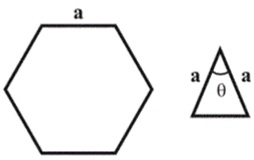
۱۱۱- در دنبالهٔ هندسی a_n، اگر همواره $a_{n+1} > a_n$، $a_۴ - a_۱ = ۶۳$ و $a_۲ - a_۱ = ۹$ باشد، $a_۵$ چند برابر $a_۲$ است؟

۱) ۸   ۲) ۸-   ۳) ۲۷   ۴) ۲۷-

۱۱۲- اگر ۶ برابر جملهٔ اول، ۳ برابر جملهٔ دوم و جملهٔ سوم از یک دنبالهٔ هندسی با جملات غیرصفر به‌ترتیب برابر جمله‌های دوم، پنجم و هفتم یک دنبالهٔ حسابی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۴

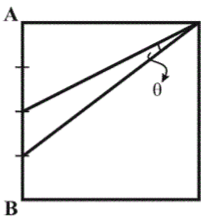
۱۱۳- اگر مساحت شش ضلعی منتظم روبه‌رو، ۹ برابر مساحت مثلث متساوی‌الساقین داده شده باشد، مقدار $|\cos\theta|$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۱۱۴- ضلع AB در مربع شکل مقابل، به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. $\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۲۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲۵}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۸۵}}{۸۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}$

۱۱۵- اگر $\tan\alpha(۱+\cos\alpha) < ۰$ و $\frac{۱+\sin\alpha}{۱+\cos\alpha} < ۱$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول   ۲) دوم

۳) سوم   ۴) چهارم

۱۱۶- اگر نقطهٔ $P\left(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ روی دایرهٔ مثلثاتی را -۸۴۰° نسبت به مبدأ مختصات دوران دهیم به نقطهٔ $P'(\alpha,\beta)$ می‌رسیم. مقـدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱-
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۴) ۱

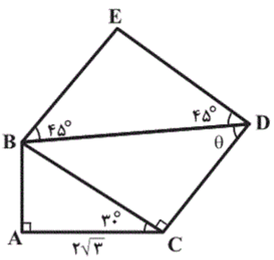
۱۱۷- زاویهٔ بین دو خط $\sqrt{۳}x-y=۱$ و $\sqrt{۳}y-x=۱$ چند درجه است؟

۱) ۴۵
۲) ۱۵
۳) ۳۰
۴) ۲۲/۵

۱۱۸- اگر $\tan\theta=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $\cos^۲\theta-۳\sin\theta\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۷}$
۲) $\frac{۱۰}{۱۷}$
۳) $-\frac{۵}{۱۷}$
۴) $-\frac{۱۰}{۱۷}$

۱۱۹- در شکل زیر، اگر $\cos\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ باشد، اختلاف طول پاره‌خط‌های BD و ED تقریباً کدام است؟



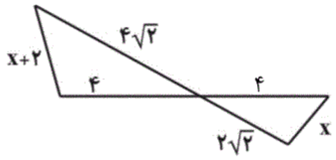
۱) ۱/۴
۲) ۱/۸
۳) ۲/۲
۴) ۲/۶

۱۲۰- با توجه به رابطهٔ $۲=\frac{۱}{۳\cos x}+۳\cos x$، اگر x در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\cot x$ کدام است؟

۱) $-۴\sqrt{۲}$
۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $-۲\sqrt{۲}$
۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

هندسه ۱ ، قضیه‌ی تالس، تشابه و کاربردها ی آن - ۱۰ سوال -

۱۵۱- با توجه به شکل روبه‌رو، مقدار x کدام است؟



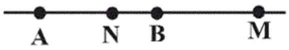
۱) ۲

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲}-۱$

۴) $۲(\sqrt{۲}+۱)$

۱۵۲- در شکل زیر، $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=۲$ و $MA=۱۸$ است، طول پاره‌خط NA کدام است؟



