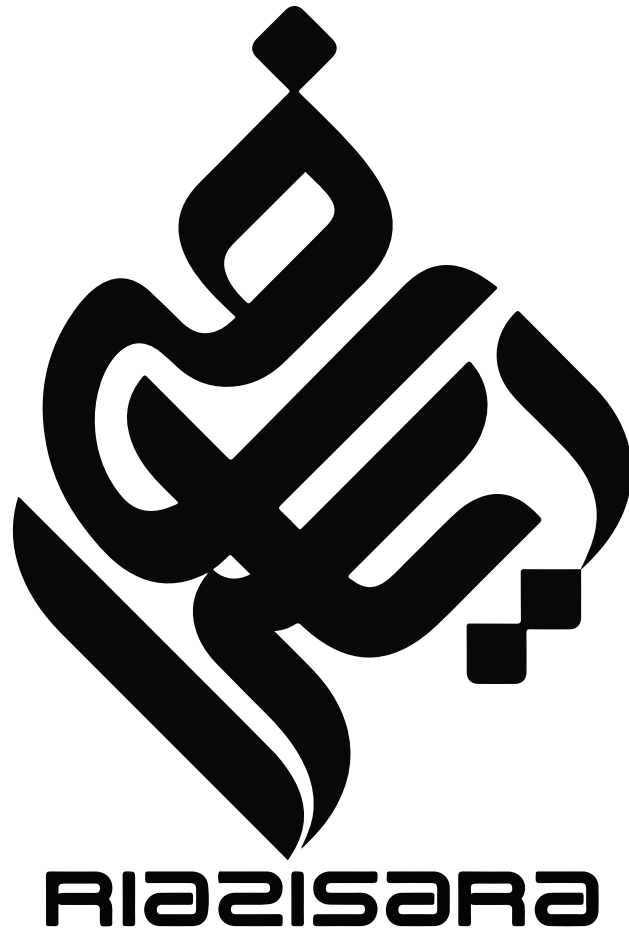




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



۴۱- $\frac{1}{3}$ عددی به علاوه ۹، برابر نصف قرینه آن عدد منهای ۲۱ می‌باشد، این عدد کدام است؟

(۴) -۳۶

(۳) ۳۶

(۲) ۱۴/۲

(۱) -۱۴/۲

۴۲- اگر محیط مربعی $۱۲\sqrt{۲}$ باشد، طول قطر آن کدام است؟

(۴) ۱۸

(۳) $۲\sqrt{۳}$

(۲) ۶

(۱) $۳\sqrt{۲}$

۴۳- در یک قلک تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی ۳ برابر تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و $\frac{۳}{۵}$ تعداد

اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی است. اگر مجموع پول قلک ۴۴۰۰۰۰ تومان باشد، در این صورت تعداد کل

اسکناس‌های داخل قلک کدام است؟ (در داخل قلک فقط اسکناس‌های ۵۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۱۰۰۰

تومانی وجود دارد.)

(۴) ۲۲۰

(۳) ۱۸۰

(۲) ۱۲۰

(۱) ۶۰

۴۴- اگر یکی از جواب‌های معادله $3x^2 - ax + 12 = 0$ برابر ۴- باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۳

(۲) -۱

(۱) ۱

۴۵- اگر بخواهیم معادله درجه دوم $3x^2 + 7x - 8 = 0$ را با استفاده از مربع کامل حل کنیم به صورت

$(x + \alpha)^2 = \beta$ درمی‌آید. در این صورت $\beta - \alpha$ کدام است؟

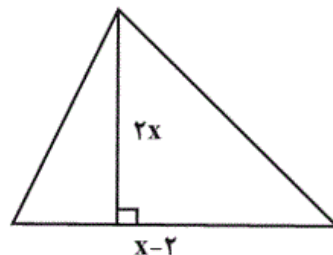
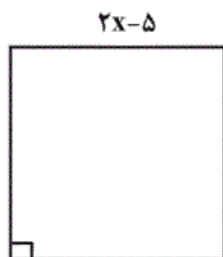
(۴) $\frac{103}{6}$

(۳) $\frac{103}{36}$

(۲) $\frac{138}{36}$

(۱) $\frac{138}{6}$

۴۶- اگر مساحت مربع شکل زیر یک واحد بیشتر از مساحت مثلث باشد، محیط مربع کدام است؟



(۱) ۲۴

(۲) ۱۲

(۳) ۳۲

(۴) ۳۶

۴۷- اختلاف ریشه‌های معادله $28x^2 + 45x + 17 = 0$ کدام است؟

(۴) $\frac{17}{45}$

(۳) $\frac{45}{28}$

(۲) $\frac{11}{28}$

(۱) $\frac{17}{28}$

ریاضی و آمار ۱، معادله های شامل عبارت های گویا -

۴۸- به ازای کدام مقدار k ، معادله $\frac{kx-3}{x^2+3} + \frac{x}{x+4} = \frac{k}{x}$ دارای جواب $x = -1$ می باشد؟

