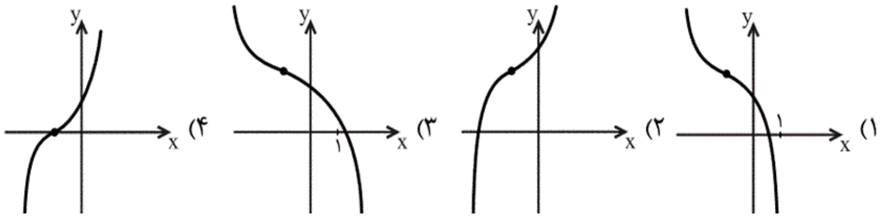
رياضي ۳ - دوازدهم ، تابع

۱۰۱-نمودار تابع $f(x)=x^3$ در بازهٔ $(-\infty , a]$ بالای نمودار تابع $g(x)=x^2$ قرار ندارد. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) هر مقدار دلخواهی ۴) ۱-

۱۰۲-نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2-(x+1)^3$ کدام شکل زیر است؟



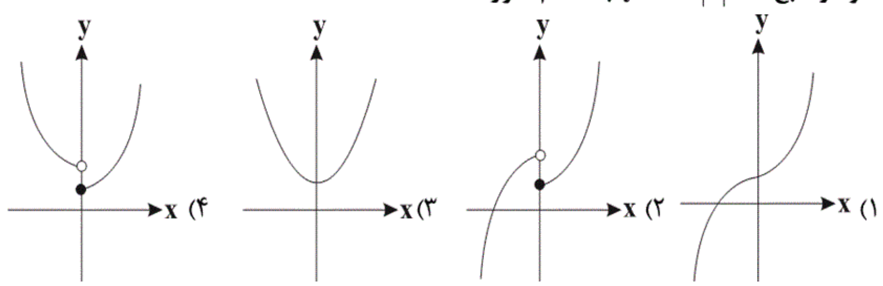
۱۰۳-نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ با انتقال بر نمودار تابع $g(x)=x^3+3x^2+3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار تابع g قرار می‌گیرد؟ (جهت انتقال فقط در راستای محور x و y است.)

۱) ۷ ۲) ۶۳ ۳) ۱- ۴) ۲۶

۱۰۴-نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3$، در بازهٔ $(-\infty , a)$ همواره پایین خط به معادلهٔ $y=3-2x$ است، بیشترین مقدار a کدام است؟

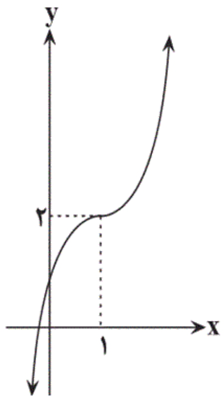
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۱۰۵-نمودار تابع $y=x^2|x|+1$ به کدام صورت است؟



۱۰۶-کدام گزینه در مورد ریشه‌های معادلهٔ $2+|x|=-x^3$ درست است؟

۱) فاقد ریشه ۲) فقط یک ریشهٔ مثبت
۳) فقط یک ریشهٔ منفی ۴) دو ریشهٔ مختلف‌العلامه



۱۰۷-نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-a)^3+b$ به‌صورت زیر است. حاصل $a.b$ کدام است؟

۱) ۲

۲) -۲

۳) ۳

۴) -۳

۱۰۸-در تابع درجهٔ سوم $f(x)=-x^3+ax^2+x+2$، رابطهٔ $f(\frac{3}{2})-f(2)+f(-\frac{3}{2})=5$ برقرار است. مقدار $f(1)+f(2)$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) -۳۲ ۳) -۱۶ ۴) ۳۲

۱۰۹-اگر $f(x)$ یک تابع خطی و $f(3)=f(-3)+4$ و $f(2)=1$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع f محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

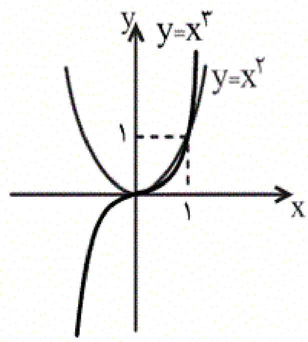
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۱۰-تابع $f(x)=\frac{3x^2+ax+b}{2x^2+cx+d}$، یک تابع ثابت با ضابطهٔ $y=k$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-3\}$ است. حاصل $\frac{a-b+c-d}{k}$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) -۵

۱۰۱- گزینهٔ «۲» *(فرهاد حامی)*

نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود دو تابع در نقطهٔ $(۱,۱)$ متقاطع‌اند و به ازای $x\in(-\infty,۱]$ نمودار تابع $y=x^۳$ بالای نمودار تابع $y=x^۲$ قرار نمی‌گیرد، پس حداکثر مقدار **a** برابر با یک است.