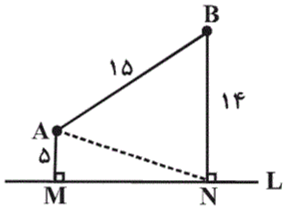
۱) ۴/۵

۲) ۳

۳) ۷/۵

۴) ۶

۱۵۳- مطابق شکل، اندازهٔ پاره‌خط‌های AM و BN به‌ترتیب ۵ و ۱۴ واحد است. اگر $AB=۱۵$ باشد، آنگاه طول پاره‌خط AN چند واحد است؟



۱) ۱۲

۲) $۱۰\sqrt{۲}$

۳) ۱۳

۴) $۸\sqrt{۲}$

۱۵۴- در مثلث ABC ، $AB=۶$ ، $AC=۴$ و $BC=۵$ است. نقاط D ، E و F را به‌ترتیب روی اضلاع AB ، BC و AC طوری انتخاب کرده‌ایم که چهارضلعی ADEF لوزی باشد. طول ضلع این لوزی کدام است؟

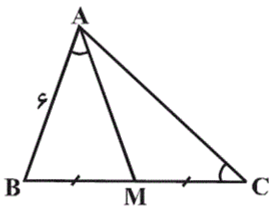
۱) ۲

۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) ۳

۴) $\frac{۱۲}{۵}$

۱۵۵- در مثلث ABC ، اگر $\widehat{BAM}=\hat{C}$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) $۶\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $۳\sqrt{۲}$

۱۵۶- در مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، اگر $AB=۲$ ، $AC=۴$ و نقطهٔ H پای ارتفاع وارد بر وتر باشد، مقدار $BH\times CH$ کدام است؟

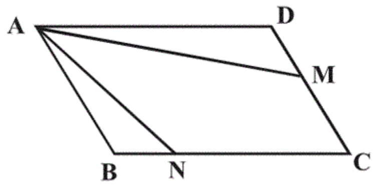
۱) ۶

۲) $\frac{۱۶}{۵}$

۳) $\frac{۶}{۵}$

۴) ۸

۱۵۷- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، نقاط M و N به گونه‌ای مفروض‌اند که $\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{BN}{NC}=\frac{۱}{۴}$ است. نسبت مساحت $A\overset{\Delta}{D}M$ به مساحت $A\overset{\Delta}{B}N$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۶}$
۲) ۲
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۵۸- در مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ واحد، فاصلهٔ نقطهٔ وسط یک ضلع از هر یک از قطرهای مستطیل، چند واحد است؟

۱) ۳/۶
۲) ۱/۸
۳) ۳
۴) ۲/۴

۱۵۹- در مثلث ABC $(AB < AC)$، عمودمنصف ضلع BC، نیمساز زاویهٔ خارجی A را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر M و N پای عمودهایی باشند که از نقطهٔ D به‌ترتیب بر خط‌های شامل AB و AC وارد می‌شوند. کدام نابرابری همواره درست است؟

۱) $DC > BM$
۲) $BM < CN$
۳) $DC < BM$
۴) $BM > CN$

۱۶۰- در چهارضلعی $MNOP$، اگر $MN = MP$ و $OP \neq ON$ باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) OM نیمساز زاویهٔ PMN است.

ب) OM بر NP عمود است.

پ) OM و NP یکدیگر را نصف می‌کنند.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

رياضي ۱ (احتمال) ، شمارش ، بدون شمارش - ۱۰ سوال -

۱۷۱- یک خودکار، یک پاک‌کن و یک دفتر را به چند طریق می‌توان بین ۵ دانش‌آموز توزیع کرد؟

۱) $۵^{۳}$
۲) $۳^{۵}$
۳) ۳×۵
۴) $P(۵,۳)$

۱۷۲- با ارقام ۱، ۳، ۷ و ۸، چند عدد کوچکتر از ۱۰۰۰ می‌توان ساخت؟ (تکرار ارقام مجاز است)

۱) ۶۴
۲) ۷۴
۳) ۷۶
۴) ۸۴

۱۷۳- اگر تمامی جایگشت‌های ۵ رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به‌ترتیب صعودی مرتب کنیم، آنگاه عدد ۴۲۱۳۵، چندمین عدد خواهد بود؟