(۴) $\frac{9}{5}$

(۳) ۵

(۲) $\frac{13}{9}$

(۱) $\frac{5}{9}$

۴۹- مجموع جواب های معادله $1 + \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{12}{x+1}$ کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) -۱۰

(۲) ۵

(۱) -۵

۵۰- دو شیر A و B به یک استخر متصل می‌باشند. در حالتی که فقط شیر A باز باشد $\frac{1}{5}$ حجم استخر را

۴ ساعت زودتر از شیر B پُر می‌کند، اگر هر دو شیر باز باشند، آنگاه حجم کل استخر در ۲۴ ساعت پُر

می‌شود، اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پُر می‌شود؟

۱۲۰ (۴)

۸۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۰ (۱)

ریاضی و آمار ۲، گزاره ها و ترکیب گزاره ها -

۵۱- در کدام گزینه نقیض گزاره داده شده، ارزش درست دارد؟

(۱) هر عدد گویا، عددی صحیح نیز محسوب می‌شود.

(۲) $N \subseteq R$

(۳) کسر $\frac{x^3 - 5x}{|x| - 1}$ عبارتی گویا نیست.

(۴) در یک سری از داده‌های آماری با تعداد زوج، چارک دوم، داده‌ها را به دو گروه با تعداد مساوی تقسیم می‌کند.

۵۲- ارزش کدام گزاره با گزاره «نمودار تابع $y = x + 1$ از ناحیه چهارم دستگاه محورهای مختصات

نمی‌گذرد.» یکسان است؟

(۱) تساوی $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ یک اتحاد است.

(۲) قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است.

(۳) $|2 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5}$

(۴) تقریباً ۷۵ درصد داده‌ها از چارک اول بزرگترند.

۵۳- در جای خالی چه گزاره‌ای قرار دهیم تا ارزش گزاره حاصل، درست باشد؟

$$[(5^3 \geq 2^6) \wedge \boxed{}] \wedge \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} \text{ عددی گنگ است}\right)$$

$$\sim (a > b) \equiv (a < b) \quad (۱)$$

(۲) در یک جامعه آماری، مقدار یک آماره ممکن است با مقدار پارامتر برابر شود.

(۳) اگر همه داده‌های آماری ۳ برابر شوند، واریانس هم ۳ برابر می‌شود.

(۴) شیب هر خط افقی برابر ۲ است.

۵۴- در چه صورت گزاره مرکب $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ ارزش نادرست دارد؟

(۱) p درست و q نادرست باشد.

(۲) p درست و q درست باشد.

(۳) p نادرست و q درست باشد.

(۴) p نادرست و q نادرست باشد.

۵۵- در جای خالی کدام گزاره قرار گیرد تا ارزش گزاره شرطی نادرست باشد؟

«اگر رتبه افراد در کنکور، متغیر کیفی ترتیبی باشد، آنگاه ...»

(۱) میانه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۱ برابر ۶ است.

$$\sqrt{100+25} \neq 10+5 \quad (۲)$$

(۳) دامنه میان چارکی (IQR) برابر است با مجموع چارک‌های اول و سوم.

(۴) اگر $a > b$ آنگاه $a^3 > b^3$.

۵۶- چه تعداد از عبارتهای زیر صحیح می باشد؟

الف) نتیجه نادرست از یک گزاره درست، دارای ارزش نادرست است.

ب) ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ فقط به ارزش گزاره q بستگی دارد.

پ) گزاره شرطی همواره به انتفای مقدم دارای ارزش درست است، اگر تالی گزاره شرطی

$p \Rightarrow q$ نادرست باشد.

۴) صفر

۳) ۱

۲) ۲

۱) ۳

۵۷- ستون نتیجه جدول مقابل کدام است؟

p	q	$(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$
T	T	?
T	F	?
F	T	?
F	F	?

T
F
T
T

۲)

T
T
T
F

۴)

F
F
T
T

۱)

T
T
F
F

۳)

۵۸- در جای خالی کدام گزاره قرار گیرد تا ارزش گزاره حاصل درست باشد؟

«مربع هر عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی خود آن عدد است، اگر و تنها اگر...»

(۱) میانه داده‌های ۲-، ۳- و ۱ و ۴ برابر صفر است.

(۲) تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۱۸ برابر با ۵ است.

(۳) حاصل ضرب سه عدد منفی همواره کوچکتر از صفر است.

(۴) عدد ۱۴۱ عددی اول است.

