



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، جبر و معادله -

۱- در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول، سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

۲- معادله $\sqrt{x^4 - 2x} - 5 = 1 - x$ چند جواب حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۳- نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟

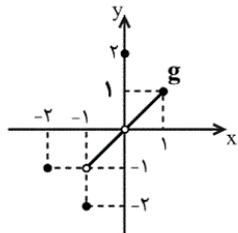
- ۴۰ (۱) ۴۵ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴)

حسابان ۱، تابع

۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; x \leq 0 \\ x-1 & ; x > 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $f^{-1}(2) + f^{-1}(-2)$ کدام است؟

- $\frac{5}{2}$ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

۵- اگر داشته باشیم: $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x}$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت زیر باشد، به ازای چه مقداری از a ، تساوی



$f(g^{-1}(a)) = 1$ برقرار است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴)

حسابان ۱، توابع نمایی و لگاریتم

۶- از تساوی $\log_5(2x-1) + \log_5(3x-5) = 1$ ، مقدار $\log_7(6x+3)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

حسابان ۱، مثلثات -

۷- اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد، مقدار $A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱/۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۸- اگر $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ باشد، اختلاف کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار عبارت $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{3} + 1$

حسابان ۱، پیوستگی

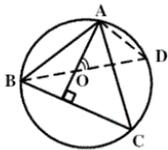
۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 2x + [\sin x]}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۰- تابع $f(x) = (x-3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right]$ روی بازه $(0, 9)$ ، در چند نقطه ناپیوسته است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

هندسه ۲، دایره -



۱۱- در شکل زیر، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه \widehat{AOD} برابر کدام است؟

- (۱) \widehat{OBC} (۲) \widehat{CAD}
(۳) \widehat{OAC} (۴) \widehat{ADO}

۱۲- دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و اندازه یک ساق برابر ۵ واحد، مفروض است. اگر این دوزنقه قابل محاط در دایره باشد، طول قطعه مماسی که از نقطه تلاقی امتداد دو ساق بر دایره محیطی آن رسم می‌شود، کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $5\sqrt{6}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $8\sqrt{3}$

۱۳- دو دایره به شعاع‌های ۴ و $10/5$ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماسی بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) $4\sqrt{5}$ (۳) $4\sqrt{6}$ (۴) ۸

۱۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول یک ضلع قائم ۸ و شعاع دایره محیطی داخلی آن ۳ واحد است. اندازه وتر این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۱۵- در یک ذوزنقه محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط ذوزنقه کدام است؟

۴۸ (۴)

۴۶ (۳)

۴۴ (۲)

۳۶ (۱)

هندسه ۲، تبدیل‌ها

۱۶- مربع ABCD را با تجانسی که مرکز آن محل تلاقی قطرهای و نسبت تجانس آن $\frac{2}{3}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت بین مربع و

تصویرش برابر ۵ باشد، محیط مربع ABCD کدام است؟

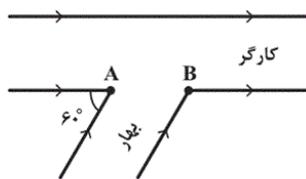
۳۶ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۷- شکل زیر تقاطع دو خیابان کارگر و بهار، به ترتیب با عرض‌های ثابت ۴ و $\sqrt{27}$ را نشان می‌دهد. شخصی می‌خواهد از نقطه A، ابتدا به سمت دیگر خیابان کارگر رفته و سپس به نقطه B برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟



۱۱ (۱)

۱۰ (۲)

۹ (۳)

۸ (۴)

هندسه ۲ -

۱۸- اندازه دو ضلع مثلثی ۴ و ۶ و مجموع اندازه زوایای روبه‌روی این اضلاع، ۶۰ درجه است. اندازه ضلع سوم مثلث کدام است؟

$2\sqrt{17}$ (۴)

$2\sqrt{11}$ (۳)

$2\sqrt{7}$ (۲)

$2\sqrt{19}$ (۱)

هندسه ۲، دایره -

۱۹- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه اضلاع قائم ۳ و ۴ است. فاصله دورترین رأس این مثلث از نقطه تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

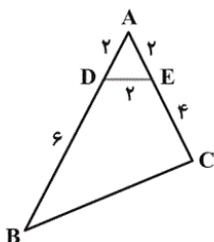
$3\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{10}$ (۳)

