصل $\frac{(f-g)(3)}{(f \circ f)(7)}$ کدام است؟ (مربع‌های کوچک ضلع واحد دارند)



$\frac{25}{266}$ (۲)

$\frac{23}{133}$ (۱)

$\frac{35}{133}$ (۴)

$\frac{23}{266}$ (۳)

۹۹- اگر $f + g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$ و $f - g = \{(1, 1), (2, 4), (3, 0), (4, 1)\}$ باشد، تعداد اعضای fog کدام نمی تواند

باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۰۰- دو تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a

کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

(میلاد سجادری لاریفانی)

۸۱-

$$D_f = D_g = \mathbb{R} ; g(x) \neq f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x < 0 \\ x^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

در سایر گزینه‌ها، دامنه و ضابطه توابع یکسان هستند، بنابراین توابع موردنظر مساوی خواهند بود.

(مسابقه ۱- تابع، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱ ✓

$$2x - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{2} \quad \text{ریشهٔ مخرج}$$

با توجه به اینکه $D_f = [-2, 2] - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ است، و اینکه $\frac{b}{2}$ نباید در دامنه

باشد، داریم:

$$\Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1$$

برای به دست آوردن بازهٔ تعریف $\sqrt{-x^2 + a}$ ، می‌بایست زیر رادیکال

نامنفی باشد:

$$-x^2 + a \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq a \xrightarrow{a > 0} |x| \leq \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$$

با توجه به D_f داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 2 \\ -\sqrt{a} = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow a + b = 5$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3} - 1\right]} + 3 = \sqrt{\frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3}\right]} + 4$$

می‌دانیم که نامساوی $0 \leq p(x) - [p(x)] < 1$ همواره برقرار است.

بنابراین داریم:

$$0 \leq \frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3}\right] < 1 \Rightarrow 4 \leq \frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3}\right] + 4 < 5$$

۴

۳

۲ ✓

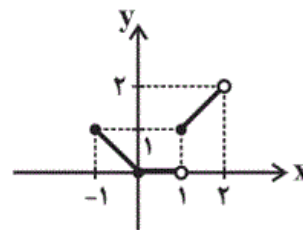
۱

(میلاد سبازی لاریجانی)

با رسم هر یک از گزینه‌ها، به پاسخ صحیح خواهیم رسید:

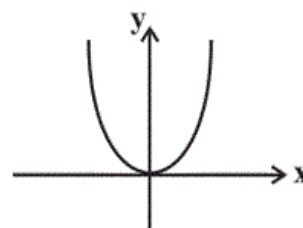
گزینه «۱»: یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

$$y = x[x] = \begin{cases} -x & ; -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ x & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



گزینه «۲»: یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

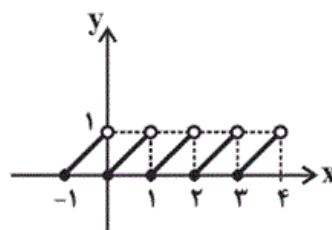
$$y = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & ; x \geq 0 \\ -x^3 & ; x < 0 \end{cases}$$



گزینه «۳»: یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

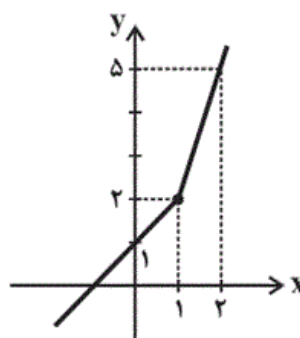
$$x+1 \quad ; -1 < x < 0$$

$$y = x - [x] = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 1 \\ x-1 & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



گزینه «۴»: یک به یک و وارون پذیر است.

$$y = 2x + |x-1| = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq 1 \\ x+1 & ; x < 1 \end{cases}$$



(مسابقان ۱- تابع، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(میلاد سبادی لاریجانی)

۸۵- ...