۵۹- اگر گزاره‌های «معادله $x^2 + 4x + 3 = 0$ دو ریشه منفی دارد»، «واریانس داده‌های با میانگین

صفر برابر با صفر است» و «حاصل ضرب دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است» را به ترتیب p ،

q و r بنامیم، ارزش کدام گزاره درست است؟

(۱) $(p \Rightarrow q) \wedge r$ (۲) $(q \Rightarrow r) \wedge p$ (۳) $(r \Rightarrow p) \wedge q$ (۴) $(q \Rightarrow p) \wedge r$

۶۰- با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها، کدام گزاره مربوط به ستون آخر می‌باشد؟

$p \wedge \sim q$	q	?
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(۱) $\sim p \wedge (p \vee q)$

(۲) $\sim q \wedge (p \vee \sim q)$

(۳) $\sim p \vee (p \wedge q)$

(۴) $\sim q \wedge (\sim p \vee q)$

ریاضی و آمار-سوال‌ات موازی ، معادله و مسائل توصیفی

۶۱- فرنام برای قبولی در کنکور تصمیم می‌گیرد از روز شنبه هر روز ساعت درس خواندن خود را یک و

نیم برابر کند. اگر مجموع ساعات درس خواندن فرنام تا سه‌شنبه سیزده ساعت شود، فرنام در روز

یک‌شنبه چه مدت زمان درس خوانده است؟

(۲) دو ساعت و نیم

(۱) یک و نیم ساعت

(۴) دو ساعت و ۲۴ دقیقه

(۳) دو ساعت و ۱۱ دقیقه

۶۲- سن پدری سه برابر سن پسرش است. ده سال قبل نیز سن پدر، هفت برابر سن پسرش بوده است.

مجموع سن آنها چقدر است؟

(۴) ۶۰

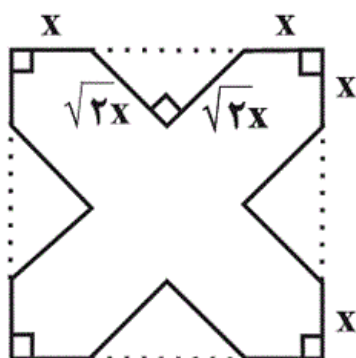
(۳) ۵۴

(۲) ۴۸

(۱) ۴۲

۶۳- اگر اندازه محیط شکل زیر دو برابر اندازه مساحت آن باشد، در این صورت مقدار x کدام است؟

(طول اضلاع مثلث‌ها $x\sqrt{2}$ و همه مثلث‌ها متساوی الساقین می‌باشند)



(۱) $\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

(۳) $\frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

۶۴- معادله $(4x+1)^2 = 8x-4$ دارای ...

(۲) دو ریشه مختلف علامه است.

(۱) یک ریشه منفی است.

(۴) ریشه حقیقی نیست.

(۳) یک ریشه مثبت است.

۶۵- به‌ازای چه مقادیری از m ، معادله $2x^2 + 3x + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه متمایز است؟

(۱) $m > \frac{33}{8}$ (۲) $m > -\frac{33}{8}$ (۳) $m < \frac{33}{8}$ (۴) فقط $m = \frac{33}{8}$

۶۶- ریشه کوچکتر معادله $2x^2 - \sqrt{3}x - 3 = 0$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $4x^2 + 3x - 7 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{21}{16}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $-\frac{16}{21}$ (۴) $-\frac{7}{3}$

۶۸- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + b = 0$ از دو برابر ریشه دیگر ۴ واحد کمتر باشد، در این

صورت مقدار b کدام است؟

(۴) -۶

(۳) ۶

(۲) -۲

(۱) ۲

ریاضی و آمار-سوالات موازی ، معادله های شامل عبارت های گویا

۶۹- ریشه‌های معادله $\frac{x+1}{x+3} + \frac{2x-1}{x-2} = 2$ چگونه است؟

(۲) فقط یک ریشه مثبت دارد.

(۱) فقط یک ریشه منفی دارد.

(۴) فاقد ریشه حقیقی است.

(۳) یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد.