۳ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

هندسه ۲ - ۲ سوال



۲۰- در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی DECB کدام است؟

$11\sqrt{3}$ (۲)

$10\sqrt{3}$ (۱)

$14\sqrt{3}$ (۴)

$12\sqrt{3}$ (۳)

آمار و احتمال، آشنایی با مبانی ریاضی

۲۱- اگر گزاره‌های $q \Rightarrow \sim p$ ، $p \Rightarrow r$ و $r \Rightarrow \sim q$ به ترتیب درست، درست و نادرست باشند، آنگاه:

- (۱) p ، q و r هر سه نادرست هستند.
 (۲) p و q نادرست هستند و r درست است.
 (۳) p ، q و r هر سه درست هستند.
 (۴) p و r نادرست هستند و q درست است.

۲۲- چند زیرمجموعه از اعداد طبیعی یک رقمی وجود دارد به طوری که شامل حداقل یک عدد اول یک رقمی باشد؟

- (۱) ۳۸۴ (۲) ۴۴۸ (۳) ۴۸۰ (۴) ۵۱۲

۲۳- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$ همواره برابر با کدام است؟

- (۱) $A' - B'$ (۲) $(A - B)'$ (۳) A' (۴) \emptyset

آمار و احتمال، احتمال -

۲۴- اگر $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و $A = \{a_1, a_2, a_5\}$ و $B = \{a_2, a_3, a_4, a_6\}$ و $C = \{a_3\}$ سه پیشامد از این فضای نمونه باشند به طوری که $P(A) = \frac{3}{10}$ و $P(B) = \frac{4}{5}$ ، آن‌گاه $P(C)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{20}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۵- دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آنکه شماره حداقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۶- در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند. در غیر این صورت ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده $\frac{2}{3}$ است. با کدام احتمال فقط ۲ بار موفقیت حاصل می‌شود؟

- (۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{10}{27}$ (۳) $\frac{11}{27}$ (۴) $\frac{13}{27}$

آمار و احتمال، آمار توصیفی

۲۷- در جدول فراوانی زیر اگر میانگین داده‌ها $18/4$ باشد، در نمودار دایره‌ای، زاویه مربوط به بازه $(21, 25]$ چند درجه است؟

حدوددسته	۹-۱۳	۱۳-۱۷	۱۷-۲۱	۲۱-۲۵	۲۵-۲۹	(۲) ۷۵	(۱) ۶۰
f_i	۳	۴	۷	x	۱	(۴) ۹۰	(۳) ۸۰

۲۸- میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می‌باشد. اگر داده‌های ۲۸، ۲۷، ۲۰ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید تقریباً کدام است؟

- (۱) $9/25$ (۲) $9/36$ (۳) $9/52$ (۴) $9/63$

آمار و احتمال، آمار استنباطی

۲۹- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

- (۱) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر نیست.
- (۲) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، احتمال انتخاب خوشه‌ها برابر است.
- (۳) نمونه‌گیری خوشه‌ای، یک روش نمونه‌گیری احتمالی است.
- (۴) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، تمام اعضای خوشه انتخاب شده در نمونه حضور دارند.

۳۰- در اعداد صحیح 0 تا N ، پنج عدد ۸ ، ۵ ، ۲ ، ۶ و ۴ به تصادف انتخاب شده‌اند. برآورد نقطه‌ای از N به کمک پارامتر میانگین

کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۵ (۱)

(سؤال ۱۷۸ کتاب آبی ریاضیات پایه)

۱-۱۳۳۳۳۳۳۳

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10(2a_1 + 19d) \\ S_{12} = \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 6(2a_1 + 11d) \end{cases}$$

$$S_{20} = 3S_{12} \Rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 3 \times 6(2a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 95d = 18a_1 + 99d \Rightarrow d = -2a_1 \quad (*)$$

$$a_3 = a_1 + 2d = a_1 + 2(-2a_1) = -a_1 \Rightarrow a_1 = -2 \xrightarrow{(*)} d = 4$$

$$\Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

(مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x \xrightarrow{\text{توان } 2} x^4 - 2x - 5 = 1 + x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 + 2 > 0} x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$x = \sqrt{3}$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای آن طرف راست معادله

$$\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x \text{ منفی می شود؛ پس تنها جواب معادله } x = -\sqrt{3}$$

است.