۱) ۷۳ ۲) ۷۹ ۳) ۸۱ ۴) ۸۵

۱۷۴- در چند جایگشت سه حرفی با حروف کلمهٔ metro، حرف m وجود دارد؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۲ ۳) ۳۶ ۴) ۳۰

۱۷۵- با مجموعه ارقام $\{۴,۵,۶,۷,۸\}$، چند عدد ۴ رقمی بزرگ‌تر یا مساوی ۶۵۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۱) ۲۵۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۳۵۰ ۴) ۴۰۰

۱۷۶- ۴ مرد و ۲ زن به چند طریق می‌توانند دریک ردیف کنار هم بنشینند، به طوری که در ابتدا و انتهای ردیف، مرد نشسته باشد؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۳۶۰ ۳) ۳۸۴ ۴) ۱۹۲

۱۷۷- در چند جایگشت ۸ حرفی از حروف کلمهٔ «computer»، عبارت «com» دیده می‌شود؟

۱) $۶!\times ۳!$ ۲) $۷!$ ۳) $۶!$ ۴) $۷!\times ۳!$

۱۷۸- با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ، چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت به‌گونه‌ای که حاصل‌ضرب ارقام آنها زوج باشد؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۳۶ ۴) ۶۰

۱۷۹- در یک ساختمان ۶ طبقه، افراد f,e,d,c,b,a هر کدام در یک طبقه زندگی می‌کنند. اگر بدانیم فرد b در طبقهٔ سوم و فرد a در طبقه‌ای بالاتر از فرد b زندگی می‌کند، آنگاه تعداد راه‌های مختلف برای سکونت این افراد در ساختمان کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

۱۸۰- تعداد جایگشت‌های شش حرفی واژهٔ olympiad که در آن، حروف صدادار و بی‌صدا یک در میان قرار گیرند، کدام است؟

۱) $۶!$ ۲) $\frac{۷!}{۲!}$ ۳) $۳\times ۵!$ ۴) $\frac{۳\times ۶!}{۲!}$

-۱۱۱ (سیدمیلاد موسوی‌چاشمی)

$$a_۴ - a_۱ = a_۱q^۳ - a_۱ = a_۱\left(q^۳ - ۱\right) = ۶۳ \qquad (۱)$$

$$a_۲ - a_۱ = a_۱q - a_۱ = a_۱\left(q - ۱\right) = ۹ \qquad (۲)$$

از تقسیم دو عبارت بالا داریم:

$$\frac{a_۱\left(q^۳ - ۱\right)}{a_۱\left(q - ۱\right)} = \frac{\left(q - ۱\right)\left(q^۲ + q + ۱\right)}{\left(q - ۱\right)} = q^۲ + q + ۱ = ۷$$

$$\Rightarrow q^۲ + q - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} q = ۲ \\ q = -۳ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

از آنجایی که همواره $a_{n+۱} > a_n$ است، مقدار مثبت برای q قابل قبول می‌باشد.

$$\Rightarrow \frac{a_۵}{a_۲} = \frac{a_۱q^۴}{a_۱q} = q^۳ = ۲^۳ = ۸$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

جملات دنبالهٔ هندسی را با a_n و دنبالهٔ حسابی را با b_n نمایش می‌دهیم.

داریم:

$b_۲ = ۶a_۱$ و $b_۵ = ۳a_۲$ و $b_۷ = a_۳$

در دنبالهٔ حسابی داریم:

$b_۷ - b_۵ = ۲d$ و $b_۵ - b_۲ = ۳d$

$$\Rightarrow \frac{b_۷ - b_۵}{b_۵ - b_۲} = \frac{a_۳ - ۳a_۲}{۳a_۲ - ۶a_۱} = \frac{a_۱q^۲ - ۳a_۱q}{۳a_۱q - ۶a_۱} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow q^۲ - ۳q = ۲q - ۴ \Rightarrow q^۲ - ۵q + ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} q = ۱ \\ q = ۴ \end{cases}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$ ✓

مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با:

$$S_۱ = ۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

مساحت مثلث با دو ضلع a و زاویهٔ بین θ برابر است با:

$$S_۲ = \frac{۱}{۲}(a)(a)\sin\theta = \frac{۱}{۲}a^۲\sin\theta$$

$S_۱$، ۹ برابر $S_۲$ است، پس:

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲}{\frac{۱}{۲}a^۲\sin\theta} = \frac{۳\sqrt{۳}}{\sin\theta} = ۹ \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

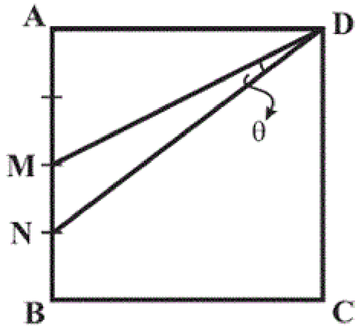
حالا با داشتن $\sin\theta$، مقدار $\cos\theta$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲ + \cos^۲\theta = ۱ \Rightarrow \cos^۲\theta = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow |\cos\theta| = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ و ۴۲ تا ۴۶)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴



اگر طول ضلع مربع را a در نظر بگیریم، داریم:

$$\left.\begin{matrix}AD = a\\ AM = \frac{a}{۲}\end{matrix}\right\} \Rightarrow MD = \sqrt{a^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}a$$

$$\left\{\begin{matrix}AD = a\\ AN = \frac{۳a}{۴}\end{matrix}\right. \Rightarrow ND = \sqrt{a^۲ + \left(\frac{۳a}{۴}\right)^۲} = \frac{۵}{۴}a$$

از طرفی مساحت مثلث MDN برابر است با: $\frac{۱}{۲}MN.AD = \frac{a^۲}{۸}$

از رابطهٔ مثلثاتی مساحت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}MD.ND\sin\theta = \frac{a^۲}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}a\right)\left(\frac{۵}{۴}a\right)\sin\theta = \frac{a^۲}{۸}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{۲}{۵\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۲۵}$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

(یاسین سپهر)

$$\cos\alpha \geq -1 \Rightarrow 1+\cos\alpha \geq 0 \qquad (1)$$

$$\tan\alpha(1+\cos\alpha) < 0 \xrightarrow{(1)} \tan\alpha < 0$$

بنابراین α در ناحیهٔ دوم یا ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

$$\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha} < 1 \xrightarrow{1+\cos\alpha>0} 1+\sin\alpha < 1+\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha < \cos\alpha \qquad (2)$$

پس α در بازهٔ $\left(-135^\circ, 45^\circ\right)$ قرار دارد.

از اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

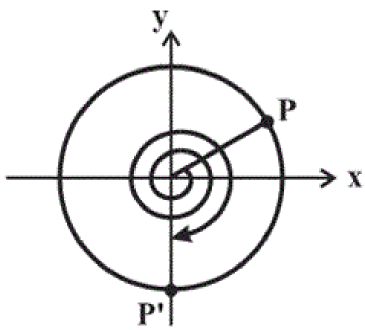
$$P\left(x_P,y_P\right)=P\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$$

$$P\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲}\right)=P\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

توجه داشته باشید که نقطهٔ P در ناحیهٔ اول قرار دارد.

$$۸۴۰^\circ=۲\times ۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ$$

حال اگر نقطهٔ P را ۸۴۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطهٔ P' (شکل زیر) می‌رسیم:



مختصات نقطهٔ P' به‌صورت $(۰,-۱)$ می‌باشد. پس داریم:

$$P'\left(\alpha,\beta\right)=P'\left(۰,-۱\right)$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=-۱$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۷ (سیدعادل حسینی)

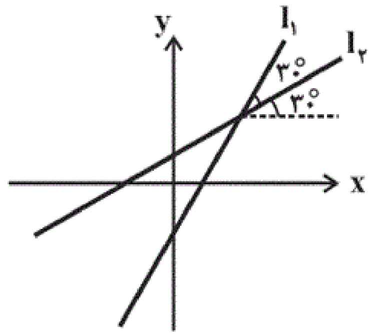
$$l_1 : \sqrt{۳}x - y = ۱ \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۱$$