۷۰- اگر علی و محسن و حمید کاری را با هم انجام دهند، این کار ۲ روزه انجام می‌شود. حمید به

تنهایی کار را در ۶ روز انجام می‌دهد و اگر محسن کار را به تنهایی انجام دهد از دو برابر تعداد

روزهایی که علی به تنهایی انجام می‌دهد، ۴ روز دیرتر انجام می‌دهد. علی کار را چند روزه انجام

می‌دهد؟

۴ / ۵ (۴)

۴ (۳)

۳ / ۵ (۲)

۳ (۱)

۴۱-

(معمد بصیرایی، معادله و مسائل توصیفی، صفحه‌ی ۲۶ تا ۳۴)

اگر عدد موردنظر را x در نظر بگیریم، $\frac{1}{3}$ آن به علاوه ۹ معادل $\frac{x}{3} + 9$ و نصف قرینه

آن منهای ۲۱ برابر $\frac{x}{2} - 21$ می‌باشد، حال داریم:

$$\frac{x}{3} + 9 = -\frac{x}{2} - 21 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = -9 - 21$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{6} = -30 \Rightarrow x = \frac{6 \times (-30)}{5} = -36$$

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

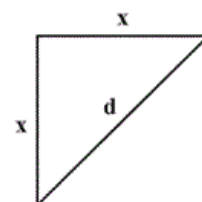
۴۲-

(فرداد روشنی، معادله و مسائل توصیفی، صفحه‌ی ۲۶ تا ۳۴)

اگر ضلع مربع را x در نظر بگیریم:

$$\text{محیط مربع} = 4x$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{2} = 4x \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$



قطر مربع برابر است با:

$$d = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2} \xrightarrow{x=3\sqrt{2}} d = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 = 6$$

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

اگر تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی را x فرض کنیم، داریم:

تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی $\times 3 =$ تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی

$\Rightarrow x = 3 \times$ تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی

$\Rightarrow \frac{x}{3} =$ تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی

تعداد اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی $\times \frac{3}{5} =$ تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی

$\Rightarrow x = \frac{3}{5} \times$ تعداد اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی

$\Rightarrow \frac{5}{3} x =$ تعداد اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی

مجموع پول کلک برابر است با تعداد هر یک از اسکناس‌ها در مبلغ آن، داریم:

مجموع اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی + مجموع اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی + مجموع اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی = مجموع پول کلک

$$\Rightarrow 440000 = \frac{5}{3}x \times 1000 + \frac{x}{3} \times 2000 + x \times 5000$$

$$\Rightarrow \frac{5000}{3}x + \frac{2000}{3}x + 5000x = 440000 \Rightarrow \frac{22000x}{3} = 440000$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \times 440000}{22000} = 60$$

پس تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی ۶۰ تا و تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی

$$\frac{60}{3} = 20 \text{ و تعداد اسکناس‌های } 1000 \text{ تومانی } 60 \times \frac{5}{3} = 100 \text{ عدد می‌باشد.}$$

پس تعداد کل اسکناس‌ها برابر است با:

$$100 + 20 + 60 = 180 = \text{تعداد اسکناس‌ها}$$

۴

۳ ✓

۲

۱

راه اول: با جایگذاری $x = -4$ در معادله و یافتن مقدار a داریم:

$$3 \times (-4)^2 - a \times (-4) + 12 = 0 \Rightarrow 48 + 4a + 12 = 0 \Rightarrow a = -15$$

حال با جایگذاری $a = -15$ در معادله و حل آن داریم:

$$3x^2 + 15x + 12 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین را به ۳ تقسیم می کنیم}}$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله با تجزیه}}$$

$$(x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

پس ریشه دیگر معادله $x = -1$ است.

راه دوم: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر α و β باشد، در این صورت داریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

حال با استفاده از این موضوع اگر ریشه دیگر را α در نظر بگیریم، داریم:

$$-4\alpha = \frac{12}{3} \Rightarrow -4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = -1$$

۴

۳

۲ ✓

۱

برای حل معادله درجه دوم با استفاده از مربع کامل، ابتدا عدد ثابت را به طرف راست تساوی می‌بریم، سپس با تقسیم طرفین معادله به ضریب x^2 و یک شدن ضریب x^2 ، در نهایت مربع نصف ضریب x را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم.

$$3x^2 + 7x - 8 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 7x = 8 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} + \frac{7x}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{7}{3}x = \frac{8}{3} \xrightarrow{\text{اضافه کردن مربع نصف ضریب } x \text{ به طرفین}} \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{3}\right)\right)^2$$

$$x^2 + \frac{7}{3}x + \left(\frac{1}{2} \times \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{7}{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} = \frac{8}{3} + \frac{49}{36}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{96}{36} + \frac{49}{36} \Rightarrow \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{145}{36}$$

با مقایسه با فرم استاندارد صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{7}{6} \\ \beta = \frac{145}{36} \end{cases} \Rightarrow \beta - \alpha = \frac{145}{36} - \frac{7}{6} = \frac{145}{36} - \frac{42}{36} = \frac{103}{36}$$