$$(1, 6), (1, a + \sqrt{a}) \in f \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} a + \sqrt{a} = 6$$

$$\xrightarrow{t=\sqrt{a}} t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2) = 0$$

$$\xrightarrow{t>0} t = \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$(3, 9), (b, 9) \in f \xrightarrow{\text{شرط وارون پذیر بودن}} b = 3$$

$$\Rightarrow f = \{(1, 6), (2, 4), (3, 9)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(a) + f^{-1}(2b) = f^{-1}(4) + f^{-1}(6) = 2 + 1 = 3$$

(مسابقان ۱- تابع، صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

(سید عادل حسینی)

$$\text{fog}(x) = 3\sqrt{x+1} - 1; D_{\text{fog}} = R_{(\text{fog})^{-1}} = [-1, +\infty)$$

$$\Rightarrow y = 3\sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow x = \left(\frac{y+1}{3}\right)^2 - 1$$

$$\Rightarrow (\text{fog})^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - 1$$

عرض از مبدأ یک تابع، مقدار آن تابع به ازای $x = 0$ خواهد بود؛ بنابراین

برای عرض از مبدأ تابع $(\text{fog})^{-1}$ داریم:

$$(\text{fog})^{-1}(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{8}{9}$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۵۴ تا ۷۰)

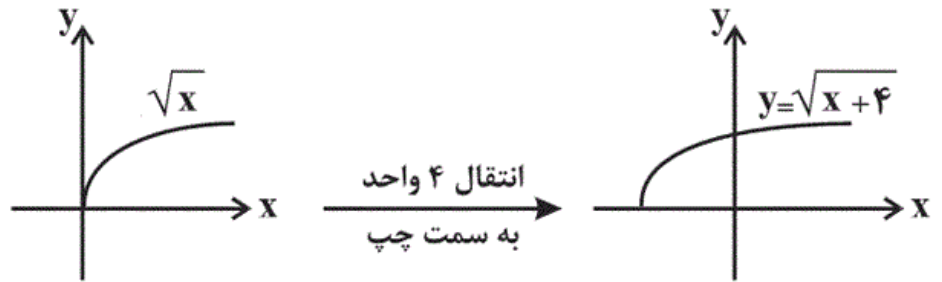
۴

۳

۲ ✓

۱

برای اینکه نمودار وارون تابع f از ناحیه دوم عبور نکند، کافی است نمودار تابع f از ناحیه چهارم عبور نکند.



حال برای اینکه نمودار f از ناحیه چهارم عبور نکند، کافی است عرض از مبدأ تابع نامنفی باشد.

$$\Rightarrow \sqrt{4} + 1 + a = a + 3 \geq 0 \Rightarrow a \geq -3$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۵۴ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(حمید علینزاده)

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)-1}$$

$$D_h = D_f \cap D_g - \{x : g(x) - 1 = 0\} = \{2, 3\} - \{3\} = \{2\}$$

$$\Rightarrow g(2) = b = 1$$

$$h(2) = \frac{f(2)}{g(2)-1} = \frac{3}{a-1} = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow a - b = -3$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad (*)$$

$$D_g = [\circ, +\infty) \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \geq \circ \mid 1 - \sqrt{x} \neq \circ\}$$

$$1 - \sqrt{x} \neq \circ \Rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\xrightarrow{(*)} D_{f \circ g} = [\circ, +\infty) - \{1\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \circ \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۴

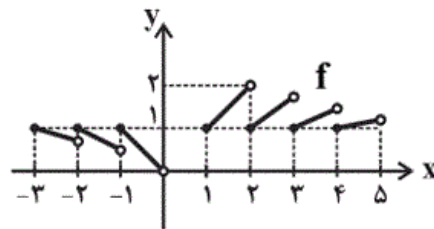
۳

۲ ✓

۱

$$D_f = \mathbb{R} - [0, 1) \quad (1)$$

حال با رسم تابع f ، داریم:



$$\Rightarrow R_f = (0, 2)$$

از طرفی واضح است که $D_g = (0, 1)$ است. بنابراین برای دامنه تابع $g \circ f$ داریم:

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid \frac{x}{[x]} \in (0, 1) \right\}$$

با توجه به نمودار تابع f ، مشخص است:

$$0 < \frac{x}{[x]} < 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} D_{g \circ f} = (\mathbb{R} - [0, 1)) \cap (\mathbb{R}^- - \mathbb{Z}) = \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

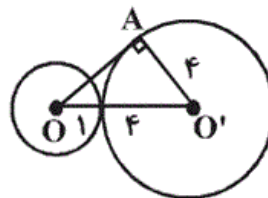
۴

۳ ✓

۲

۱

(مهم‌علی نادرپور)



$$OO' = R + R' = 1 + 4 = 5$$

مثلث $OA O'$ قائم‌الزاویه است، پس داریم:

$$OA^2 = OO'^2 - O'A^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow OA = 3$$

(هندسه ۲- دایره، صفحه ۲۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$AM = ۲ \Rightarrow AP = ۲$$

$$\begin{cases} AM = ۲ \\ AB = ۵ \end{cases} \Rightarrow BM = ۳ \Rightarrow BN = ۳ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} AP = ۲ \\ AC = ۷ \end{cases} \Rightarrow CP = ۵ \Rightarrow CN = ۵ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow BC = BN + CN = ۳ + ۵ = ۸$$

$$\text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = ۵ + ۷ + ۸ = ۲۰$$

(هندسه ۲ - دایره، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

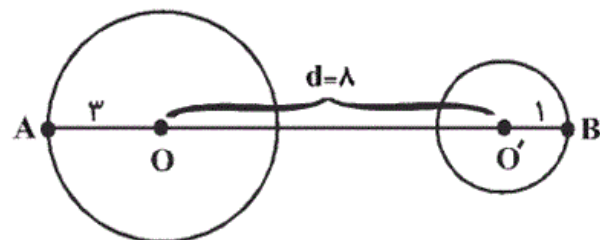
۳ ✓

۲

۱

$$L = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} : \text{طول مماس مشترک داخلی}$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt{۳} = \sqrt{d^2 - (۳ + ۱)^2} \Rightarrow d = ۸$$



$$\text{بیشترین فاصله نقاط دو دایره} = ۸ + ۳ + ۱ = ۱۲$$

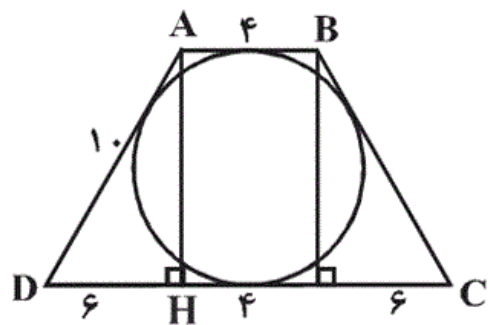
(هندسه ۲ - دایره، صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۴ ✓

۳

۲

۱



$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \times AH}{2} = \frac{(4 + 16) \times 8}{2} = 80$$

(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

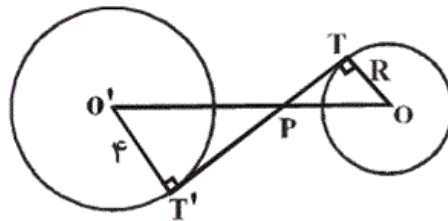
۳

۲✓

۱

(سیرمفسن فاطمی)

۱۲۵- هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۷ و ۲۸



$$\Delta OPT \sim \Delta O'PT' \text{ (تساوی زاویه‌ها)} \Rightarrow \frac{O'P}{OP} = \frac{O'T'}{OT}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{4}{R} \Rightarrow R = 2$$

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} \text{ : مماس مشترک داخلی}$$

$$= \sqrt{8^2 - (2 + 4)^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

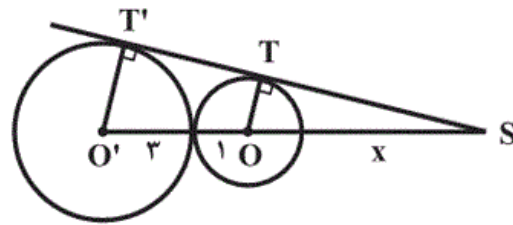
(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳✓

۲

۱



فرض کنید $SO = x$ باشد. داریم:

$$OT \parallel OT' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{SO}{SO'} = \frac{OT}{O'T'} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = x + 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

در مثلث قائم الزاویه $SO'T'$ ، $O'T' = 3$ و $SO' = 6$ است، یعنی طول

ضلع روبه‌رو به زاویه S ، نصف طول وتر است، پس $\hat{S} = 30^\circ$ است.

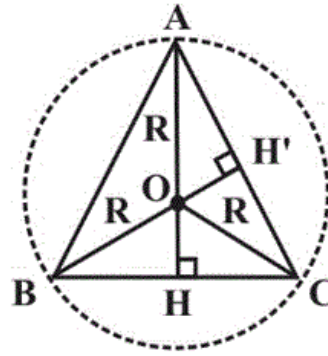
(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲ ✓

۱



مطابق شکل، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. چون $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است پس مرکز دایره محیطی آن (نقطه O) روی این ارتفاع (و یا امتداد آن) قرار دارد (چون عمود منصف و ارتفاع قاعده BC برهم منطبق‌اند). با توجه به

$$\triangle OHC : CH = \frac{BC}{2} = 4, OH = 3 \quad \text{فرض داریم:}$$

$$\Rightarrow R = OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\begin{aligned} \triangle AHC : AH &= R + OH = 5 + 3 = 8 \Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} \\ &= \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

از نقطه O ، عمود OH' را بر ضلع AC رسم می‌کنیم. نقطه O محل هم‌رسمی عمود منصف‌های اضلاع مثلث ABC است، پس OH' عمود منصف AC است و داریم:

$$\begin{aligned} \triangle OAH' : AH' &= \frac{AC}{2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow OH' = \sqrt{R^2 - AH'^2} \\ &= \sqrt{25 - 20} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

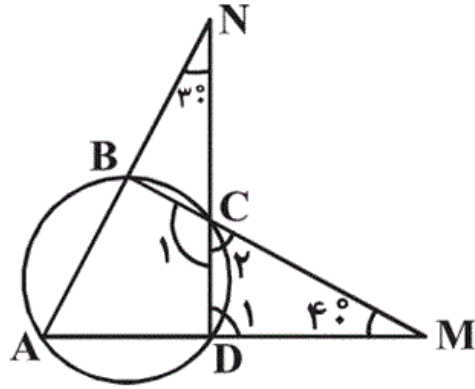
(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲

۱✓



مطابق شکل، چهارضلعی ABCD محاطی است، پس:

$$\hat{A} + \hat{C}_1 = 180^\circ \quad (1)$$

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \quad (2) \quad \text{از طرفی } \hat{C}_2 \text{ و } \hat{C}_1 \text{ مکمل‌اند، پس:}$$

$$\hat{C}_2 = \hat{A} \quad \text{از روابط (1) و (2) نتیجه می‌شود که:}$$

$$\hat{D}_1 = \hat{A} + 30^\circ \quad \text{هم‌چنین } \hat{D}_1 \text{ زاویه خارجی مثلث AND است، پس:}$$

۴

۳✓

۲

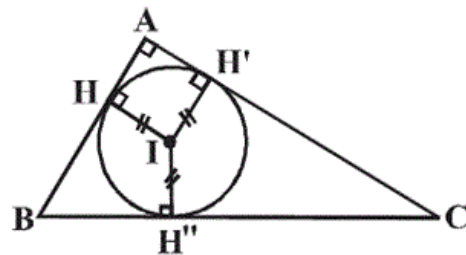
۱

(امیرمسین ابومصوب)

۱۲۹- (میرزا یحیی خان)

فاصله محل تلاقی نیمسازهای داخلی از ضلع BC، برابر است با شعاع دایره

محاطی داخلی مثلث ABC، پس $IH = IH' = IH'' = 2\sqrt{2}$.