$\Rightarrow \tan\theta_1 = \sqrt{۳} \Rightarrow$ زاویهٔ l_1 با قسمت مثبت محور x ها $: \theta_1 = ۶۰^\circ$

$$l_2 : \sqrt{۳}y - x = ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{\sqrt{۳}}x + \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow$ زاویهٔ l_2 با قسمت مثبت محور x ها $: \theta_2 = ۳۰^\circ$

$\Rightarrow$ زاویهٔ بین دو خط $= |\theta_1 - \theta_2| = ۳۰^\circ$



(ریاضی ۱- مثلثات، صفحهٔ ۴۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۱۸ (طاهر دارستانی)

$$\cos^۲\theta - ۳\sin\theta\cos\theta = \cos^۲\theta\left(۱ - \frac{۳\sin\theta\cos\theta}{\cos^۲\theta}\right)$$

$$= \frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}(۱ - ۳\tan\theta)$$

$$= \frac{۱}{۱+\frac{۹}{۲۵}}\left(۱ - \frac{۹}{۵}\right) = -\frac{۱۰}{۱۷}$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۱۹ (علی شهرابی)

$$\overset{\Delta}{ABC}: \cos 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 4$$

در مثلث BCD، با توجه به $BC = 4$ و $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$، داریم:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{2}{3}$$

$$\overset{\Delta}{BCD}: \sin\theta = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow BD = 6$$

$$\overset{\Delta}{BED}(\hat{E} = 90^\circ): \sin\hat{B} = \frac{ED}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ED}{6} \Rightarrow ED = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BD - ED = 6 - 3\sqrt{2} = 3\left(2-\sqrt{2}\right) \simeq 3(2-1/4) = 1/8$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۱ ✓۲ ۳ ۴

-۱۲۰ (حمید علیزاده)

$$3\cos x + \frac{1}{3\cos x} = \frac{9\cos^2 x + 1}{3\cos x} = 2 \Rightarrow 9\cos^2 x + 1 = 6\cos x$$

$$\Rightarrow 9\cos^2 x - 6\cos^2 x + 1 = \left(3\cos x - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}$$

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\cos x = \frac{1}{3}} 1+\tan^2 x = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9$$

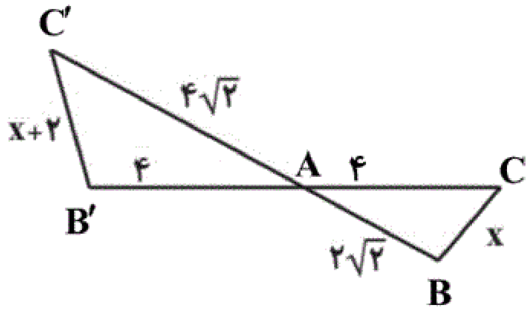
$$\Rightarrow \tan^2 x = 8 \Rightarrow \tan x = \pm 2\sqrt{2} \xrightarrow{x \in \text{ناحیهٔ چهارم}} \tan x = -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cot x = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(ریاضی ۱- مثلثات، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ✓۴

(محمدابراهیم گیتی‌زاده)



دو مثلث ABC و $AB'C'$ بنا به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین آن‌ها متشابه‌اند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ & (\text{متقابل به رأس}) \\ \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{AB}{AB'}, (\dfrac{۴}{۴\sqrt{۲}} = \dfrac{۲\sqrt{۲}}{۴} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}) \end{cases}$$

پس نسبت $\dfrac{BC}{B'C'}$ نیز برابر نسبت تشابه است و داریم:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{x}{x+۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۲x = \sqrt{۲}x + ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x\left(۲ - \sqrt{۲}\right) = ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}} \times \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۲}+۴}{۲} = ۲\left(\sqrt{۲}+۱\right)$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

(امیر محمدطاهری)

$$\frac{MA}{MB}=۲ \xrightarrow{MA=۱۸} MB=۹ \Rightarrow AB=MA-MB=۱۸-۹=۹$$

$$\frac{NA}{NB}=\frac{۲}{۱} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{NA}{NA+NB}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{NA}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow NA=۶$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