۴

۳✓

۲

۱

$$\text{مربع} = (2x - 5)^2$$

$$\text{مثلث} = \frac{1}{2}(2x)(x - 2) = x(x - 2) = x^2 - 2x$$

$$S_{\text{مربع}} = S_{\text{مثلث}} + 1 \Rightarrow (2x - 5)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow (2x - 5)^2 = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری از طرفین}} 2x - 5 = \pm(x - 1)$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = x - 1 \Rightarrow x = 4 \text{ ق} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = -x + 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \text{ غ} \end{cases}$$

از آنجا که $2x - 5$ و $x - 2$ طول اضلاع مربع و مثلث هستند، جوابی قابل قبول است که به ازای آن، طول اضلاع منفی یا صفر نشود.

$$\text{محیط مربع} = 4(2x - 5) = 4(2 \times 4 - 5) = 12$$

۴

۳

۲✓

۱

-۴۷

(هاری پلاور، حل معادله درجه ۲ و کاربردها، صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

در معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد، در این صورت یکی از ریشه‌ها $x_1 = -1$ و ریشه دیگر $x_2 = -\frac{c}{a}$ می‌باشد، حال با توجه به معادله داریم:

$$28x^2 + 45x + 17 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 28 \\ b = 45 \Rightarrow 45 = 28 + 17 \\ c = 17 \end{cases}$$

پس یکی از ریشه‌ها $x' = -1$ و ریشه دیگر $x'' = -\frac{17}{28}$ می‌باشد و اختلاف آنها برابر است با:

$$x'' - x' = -\frac{17}{28} - (-1) = -\frac{17}{28} + 1 = \frac{11}{28}$$

۴

۳

۲✓

۱

-۴۸

(همید زرین‌کفش، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۴)

با جایگذاری $x = -1$ در معادله داریم:

$$\begin{aligned} \frac{k \times (-1) - 3}{(-1)^2 + 3} + \frac{(-1)}{(-1) + 4} &= \frac{k}{(-1)} \\ \frac{-k - 3}{4} - \frac{1}{3} &= -k \Rightarrow k - \frac{k + 3}{4} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{4k - k - 3}{4} &= \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3k - 3}{4} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow 3k - 3 &= \frac{4}{3} \Rightarrow 3k = \frac{13}{3} \Rightarrow k = \frac{13}{9} \end{aligned}$$

۴

۳

۲✓

۱

-۴۹

(همید زرین‌کفش، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۴)

ابتدا طرفین معادله را در $k \cdot m \cdot m$ مخرج‌ها که $(x+1)^2$ می‌باشد، ضرب می‌کنیم تا معادله گویا به یک معادله درجه دوم تبدیل شود:

$$1 + \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{12}{(x+1)} \Rightarrow (x+1)^2 + 8 = 12(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 8 = 12x + 12 \Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$$

این معادله دو ریشه دارد و هر دو قابل قبول می‌باشند و هیچ یک از ریشه‌ها مخرج کسر را صفر نمی‌کنند، پس مجموع آنها برابر است با:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-(-10)}{1} = 10$$

۴✓

۳

۲

۱

(همید زربین کفش، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، صفحه‌ی ۴۹ تا ۵۴)

فرض می‌کنیم حجم کل استخر V باشد و شیر B ، $\frac{1}{5}$ حجم استخر را در مدت

x ساعت پر کند، پس شیر B در مدت یک ساعت $\frac{V}{5x}$ استخر را پر می‌کند و شیر

A در مدت یک ساعت $\frac{V}{5(x-4)}$ استخر را پر می‌کند، حال حجم کل استخر توسط

دو شیر در مدت ۲۴ ساعت پر می‌شود پس در یک ساعت $\frac{V}{24}$ استخر پر می‌شود:

$$\frac{V}{5x} + \frac{V}{5(x-4)} = \frac{V}{24} \Rightarrow \frac{1}{5x} + \frac{1}{5(x-4)} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{V}{5x} + \frac{V}{5(x-4)} = \frac{V}{24} \Rightarrow \frac{1}{5x} + \frac{1}{5(x-4)} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{x-4}{5x(x-4)} + \frac{x}{5x(x-4)} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{2x-4}{5x(x-4)} = \frac{1}{24} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} 24(2x-4) = 5x(x-4)$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 20x = 48x - 96 \Rightarrow 5x^2 - 68x + 96 = 0$$

$$\Rightarrow (5x-8)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-8=0 \Rightarrow x=\frac{8}{5} \\ x-12=0 \Rightarrow x=12 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

پس شیر B به تنهایی در ۱۲ ساعت $\frac{1}{5}$ حجم استخر را پر می‌کند، پس کل حجم استخر را در $5 \times 12 = 60$ ساعت پر می‌کند.