(مسئله ۱- بپر و معادله: صفحه های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

فاصله وسط قطر مربع از هر ضلع آن، برابر با نصف طول ضلع مربع است.

پس در این سؤال اگر طول ضلع مربع را a بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} L: 2y - x - 5 = 0 \\ A(3, -1) \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{a}{2} = \frac{|2y_A - x_A - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به اینکه اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ آنگاه $f(\beta) = \alpha$ ، خواهیم داشت:

$$f^{-1}(2) = a \Rightarrow f(a) = 2$$

$$f^{-1}(-2) = b \Rightarrow f(b) = -2$$

اگر $a \leq 0$ باشد، با استفاده از ضابطه بالایی تابع داریم:

$$f(a) = 2a - 1 = 2 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ غ ق}$$

اگر $a > 0$ باشد، با استفاده از ضابطه پایینی تابع داریم:

$$f(a) = a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

اگر $b \leq 0$ باشد، با استفاده از ضابطه بالایی تابع داریم:

$$f(b) = 2b - 1 = -2 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

اگر $b > 0$ باشد، با استفاده از ضابطه پایینی تابع داریم:

$$f(b) = b - 1 = -2 \Rightarrow b = -1 \text{ غ ق}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2) + f^{-1}(-2) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(g^{-1}(a)) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = g^{-1}(a) \quad (*)$$

$$f^{-1}(1) = \frac{1+1}{1-2(1)} = -2$$

$$\xrightarrow{(*)} g^{-1}(a) = -2 \Rightarrow g(-2) = a$$

با توجه به نمودار تابع g ، داریم: $g(-2) = -1$ ، بنابراین $a = -1$ است.

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\log_{\Delta}(2x-1) + \log_{\Delta}(3x-5) = 1$$

$$\Rightarrow \log_{\Delta}(2x-1)(3x-5) = 1$$

$$(2x-1)(3x-5) = \Delta \Rightarrow 6x^2 - 13x + 5 = \Delta$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \Rightarrow x(6x-13) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ قق} \\ x = \frac{13}{6} \Rightarrow \log_2(6x+3) = \log_2 16 = 4 \end{cases}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\sin(3\pi + \theta) = \sin(2\pi + \pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

$$\Rightarrow A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta + \sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2} + \frac{\cot\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3}}$$

(مسئله ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

از آنجایی که $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ است، پس داریم:

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$$

پس اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار عبارت برابر یک است.

(مسئله ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سؤال ۱۷۳۹ کتاب آبی ریاضیات پایه)

۹- [مشاهده سوال](#)

وقتی $x \rightarrow \pi^-$ ، می‌توان فرض کرد $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ است، بنابراین

$0 < \sin x < 1$ و در نتیجه $[\sin x] = 0$ خواهد بود.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 2x + [\sin x]} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} \sin x}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2}}{2 \cos x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(مسئله ۱- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

تابع $(x-3)$ روی \mathbb{R} پیوسته است، لذا نقاط ناپیوستگی تابع $\left[\frac{x-3}{3} \right]$ را

می‌یابیم، بنابراین باید $\frac{x-3}{3} = k$ یا $x = 3k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) باشد، که در

این بازه نقاط ۳ و ۶ می‌توانند نقاط ناپیوستگی تابع باشند. اما در $x = 3$ تابع

پیوسته است، زیرا:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right] = (3-3)[0^+] = 0 \\ f(3) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right] = (3-3)[0^-] = 0 \end{array} \right.$$

در نتیجه تابع در این بازه، فقط در یک نقطه ناپیوسته است.