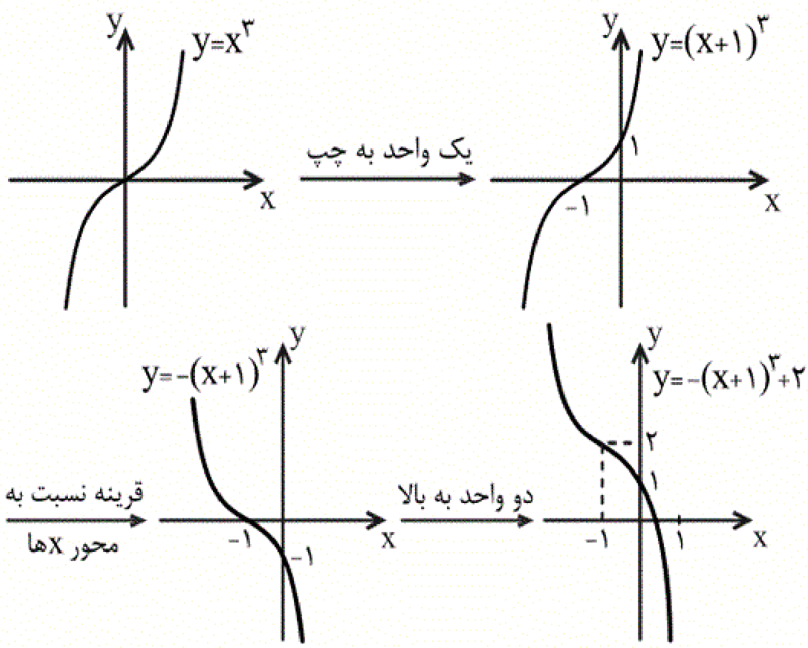


(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۲- گزینهٔ «۱» *(فرهاد حامی)*

نمودار تابع $y=۲-(x+۱)^۳$ را با استفاده از نمودار تابع $y=x^۳$ به‌ترتیب زیر رسم می‌کنیم:



توجه کنید که محل تلاقی تابع با محور xها که با حل معادلهٔ $y=۰$ به‌دست می‌آید برابر با $\sqrt[۳]{۲}-۱$ است که از یک کوچکتر است.

$$y=۰\Rightarrow ۲-(x+۱)^۳=۰\Rightarrow (x+۱)^۳=۲$$

$$\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}-۱<۱$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

اگر نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f(x+۱)-۱$ حاصل می‌شود. بنابراین از طول هر نقطه یک واحد کم شده و از عرض هر نقطه نیز یک واحد کم می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$f(۲)=۲^{۳}=۸$$

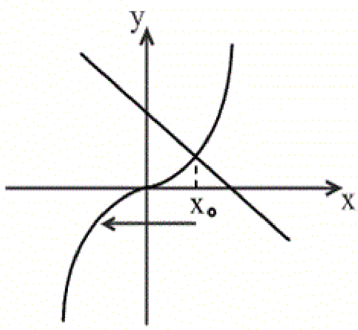
$$A(۲,۸)\xrightarrow{g(x)=f(x+۱)-۱}A'(۲-۱,۸-۱)=(۱,۷)$$

پس نقطهٔ $(۲,۸)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $(۱,۷)$ روی نمودار تابع g تبدیل می‌شود.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

✓۱ | ۲ | ۳ | ۴

۱۰۴- گزینهٔ «۱» *(فرهاد حامی)*



با رسم نمودار دو تابع $y_1=۳-۲x$ و $y_۲=x^{۳}$، دیده می‌شود که دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه به‌طول x_0 قطع می‌کنند، لذا معادلهٔ:

$$x^{۳}=۳-۲x\rightarrow x^{۳}+۲x-۳=۰$$

تنها یک ریشه دارد. چون مجموع ضرایب این معادله صفر است، پس ریشهٔ آن ۱ است در نتیجه $x_0=۱$ و تابع $y=x^{۳}$، در بازهٔ $(-\infty,۱)$ پایین خط $y=۳-۲x$ است. بنابراین بیشترین مقدار a برابر یک است.

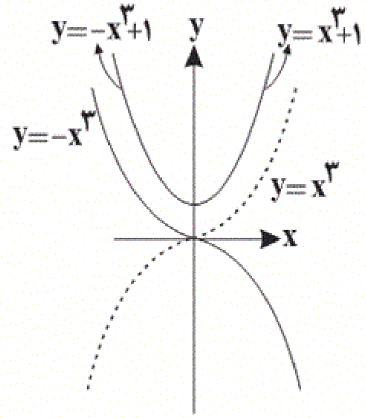
(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

✓۱ | ۲ | ۳ | ۴

۱۰۵– گزینهٔ «۳» (میلاد منصوری)