۴

۳

۲✓

۱

(امیر زرانروز، صفحه‌ی ۲ تا ۴)

باید گزاره‌ای را انتخاب کنیم که ارزش آن نادرست باشد تا ارزش نقیض‌اش درست

باشد. فقط ارزش گزاره ذکر شده در گزینه «۱» نادرست است، چون مثلاً $\frac{1}{2}$ گویاست

ولی صحیح نیست.

۴

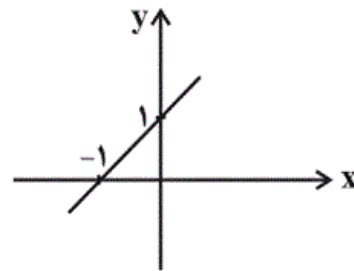
۳

۲

۱✓

دو گزاره زمانی با یکدیگر هم‌ارزند که ارزش آنها یکسان باشد یا هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند.

نمودار تابع $y = x + 1$ به صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که نمودار، از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد. پس این گزاره، گزاره‌ای با ارزش درست است.

بررسی گزینهٔ «۱»: تساوی $(x+1)^2 = x^2 + 1$ یک اتحاد نمی‌باشد، زیرا

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \neq x^2 + 1$$

بررسی گزینهٔ «۲»: قد افراد، متغیر کمی نسبتی است، چون نسبت قد هر دو نفر به یکدیگر، با معنی است.

$$\overline{|2 - \sqrt{5}|} = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5} \quad \text{بررسی گزینهٔ «۳»}$$

بررسی گزینهٔ «۴»: طبق مطالب خوانده شده در سال دهم، درست است.

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

باید گزاره‌ای را انتخاب کنیم که ارزش آن درست باشد، فقط ارزش گزارهٔ (۲) درست است.

بررسی گزینهٔ «۱»: نقیض گزارهٔ $(a > b)$ برابر است با: $a \leq b$

بررسی گزینهٔ «۳»: اگر همهٔ داده‌ها k برابر شوند واریانس k^2 برابر می‌شود، پس اگر همهٔ داده‌ها ۳ برابر شوند واریانس ۹ برابر می‌شود.

بررسی گزینهٔ «۴»: شیب هر خط افقی برابر صفر است.

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

جدول ارزش گزاره‌ها را برای گزاره‌های دلخواه p و q در نظر می‌گیریم، داریم:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p$	$(p \wedge \sim q) \vee \sim p$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

در صورتی ارزش گزاره داده شده نادرست است که هم p درست باشد و هم q .

۴

۳

۲✓

۱

می‌دانیم رتبه افراد در کنکور، متغیر کیفی ترتیبی است پس ارزش مقدم گزاره داده شده در متن سؤال، درست است، پس برای اینکه ارزش گزاره شرطی نادرست باشد کافی است ارزش تالی آن نادرست باشد. لذا باید به دنبال گزاره‌ای باشیم که ارزش آن نادرست باشد. تنها گزینه‌ای که ارزش گزاره‌اش نادرست است، گزینه «۳» می‌باشد

زیرا می‌دانیم: $IQR = Q_3 - Q_1$

۴

۳✓

۲

۱

مورد (الف) درست است.

مورد (ب) نادرست است. ارزش گزاره شرطی به ارزش هر دو گزاره p و q بستگی دارد.

مورد (پ) نادرست است. اگر مقدم گزاره شرطی نادرست باشد، آن‌گاه گزاره شرطی همواره به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

۴

۳✓

۲

۱

p	q	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F

۴✓

۳

۲

۱

ترکیب دوشروطی دو گزاره وقتی درست است که هر دو گزاره هم ارزش باشند یعنی هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند.

«مربع هر عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی خودش است» ارزش درستی دارد. پس گزینه‌ای صحیح است که ارزش گزاره آن درست باشد.

در گزینه «۱»: میانه داده‌های -۲ ، -۳ ، ۱ و ۴ مخالف صفر است، زیرا میانه در داده‌های مرتب شده برابر است با میانگین دو داده وسط، که برای این داده‌ها برابر است با:

$$-۳, -۲, ۱, ۴ \Rightarrow \text{میانه} = \frac{-۲+۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

در گزینه «۲»: گزاره «تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۱۸ برابر با ۵ است.» ارزش نادرست دارد. زیرا تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی عدد ۱۸ برابر با ۶ است؛ که عبارتند از:

۱، ۲، ۳، ۶، ۹، ۱۸

گزینه «۴»: عدد ۱۴۱ عددی است که بر ۳ بخش پذیر است، پس عددی اول نیست و تنها گزینه «۳» صحیح می‌باشد.

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

گزاره p:

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = -3$$

ارزش درستی دارد.

واریانس زمانی صفر می‌شود که همه داده‌ها با هم برابر باشند و واریانس داده‌های با میانگین صفر لزوماً برابر با صفر نیست و ارزش گزاره q نادرست است.