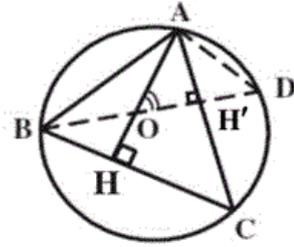
(مسئله ۱- هر دو پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



با توجه به این که O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است، پس ارتفاع
گذرنده از رأس B بر پاره‌خط BD واقع است. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta AOH' : \widehat{AOD} + \widehat{CAO} = 90^\circ \\ \Delta ACH : \widehat{ACH} + \widehat{CAO} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ACH}$$

$$\widehat{ACH} = \widehat{ADO} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ADO}$$

(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۴ ✓

۳

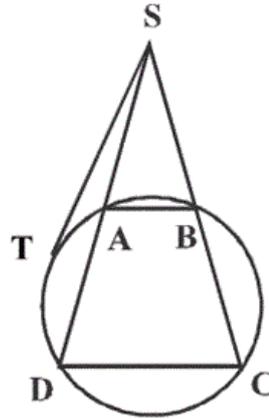
۲

۱

ذوزنقه قابل محاط در دایره، لزوماً متساوی الساقین است. طبق فرض در شکل زیر داریم: $AB = ۸$ و $CD = ۱۲$ و $AD = ۵$. چون $AB \parallel CD$ ، پس طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{SA}{SD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{SA}{SA+5} = \frac{8}{12} \Rightarrow 12SA = 8SA + 40$$

$$\Rightarrow 4SA = 40 \Rightarrow SA = 10 \Rightarrow SD = 10 + 5 = 15$$



حال بر اساس روابط طولی دایره برای یک مماس و یک قاطع داریم:

$$ST^2 = SA \cdot SD = 10 \times 15 = 150$$

$$\Rightarrow ST = 5\sqrt{6}$$

(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Delta OO'T : OT^2 = OO'^2 - O'T^2 = (14/5)^2 - (10/5)^2$$

$$\Rightarrow OT^2 = (14/5 + 10/5)(14/5 - 10/5) = 25 \times 4 = 100$$

$$\Rightarrow OT = 10$$

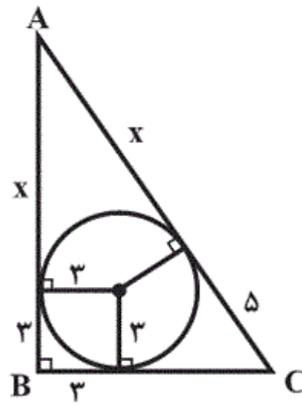
(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مطابق شکل اگر $BC = 8$ باشد، آنگاه چون طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر دایره برابر یکدیگرند، پس داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow (5+x)^2 = (3+x)^2 + 8^2$$

$$\Rightarrow 25 + x^2 + 10x = 9 + x^2 + 6x + 64$$

$$\Rightarrow 4x = 48 \Rightarrow x = 12$$

$$\Rightarrow \text{طول وتر} = 12 + 5 = 17$$

(هنرسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

 ۴

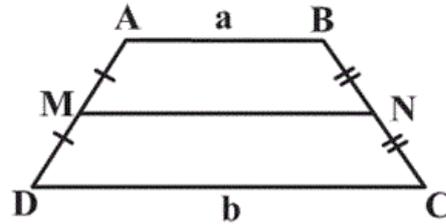
 ۳

 ۲

 ۱

طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند،

میانگین طول دو قاعده ذوزنقه است. یعنی در شکل زیر: $MN = \frac{a+b}{2}$



طبق فرض: $MN = 12 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 12 \Rightarrow a+b = 24$ (*)

اما طبق فرض سؤال ذوزنقه ABCD محیطی است، می‌دانیم که در هر

چهارضلعی محیطی مجموع ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است، یعنی در ذوزنقه

محیطی ABCD داریم: $AB + CD = AD + BC$. پس:

$$ABCD \text{ محیط} = AB + CD + AD + BC$$

$$= AB + CD + AB + CD$$

$$= a + b + a + b = 2(a + b)$$

$$\xrightarrow{(*)} ABCD \text{ محیط} = 2 \times 24 = 48$$

(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

 ۴ ✓

 ۳

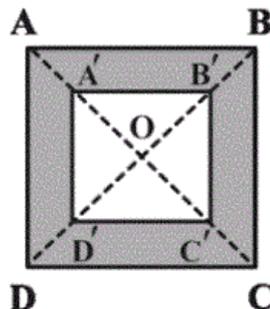
 ۲

 ۱

اگر مساحت مربع ABCD به ضلع a را S فرض کنیم، مساحت

مربع A'B'C'D' برابر $\frac{4}{9}S$ خواهد بود. پس مساحت ناحیه محدود بین مربع

و تصویرش برابر $S - \frac{4}{9}S = \frac{5}{9}S$ است، در نتیجه داریم:



$$\frac{5}{9}S = 5 \Rightarrow S = 9 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow \text{محیط مربع} = 4a = 12$$