اما چهارضلعی IHAH' به دلیل داشتن چهار زاویه قائمه و برابر بودن دو

ضلع مجاور IH و IH'، مربع و HH' قطر آن است. پس داریم:

$$HH' = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

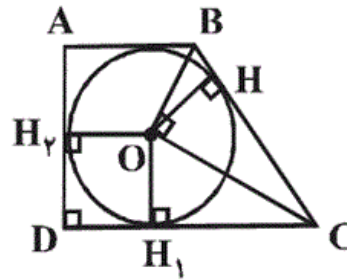
(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴✓

۳

۲

۱



نقطه O (مرکز دایره محاطی)، محل تلاقی نیمسازهای داخلی
زوایای B و C است.

از آنجا که $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ، نتیجه می‌شود که $\hat{BOC} = 90^\circ$ است. اگر R
شعاع دایره محاطی دوزنقه ABCD باشد، آنگاه طبق روابط طولی در مثلث
قائم‌الزاویه BOC داریم:

$$\frac{BH=2}{CH=8} \rightarrow R^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow R = 4$$

اگر از O عمودهای OH_1 و OH_2 را به ترتیب بر CD و AD وارد کنیم،
آنگاه چهارضلعی OH_1DH_2 مربع است، پس $H_1D = OH_2 = R = 4$
می‌باشد. از طرفی طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر
دایره برابر یکدیگرند، پس $CH_1 = CH = 8$ است. در نتیجه داریم:

$$CD = CH_1 + H_1D = 8 + 4 = 12$$

(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳

۲✓

۱

$$\begin{aligned}(A \cup B) - C &= (A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C') \\ &= (A - C) \cup (B - C)\end{aligned}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴✓

۳

۲

۱

$$[(B' - A) \cup (A' - B)]' = [(B' \cap A') \cup (A' \cap B')]'$$

$$= (A' \cap B')' = A \cup B$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(بهزاد نظام‌هاشمی)

۱۳۳ -

مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ دو مجموعه جدا از هم هستند، بنابراین تنها در صورتی برابر یکدیگرند که $A = B$ باشد. داریم:

$$(C \cup A) \cap B' = (C \cup A) \cap A' = (C \cap A') \cup (A \cap A')$$

$$= (C - A) \cup \emptyset = C - A$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(پیمان فضلی)

۱۳۴ -

$$A \cup B' \subseteq A \cap C \xrightarrow{A \cap C \subseteq A} A \cup B' \subseteq A$$

$$\xrightarrow{A \subseteq A \cup B'} A \cup B' = A \Rightarrow B' \subseteq A$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیرحسین ابومحبوب)

۱۳۵ -

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B - A| (*)$
 فرض کنیم $|B - A| = n$ باشد. در نتیجه $|A \cup B| = n + 4$ و از رابطه $|A \cup B| \times |B - A| = 12$ داریم:

$$(n + 4)n = 12 \Rightarrow n^2 + 4n - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -6 \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| \Rightarrow 2 = |B| - 2 \Rightarrow |B| = 4$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

اگر «رو» بیاید سکه را یک بار و اگر «پشت» بیاید سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. پس تعداد اعضای فضای نمونه این آزمایش تصادفی برابر است با:

$$1 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 = 6$$

متمم پیشامد مذکور آن است که اصلاً «رو» ظاهر نشود که فقط در حالتی امکان‌پذیر است که در پرتاب اول سکه «پشت» و در هر دو بار پرتاب مجدد سکه، «پشت» ظاهر گردد.