حاصل ضرب دو عدد گنگ ممکن است گویا شود، مانند $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ پس ارزش گزاره r نادرست است.

ارزش $(q \Rightarrow r)$ به انتفای مقدم درست است. ارزش گزاره p هم درست است، پس ارزش $(q \Rightarrow r) \wedge p$ درست است.

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

با توجه به معلوم بودن ارزش گزاره q ، ابتدا با استفاده از ترکیب عطفی نقیض آن با p ارزش گزاره p را بدست می‌آوریم. سپس با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها، ارزش گزاره‌های هر گزینه را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \text{ردیف اول: } & \begin{cases} q : \text{نادرست} \\ p \wedge \sim q : \text{درست} \Rightarrow p : \text{درست} \end{cases} \\ \text{ردیف دوم: } & \begin{cases} q : \text{درست} \\ p \wedge \sim q : \text{نادرست} \Rightarrow \begin{cases} p : \text{نادرست} \\ \text{یا} \\ p : \text{درست} \end{cases} \end{cases} \\ \text{ردیف سوم: } & \begin{cases} q : \text{نادرست} \\ p \wedge \sim q : \text{نادرست} \Rightarrow p : \text{نادرست} \end{cases} \end{aligned}$$

طبق جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \wedge (p \vee q)$	$p \vee \sim q$	$\sim q \wedge (p \vee \sim q)$
T	F	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F	T	T

$p \wedge q$	$\sim p \vee (p \wedge q)$	$\sim p \vee q$	$\sim q \wedge (\sim p \vee q)$
F	F	F	F
T	T	T	F
F	T	T	F
F	T	T	T

در نتیجه گزاره گزینه «۳» مربوط به ردیف آخر جدول می‌باشد.

۴

۳ ✓

۲

۱

اگر در روز شنبه x ساعت درس خوانده باشد، در این صورت ساعات درس خواندنش در روزهای دیگر به صورت زیر است:

سه‌شنبه دوشنبه یک‌شنبه شنبه

$$x \quad \frac{3}{2}x \quad \frac{9}{4}x \quad \frac{27}{8}x$$

$$\text{مجموع ساعات درس خواندنش} = x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x + \frac{27}{8}x = 13$$

$$\Rightarrow \frac{65}{8}x = 13 \Rightarrow x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5} \text{ ساعت}$$

ساعت درس خواندنش در روز یک‌شنبه برابر است با:

$$\frac{3}{2} \times (1\frac{3}{5}) = 2\frac{4}{5} \text{ ساعت}$$

که ساعت درس خواندنش در روز یک‌شنبه معادل دو ساعت و $\frac{4}{5} \times 60 = 24$ دقیقه

می‌باشد.

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

اگر سن پسر را x در نظر بگیریم، سن پدر $3x$ خواهد شد.

ده سال قبل سن پسر $x - 10$ و سن پدر $3x - 10$ بوده است.

$$3x - 10 = 7(x - 10) \Rightarrow 3x - 10 = 7x - 70 \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15$$

$$\Rightarrow 3x = 45$$

سن پسر در حال حاضر ۱۵ و سن پدرش ۴۵ سال است.

مجموع سن آنها نیز $45 + 15 = 60$ سال است.

☒ ۴

☐ ۳

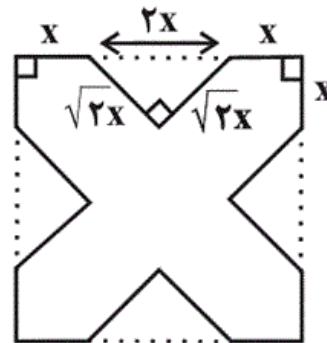
☐ ۲

☐ ۱

برای بدست آوردن مساحت شکل، کافی است مساحت ۴ مثلث قائم الزاویه را از مساحت مربع بزرگ کم کنیم:

$$\text{مساحت مربع} = (x + 2x + x)^2 = 16x^2$$

$$\text{مساحت هر مثلث} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2}x) \times (\sqrt{2}x) = x^2$$



مساحت شکل حاصل برابر است با:

$$16x^2 - 4 \times (\text{مساحت مثلث}) = 16x^2 - 4x^2 = 12x^2$$

$$\text{محیط شکل} = 4 \times (x + \sqrt{2}x + \sqrt{2}x + x) = 4(2x + 2\sqrt{2}x) = 8(\sqrt{2} + 1)x$$

طبق فرض مسأله داریم:

$$\text{مساحت شکل} = 2 \times \text{محیط شکل}$$

$$8(\sqrt{2} + 1)x = 2 \times 12x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{8(\sqrt{2} + 1)}{24} = \frac{(\sqrt{2} + 1)}{3} \end{cases}$$

۴

۳

۲ ✓

۱

ابتدا معادله را با استفاده از اتحاد مربع ساده تر می کنیم:

$$(4x + 1)^2 = 8x - 4 \Rightarrow (4x)^2 + 2 \times (4x) \times 1 + 1^2 = 8x - 4$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 8x + 1 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 5 = 0 \Rightarrow 16x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = -\frac{5}{16}$$

معادله ریشه حقیقی ندارد.