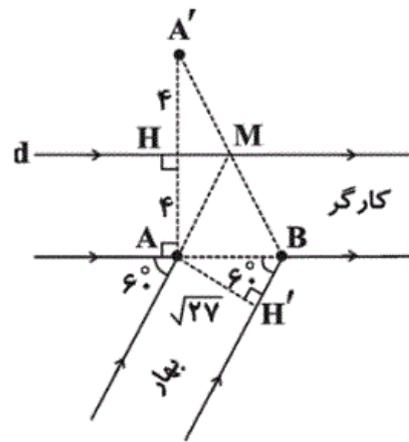
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



برای به دست آوردن کوتاه‌ترین مسیر، کافی است نقطه A را نسبت به محور d بازتاب دهیم و نقطه حاصل (A') را به B وصل کنیم. محل تلاقی A'B با محور d را M می‌نامیم. کوتاه‌ترین مسیر ممکن AM + MB است. حال از آنجایی که AM = MA'، در نتیجه:

$$AM + MB = MA' + MB = A'B$$

لذا کافی است طول A'B را بیابیم. از طرفی داریم:

$$\Delta AH'B : \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{AH'}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{AB} \Rightarrow AB = 6$$

اکنون با توجه به این که $\Delta A'AB$ در رأس A قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$AA'^2 + AB^2 = A'B^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = A'B^2 \Rightarrow A'B = 10$$

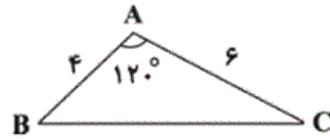
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، مشابه تمرین ۲ صفحه ۵۶)

۴

۳

۲ ✓

۱



$$\hat{A} + \underbrace{\hat{B} + \hat{C}}_{60^\circ} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos 120^\circ$$

$$= 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$BC^2 = 16 + 36 + 24 = 76 = 4 \times 19 \Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث، صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۴

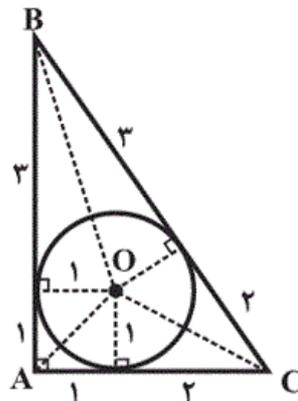
۳

۲

۱

(سراسری فارغ از کشور ریاضی - ۸۸)

۱۹ -



$$r = \frac{S}{P} = 1$$

$$BO = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

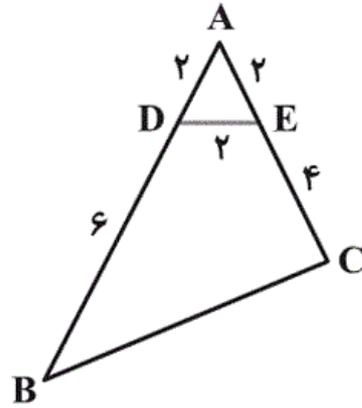
(هندسه ۲- دایره، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲

۱



مثلث ADE سه ضلع برابر دارد، پس متساوی الاضلاع است. بنابراین زاویه A برابر ۶۰ درجه است.

مساحت چهارضلعی DECB را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} AD \times AE \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{DECB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE} = 12\sqrt{3} - \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث، مشابه تمرین ۴ صفحه ۷۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

چون گزاره $p \Rightarrow r$ نادرست است، پس $r \sim p$ درست و p نادرست

است، یعنی p و r هر دو نادرست هستند. از طرفی گزاره $r \Rightarrow q$ درست

است که با توجه به نادرستی تالی (r)، لزوماً q باید نادرست باشد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای حل، زیرمجموعه‌هایی که اعداد اول ندارند را از کل زیر مجموعه‌ها کم

می‌کنیم. به این ترتیب زیرمجموعه‌هایی خواهیم داشت که حداقل یکی از

اعضای $\{۲, ۳, ۵, ۷\}$ را دارند.