۴

۳

۲ ✓

۱

پیشامدهای آن که عدد انتخابی مضرب ۳ باشد و عدد انتخابی مضرب ۷ باشد را به ترتیب A و B در نظر می‌گیریم. داریم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{7}\right] - \left[\frac{100}{21}\right]$$

$$= 33 + 14 - 4 = 43$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{43}{100} = 0.43$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

A : تصادف به علت خواب‌آلودگی

B : تصادف به علت سرعت زیاد

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$= \frac{35}{100} + \frac{55}{100} - 2 \times \frac{10}{100} = \frac{70}{100} = 0.7$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$P(c) = \frac{1}{2} P(\{a, b\}) = \frac{1}{2} (1 - P(c)) \Rightarrow P(c) = \frac{1}{3}$$

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \Rightarrow P(a) + \frac{1}{2} P(a) + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow P(a) = \frac{4}{9}$$

$$P(\{a, c\}) = P(a) + P(c) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عمید کرویسی)

$$\begin{cases} P(1) = \frac{x}{1}, P(2) = \frac{x}{2}, P(3) = \frac{x}{3} \\ P(4) = \frac{x}{4}, P(5) = \frac{x}{5}, P(6) = \frac{x}{6} \end{cases}$$

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \dots + \frac{x}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{6 \cdot x + 3 \cdot x + 2 \cdot x + 1 \cdot x + 1 \cdot x + 1 \cdot x}{60} = 1 \Rightarrow x = \frac{60}{147} = \frac{20}{49}$$

$$P(\text{اول آمدن}) = P(2) + P(3) + P(5) = \frac{20}{49} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{20}{49} \times \frac{31}{30} = \frac{62}{147}$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

دو تابع مساوی‌اند، پس:

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{x \neq 0} \frac{ax^2 + bx}{x} = x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = ax^2 + bx \Rightarrow a = 1, b = -2$$

$$\Rightarrow (a, b) = (1, -2)$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(سؤال ۱۶۹ کتاب آبی)

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)} \xrightarrow{x \neq 0, 1} f(x) = x + 1$$

تابع f ، برابر $f(x) = x + 1$ است که فقط در دو نقطه به طول‌های $x = 1$

و $x = 0$ تعریف نمی‌شود.

$$\Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$f(x) = \sqrt{|x-1|-2}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$|x-1|-2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |x-1| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 3 \\ x-1 \leq -2 \Rightarrow x \leq -1 \end{cases}$$

بنابراین دامنه تابع f برابر است با:

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

پس دامنه تابع شامل اعداد صحیح ۲، ۱ و صفر نیست.

(مسابقه ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$[x] + \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow [x] = 1 - \frac{1}{2}x \quad (*)$$

از آنجا که حاصل جزء صحیح یعنی طرف چپ معادله فوق، همواره عددی

صحیح است، پس طرف راست نیز باید همواره عددی صحیح باشد. برای

آنکه عبارت $1 - \frac{1}{2}x$ عددی صحیح شود، باید x عددی زوج باشد،

یعنی: $k \in \mathbb{Z}$ و $x = 2k$ ، بنابراین داریم:

$$\xrightarrow[x=2k]{(*)} [2k] = 1 - \frac{1}{2}(2k) \Rightarrow 2k = 1 - k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$k = \frac{1}{3}$ غیر قابل قبول است زیرا $k \in \mathbb{Z}$ ، بنابراین معادله جواب حقیقی

ندارد.

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

از شرط تابع بودن، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه اول برابر نداشته باشند، پس:

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$a = -1$ قابل قبول نیست، زیرا در دو زوج مرتب متمایز $(a, 5)$

و $(-1, 4)$ ، مؤلفه‌های اول برابر خواهند شد، بنابراین $a = 2$

خواهد بود.

همچنین هنگامی تابع یک‌به‌یک است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی،

مؤلفه دوم برابر نداشته باشند، پس:

$$(3, 2) = (b, 2) \Rightarrow b = 3 \Rightarrow (a, b) = (2, 3)$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

☒ ۴

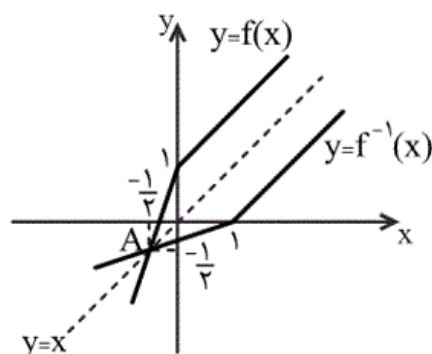
☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

تابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته و سپس رسم می‌کنیم:

$$f(x) = 2x - |x| + 1 = \begin{cases} x+1 & ; x \geq 0 \\ 3x+1 & ; x < 0 \end{cases}$$



نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست آید. با توجه به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط $y = x$ است و نقطه‌ای است که x آن منفی است، بنابراین:

$$x < 0: 3x + 1 = x \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a + b = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

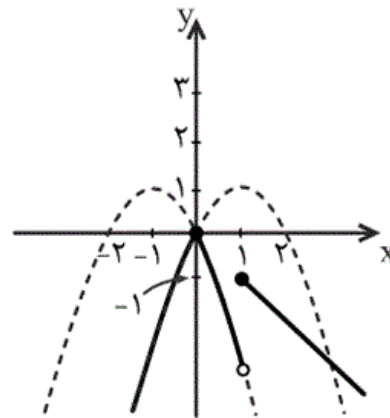
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x < 1 \\ x & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = 2|x| = \begin{cases} -2x & ; x \leq 0 \\ 2x & ; x > 0 \end{cases}$$

ضابطه تابع $f - g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f - g)(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x \leq 0 \\ -x^2 - 2x & ; 0 < x < 1 \\ -x & ; x \geq 1 \end{cases}$$

نمودار تابع $f - g$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار تابع $f - g$ از ناحیه اول و دوم عبور نمی‌کند.

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

باید ضابطه دو تابع f و g را بیابیم، برای هر یک از خطوط شیب نیم خطها را

با استفاده از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ و داشتن دو نقطه می یابیم، لذا داریم:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x - 2 & ; x \geq -2 \end{cases} \text{ و } f(x) = \begin{cases} -x - 1 & ; x \leq 1 \\ 5x - 7 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{(f - g)(3)}{(f \circ f)(7)} = \frac{f(3) - g(3)}{f(f(7))} = \frac{(15 - 7) - \left(-\frac{3}{2} - 2\right)}{f(35 - 7)}$$

$$= \frac{8 + \frac{7}{2}}{f(28)} = \frac{\frac{23}{2}}{133} = \frac{23}{266}$$

(مسابقه ۱- تابع، صفحه های ۶۳ تا ۶۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

می‌توان نوشت:

$$(f + g) + (f - g) = 2f = \{(1, 6), (2, 8), (3, 2), (4, 4)\}$$

$$(f + g) - (f - g) = 2g = \{(1, 4), (2, 0), (3, 2), (4, 2)\}$$

$$\Rightarrow f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 1)\}$$

$f + g$ و $f - g$ روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف شده است. یعنی

f و g به جز زوج‌های مرتب مشخص شده شاید زوج‌های مرتب دیگری

هم داشته باشند. یعنی f و g حداقل این ۴ زوج مرتب مشخص شده را

دارند، در این حالت:

$$f \circ g = \{(1, 4), (3, 3), (4, 3)\}$$

بنابراین $f \circ g$ حداقل شامل ۳ زوج مرتب است، در نتیجه تعداد اعضای

نمی‌تواند ۲ باشد.

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سؤال ۱۱۶۰ کتاب آبی)

$$g^{-1}(f(a)) = 3 \xrightarrow{\text{از طرفین } g \text{ می‌گیریم}} f(a) = g(3) = -2$$

$$\rightarrow f(a) = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow f(a) = \begin{cases} \sqrt{a} & ; a \geq 0 \\ -\sqrt{-a} & ; a < 0 \end{cases}$$

$$a \geq 0 \rightarrow \sqrt{a} \neq -2$$

$$a < 0 \rightarrow -\sqrt{-a} = -2 \rightarrow a = -4$$

(مسئله ۱- تابع، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۱ و ۶۶ تا ۶۸)

۴

۳

۲

۱ ✓