۴ ✓

۳

۲

۱

(عمید زرین‌کفش، حل معادله درجه ۲ و کاربردها، صفحه‌ی ۴۳ تا ۴۸)

معادله درجه دوم زمانی دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که مبین معادله $\Delta > 0$ باشد، در این صورت داریم:

$$2x^2 + 3x + m - 3 = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{ax^2 + bx + c = 0} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = m - 3 \end{cases}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (3)^2 - 4 \times (2) \times (m - 3) > 0$$

$$9 - 8(m - 3) > 0 \Rightarrow (m - 3) < \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow m < 3 + \frac{9}{8} \Rightarrow m < \frac{33}{8}$$

۴

۳✓

۲

۱

(فریده هاشمی، حل معادله درجه ۲ و کاربردها، صفحه‌ی ۴۳ تا ۴۸)

برای حل معادله با استفاده از روش کلی داریم:

$$2x^2 - \sqrt{3}x - 3 = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{ax^2 + bx + c = 0} \begin{cases} a = 2 \\ b = -\sqrt{3} \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times (2) \times (-3) = 3 + 24 = 27$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{3}) + \sqrt{27}}{2 \times (2)} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{3}) - \sqrt{27}}{2 \times (2)} = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴

۳✓

۲

۱

مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب آنها از

رابطه $\frac{c}{a}$ بدست می‌آید؛ داریم:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

حال با توجه به معادله داریم:

$$4x^2 + 3x - 7 = 0 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{ax^2 + bx + c = 0} \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{3}{-7} = \frac{3}{7}$$

۴

۳

۲ ✓

۱

(معمد بگیری، حل معادله درجه ۲ و کاربردها، صفحه ۴۳ تا ۴۸)

اگر α و β را ریشه‌های معادله در نظر بگیریم، داریم:

$$\beta = 2\alpha - 4 \quad (1)$$

$$\frac{1}{a'}x^2 - \frac{5}{b'}x + b = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b'}{a'} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{-5}{1}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} \begin{cases} 2\alpha - \beta = 4 \\ \alpha + \beta = 5 \end{cases}$$

$$3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3 \xrightarrow{(1)} \beta = 2 \times 3 - 4 = 2$$

حال طبق رابطه حاصل ضرب ریشه‌ها داریم:

$$\alpha\beta = \frac{c'}{a'} \Rightarrow 3 \times 2 = \frac{b}{1} \Rightarrow b = 6$$

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیر محمودیان، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، صفحه ۴۹ تا ۵۴)

$$\frac{x+1}{x+3} + \frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x+3} + \frac{2x-1}{x-2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)} + \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-2)(x+3)} - \frac{2(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2 + 2x^2 + 5x - 3 - 2(x^2 + x - 6)}{(x+3)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 7}{(x+3)(x-2)} = 0$$

$$x^2 + 2x + 7 = 0$$

حال معادله صورت کسر فوق را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(1)(7) = 4 - 28 = -24 < 0$$

این معادله ریشه حقیقی ندارد.

۴ ✓

۳

۲

۱

(امیر محمودیان، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، صفحه‌ی ۴۹ تا ۵۴)

فرض کنیم علی کار را x روزه انجام دهد. در این صورت محسن کار را در $2x+4$ روزه انجام خواهد داد.

در یک روز، $\frac{1}{x}$ کار توسط علی، $\frac{1}{2x+4}$ کار توسط محسن و $\frac{1}{6}$ کار توسط حمید انجام

خواهد شد و می‌دانیم اگر همه با هم کار کنند، در یک روز، $\frac{1}{3}$ کار انجام می‌شود. بنابراین:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x+4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+4} - \frac{2}{6} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{3(2x+4) + 3x - x(2x+4)}{3x(2x+4)} = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 5x + 12}{3x(2x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(-2)(12) = 121 \Rightarrow x_1 = \frac{-5+11}{-4} = -\frac{3}{2} \text{ غیرقابل قبول}$$

$$x_2 = \frac{-5-11}{-4} = 4 \text{ قابل قبول} \Rightarrow 2x+4 = 2 \times 4 + 4 = 12$$

محسن کار را ۱۲ روزه انجام می‌دهد و علی ۴ روزه انجام می‌دهد.

۴

۳ ✓

۲

۱