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} \\ \text{اعداد طبیعی یک رقمی} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow 2^9 = 512 \\ \text{اعداد اول یک رقمی} \rightarrow \{2, 3, 5, 7\} \\ \text{تعداد زیرمجموعه‌هایی} \\ \text{حذف اعداد اول یک رقمی} \rightarrow \{1, 4, 6, 8, 9\} \rightarrow 2^5 = 32 \\ \text{که اعداد اول ندارند.} \end{array} \right\}$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر} = 512 - 32 = 480$$

به این صورت زیرمجموعه‌هایی به دست می‌آید که حداقل یکی از اعداد اول

یک رقمی را دارند.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی - ۱۹)

$$\underbrace{[A \cup (A \cap B)]}_{\text{قانون جذب}} \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$$

$$= A' \cap [(B \cap A) \cup (B \cap A')] = A' \cap [B \cap \underbrace{(A \cup A')}_U]$$

۴

۳

۲

۱

$$P(B) = P(\{a_2, a_3, a_4, a_6\}) = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow P(B') = P(\{a_1, a_5\}) = \frac{1}{5}$$

$$P(A) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(\{a_1, a_5\}) + P(a_3) = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} + P(C) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

(آمار و احتمال - احتمال، مشابه تمرین ۳ صفحه ۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر پیشامدهای A و B به ترتیب «شماره حداقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد» و «حاصل جمع شماره‌های رو شده کم‌تر از ۶ باشد» تعریف شوند،

آنگاه داریم:

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3),$$

$$, (3,1), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow n(B) = 10$$

$$A \cap B = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 5$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ تاس عدد زوج بیاید} \xrightarrow{2 \text{ بار موفقیت در ۴ دفعه}} \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ \frac{1}{2} \text{ تاس عدد فرد بیاید} \xrightarrow{2 \text{ بار موفقیت در ۳ دفعه}} \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) \end{array}$$

اگر پیشامد آنکه فقط ۲ بار موفقیت حاصل شود را A بنامیم، آنگاه طبق

نمودار درختی داریم:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{27} + \frac{2}{9} = \frac{4+6}{27} = \frac{10}{27}$$

(آمار و احتمال - احتمال، صفحه‌های ۵۸ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مرکز دسته	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷
f_i	۳	۴	۷	x	۱

$$\bar{x} = \frac{11 \times 3 + 15 \times 4 + 19 \times 7 + 23 \times x + 27 \times 1}{15 + x} = 18 / 4$$

$$\Rightarrow \frac{253 + 23x}{15 + x} = 18 / 4 \Rightarrow 253 + 23x = 276 + 18 / 4x$$

$$\Rightarrow 4 / 6x = 23 \Rightarrow x = 5$$

$$\theta_f = \frac{f_f}{n} \times 360^\circ = \frac{5}{20} \times 360^\circ = 90^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی، صفحه‌های ۷۴ تا ۱۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سراسری فارغ از کشور تهری - ۹۳)

$$\bar{x} = \frac{20+27+28}{3} = 25$$

داده‌های اضافه شده

چون میانگین داده‌های اضافه شده با میانگین کل داده‌ها برابر است، پس تأثیری در میانگین داده‌ها نخواهد داشت.

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 9 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{18} \Rightarrow \sum(x_i - \bar{x})^2 = 162$$

$$\sigma'^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + (20-25)^2 + (27-25)^2 + (28-25)^2}{18+3}$$

$$= \frac{162+25+4+9}{21} = \frac{200}{21} \approx 9.52$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی، صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سؤال ۶۲۹ کتاب آبی)

در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب شدن خوشه‌ها و در نتیجه احتمال انتخاب شدن واحدهای آماری برابر است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی، صفحه‌های ۱۰۵ و ۱۰۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم که پارامتر میانگین جامعه برابر است با:

$$\mu = \frac{0+1+2+\dots+N}{N+1} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1} = \frac{N}{2}$$

حال با توجه به نمونه موجود، مقدار آماره برابر است با :

$$\bar{x} = \frac{4+6+2+5+8}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

پس برآورد نقطه‌ای ما از پارامتر جامعه یعنی $\frac{N}{2}$ ، برابر است با مقدار آماره

نمونه یعنی ۵، پس برآورد ما از N برابر است با:

$$N = 10$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی، مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