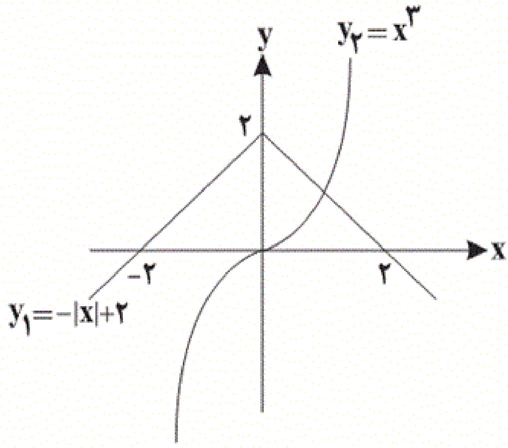
$$y = x^{2}|x| + 1 = \begin{cases} x^{3} + 1 & x \geq 0 \\ -x^{3} + 1 & x < 0 \end{cases}$$

یعنی شاخهٔ سمت راست نمودار، همان $y = x^{3}$ است که ۱ واحد به‌طرف بالا رفته و شاخهٔ سمت چپ نمودار، $y = -x^{3}$ است که یک واحد بالا رفته است.



(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴



با توجه به نمودارهای رسم شده، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه با طول مثبت قطع می‌کنند. بنابراین معادلهٔ موردنظر فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۷- گزینهٔ «۱» *(یاسین سپهر)*

نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y = x^{۳}$ به‌دست آمده است. اگر نمودار $y = x^{۳}$ را یک واحد به‌سمت راست (در راستای محور x ها) و سپس دو واحد به‌سمت بالا (در راستای محور y ها) انتقال دهیم ضابطهٔ $y = (x-۱)^{۳} + ۲$ به دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس: $a = ۱, b = ۲ \Rightarrow a.b = ۲$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۸- گزینهٔ «۲» *(میلاد منصوری)*

ابتدا $f(\frac{۳}{۲}) + f(-\frac{۳}{۲})$ را حساب کرده، سپس $f(۲)$ را کم می‌کنیم:

$$f(\frac{۳}{۲}) + f(-\frac{۳}{۲}) = (-(\frac{۳}{۲})^{۳} + a(\frac{۳}{۲})^{۲} + \frac{۳}{۲} + ۲)$$

$$+(-(-\frac{۳}{۲})^{۳} + a(-\frac{۳}{۲})^{۲} - \frac{۳}{۲} + ۲)$$

$$= ۲a(\frac{۹}{۴}) + ۴ = \frac{۹}{۲}a + ۴$$

$$f(۲) = -۸ + ۴a + ۲ + ۲ = ۴a - ۴$$

بنابراین:

$$f(\frac{۳}{۲}) + f(-\frac{۳}{۲}) - f(۲) = (\frac{۹}{۲}a + ۴) - (۴a - ۴) = \frac{a}{۲} + ۸ = ۵$$

$$\Rightarrow a = -۶$$

پس:

$$f(x) = -x^{۳} + (-۶x^{۲}) + x + ۲$$

$$\Rightarrow f(۱) + f(۲) = (-۱ - ۶ + ۱ + ۲) + (-۸ - ۲۴ + ۲ + ۲) = -۳۲$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

$$f(-3) = -3a + b$$

$$\Rightarrow f(3) = f(-3) + 4 \Rightarrow 3a + b = -3a + b + 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 2(\frac{2}{3}) + b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \xrightarrow{x=0} y = -\frac{1}{3}$$

(ریاضی ۳، صفحهٔ ۲)

۱	۲	۳	۴ ✓

۱۱۰- گزینهٔ «۱» *(آریان حیدری)*

دامنهٔ تابع، $\mathbb{R} - \{-3\}$ است، پس $x = -3$ تنها ریشهٔ مخرج کسر است. از آن‌جا که مخرج به صورت یک عبارت درجهٔ دوم است؛ پس باید ریشهٔ مضاعف $x = -3$ داشته باشد، به عبارتی به صورت $A(x+3)^2$ در بیاید. از مقایسهٔ عبارت $2x^2 + cx + d$ با عبارت $A\underbrace{(x+3)^2}_{x^2+6x+9}$ واضح است که $A = 2$ بوده و درنتیجه $c = 12$ و $d = 18$ خواهد بود.

حال دقت کنید که تابع $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{2x^2 + 12x + 18}$ قرار است یک تابع ثابت شود. برای این منظور باید صورت کسر به صورت ضریبی از مخرج در آید، با مقایسهٔ جملات اول صورت و مخرج، مشخص می‌شود که صورت قرار است $\frac{3}{2}$ برابر مخرج باشد، پس این نسبت در بقیهٔ جملات صورت و مخرج نیز برقرار است، یعنی:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}(12) = 18 \\ b = \frac{3}{2}(18) = 27 \end{cases}$$

و نهایتاً تابع به صورت تابع ثابت $y = \frac{3}{2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{-3\}$ خواهد بود.

پس:

$$\frac{a - b + c - d}{k} = \frac{18 - 27 + 12 - 18}{\frac{3}{2}} = \frac{-15}{\frac{3}{2}} = -10$$

(ریاضی ۳، صفحهٔ ۲)

۱ ✓	۲	۳	۴