از A عمود AQ را بر BN رسم می‌کنیم. قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویهٔ AQB و سپس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AQN می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{AQB}: AQ^۲=AB^۲-BQ^۲=۱۵^۲-۹^۲=۲۲۵-۸۱=۱۴۴$$

$$\Rightarrow AQ=۱۲$$

$$\overset{\Delta}{AQN}: AN^۲=AQ^۲+QN^۲=۱۲^۲+۵^۲=۱۴۴+۲۵=۱۶۹$$

$$\Rightarrow AN=۱۳$$

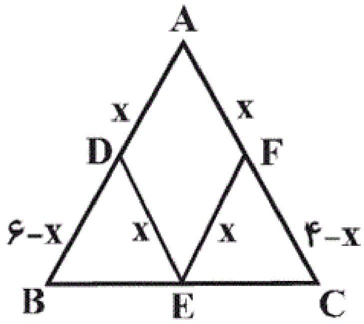
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(هومن نورائی)

$$\text{لوزی است } ADEF \Rightarrow EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{CF}{CA} = \frac{EF}{AB}$$

$$\frac{۴-x}{۴} = \frac{x}{۶} \Rightarrow ۲۴ - ۶x = ۴x \Rightarrow ۱۰x = ۲۴ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵}$$



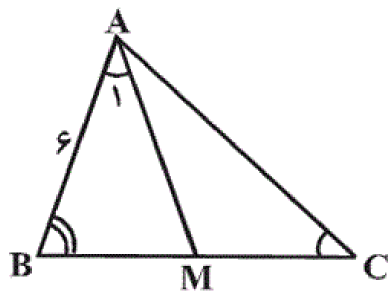
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\begin{cases}\hat{B}: \text{زاویهٔ مشترک} \\ \hat{A}_1 = \hat{C}\end{cases} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MBA} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BM}{AB}$$

$$\Rightarrow AB^۲ = BC.BM \xrightarrow{BM=\frac{BC}{۲}, AB=۶} ۳۶ = BC \times \frac{BC}{۲}$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۷۲ \Rightarrow BC = ۶\sqrt{۲}$$



(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

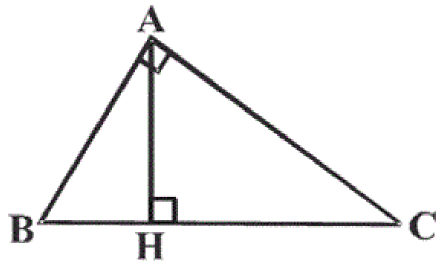
۱　　۲✓　　۳　　۴

(سیداسداله فاطمی)

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۵}$$

$$۲S_{\overset{\Delta}{ABC}} = AB \times AC = AH \times BC$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۴ = AH \times ۲\sqrt{۵} \Rightarrow AH = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$



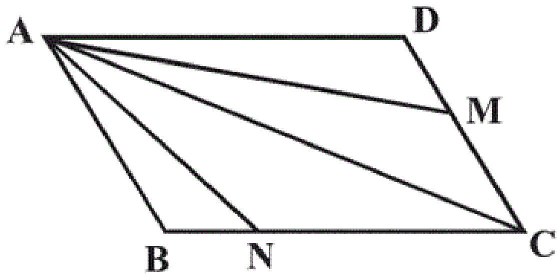
از طرفی داریم:

$$AH^۲ = BH.CH \Rightarrow BH.CH = (\frac{۴}{\sqrt{۵}})^۲ = \frac{۱۶}{۵}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$✓ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ADM و ADC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADM}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}=\frac{DM}{DC}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADM}}=\frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}S_{ABCD})=\frac{۱}{۶}S_{ABCD}\quad (۱)$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABN}}=\frac{۱}{۵}S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۵}\left(\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\right)$$

$$=\frac{۱}{۱۰}S_{ABCD}\qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ADM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABN}}}=\frac{\frac{۱}{۶}S_{ABCD}}{\frac{۱}{۱۰}S_{ABCD}}=\frac{۵}{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

☐۱ ☐۲ ☐۳✓ ☐۴

طبق قضیهٔ تالس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AXB ، طول MH نصف طول AX است. پس داریم:

$$\begin{cases} ۲S_{\overset{\Delta}{DAB}} = AD.AB = AX.BD \\ BD^۲ = AD^۲ + AB^۲ \Rightarrow BD = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{AD.AB}{BD} = \frac{۶ \times ۸}{۱۰} = ۴/۸$$

$$MH = \frac{۱}{۲}AX = \frac{۴/۸}{۲} = ۲/۴$$

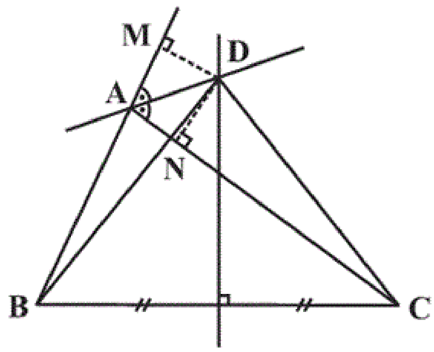
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷، ۴۱ و ۴۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۵۹ *(محمدطاهر شعاعی)*

نقطهٔ D روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد پس BD = DC. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDM ، پاره‌خط BD وتر است، پس از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن بزرگ‌تر است (DB > BM)، در نتیجه:

$$\left.\begin{matrix} DB = DC \\ DB > BM \end{matrix}\right\} \Rightarrow DC > BM$$



گزینه‌های «۲» و «۴» نادرست هستند. زیرا داریم:

$$\left.\begin{matrix} BM^۲ = BD^۲ - MD^۲ \\ CN^۲ = CD^۲ - ND^۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow[ND=MD]{CD=BD} BM = CN$$

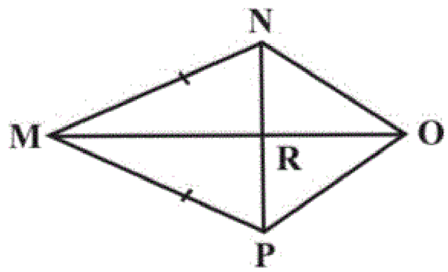
(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۳ و ۲۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۶۰ (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنیم قطرهای OM و NP ، یکدیگر را در نقطهٔ R قطع کنند.

چون مثلث MNP متساوی‌الساقین است، پس نیمساز زاویهٔ رأس، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر یکدیگر منطبق‌اند. یعنی اگر MR یکی از این سه ویژگی را دارا باشد، قطعاً دارای دو ویژگی دیگر نیز می‌باشد. بدین ترتیب OR در مثلث ONP ، ارتفاع و میانهٔ نظیر ضلع NP خواهد بود و این موضوع بدان معناست که مثلث ONP ، متساوی‌الساقین است که این خلاف فرض می‌باشد. پس هیچ کدام از گزاره‌های «الف»، «ب» و «پ» نمی‌توانند صحیح باشند.



(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

-۱۷۱ (مهدی زاهدی)

هر یک از خودکار، پاک‌کن و دفتر می‌توانند بین هر یک از ۵ نفر توزیع شوند یعنی هر کدام ۵ انتخاب دارند. پس داریم: $۵\times ۵\times ۵ = ۵^{۳}$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

-۱۷۲ (هادی پلاور)

عدد مورد نظر ممکن است یک رقمی، دو رقمی یا سه رقمی باشد.

$۴\times۴\times۴=۶۴$: تعداد سه رقمی‌ها

$۴\times۴=۱۶$: تعداد دو رقمی‌ها

$۴=۴$: تعداد یک رقمی‌ها

پس تعداد کل اعداد کوچکتر از ۱۰۰۰ با ارقام ۱، ۳، ۷ و ۸ برابر است با:

$۶۴+۱۶+۴=۸۴$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۷۳ (امیرحسین ابومحبوب)

تعداد اعداد ۵ رقمی حاصل از ارقام ۱ تا ۵ که رقم ۱، رقم سمت چپ آن‌ها باشد، برابر $۲۴=۴!$ است (تعداد جایگشت‌های ۴ رقم دیگر). به همین صورت تعداد اعداد ۵ رقمی با ارقام ۱ تا ۵، که یکبار رقم ۲ و بار دیگر رقم ۳، رقم سمت چپ آن‌ها باشد، هر کدام برابر ۲۴ است. درصورتی که رقم سمت چپ ۴ و رقم مجاور آن ۱ باشد، $۶=۳!$ جایگشت متفاوت داریم. واضح است که عدد بعدی به‌صورت ۴۲۱۳۵ می‌باشد. بنابراین عدد ۴۲۱۳۵ در مکان $۷۹=۱+۶+۲۴\times۳$ در ترتیب صعودی قرار می‌گیرد.

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۷۴ (امیرحسین طاهری)

طبق اصل متمم داریم:

$۶۰=۳\times۴\times۵$ = تعداد کل جایگشت‌های سه حرفی

$۲۴=۲\times۳\times۴$ = تعداد جایگشت‌های سه حرفی فاقد حرف m

$۳۶=۲۴-۶۰$ = تعداد جایگشت‌های سه حرفی شامل حرف m

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$۲\times ۵\times ۵\times ۵ = ۲۵۰ \Rightarrow$ تعداد کل اعداد مورد نظر $= ۱۰۰ + ۲۵۰ = ۳۵۰$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۷۶ (هنریک سرکیسیان)

۲ مرد در ابتدا و انتهای ردیف را می‌توان به $۴\times ۳ = ۱۲$ حالت انتخاب کرد. اما چهار نفر دیگر (شامل دو مرد و دو زن) باید در بین آنها بنشینند که این کار به $۴! = ۲۴$ حالت امکان‌پذیر است. لذا تعداد کل حالات برابر است با:

$۱۲\times ۲۴ = ۲۸۸$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۷۷ (فرهاد وفایی)

عبارت «com» را یک بسته فرض کرده که با پنج حرف باقی‌مانده دارای !۶ جایگشت هستند. دقت کنید که حروف عبارت «com» نباید جابه‌جا شوند، چون در این صورت عبارت عوض می‌شود.

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۷۸ (علیرضا ساوجی)

کل اعداد سه رقمی با ارقام متمایز داده شده برابر است با: $۵\times ۴\times ۳ = ۶۰$

اعداد سه رقمی که حاصل‌ضرب ارقام آنها فرد باشد، فقط می‌توانند شامل ۱، ۳ و ۵ باشد که تعداد آنها برابر است با: $۳! = ۶$

بنابراین $۶۰ - ۶ = ۵۴$ عدد سه رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که حاصل‌ضرب ارقام آنها زوج باشد.

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۷۹ *(رسول محسنی‌منش)*

a باید ساکن یکی از طبقات ۴ ، ۵ و ۶ باشد، پس سه حالت برای سکونت a وجود دارد، تعداد راه‌های سکونت ۴ فرد باقی‌مانده در ۴ واحد دیگر برابر !۴ است. پس کل حالات انجام این کار برابر است با:

$$۳ \times ۴! = ۷۲$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۱   ۲✓   ۳   ۴

-۱۸۰ *(نوید مجیدی)*

واژهٔ olympiad دارای ۸ حرف است که ۳ حرف o ، i و a صدادار هستند. تعداد جایگشت‌های مورد نظر، که در آن جایگاه‌های اول، سوم و پنجم را با حروف صدادار پر کنیم، به صورت زیر به دست می‌آید:

۳	۵	۲	۴	۱	۳
↓		↓		↓	
صدادار		صدادار		صدادار	

از طرفی می‌توان جایگاه‌های اول، سوم و پنجم را با حروف بی‌صدا پر کرد. پس تعداد کل جواب‌ها برابر است با:

$$۲ \times ۳! \times (۵ \times ۴ \times ۳) = ۳! \times (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲) = ۳! \times ۵! = ۶ \times ۵! = ۶!$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۱✓   ۲   ۳   ۴