سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۰۱- اگر $\sqrt[۳]{(a+۱)^۲}+\sqrt[۳]{(a-۱)^۲}=۶-\sqrt[۳]{a^۲-۱}$ باشد، حاصل $\sqrt[۳]{a+۱}-\sqrt[۳]{a-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۰۲- مساحت سطح محصور بین نمودار توابع $y_۱=۲x+۱$ و $y_۲=x+۲|x|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۰۳- جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۸x+n=۰$ از ۲ برابر جواب‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$، m واحد بیشتر است. n کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

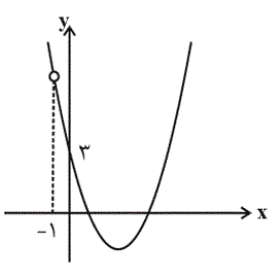
۱۰۴- یک بازیکن فوتبال، ۸ ضربه از ۱۰ ضربهٔ پنالتی را به گل تبدیل کرده است. چند ضربهٔ پنالتی دیگر بزند تا با شرط گل شدن ۴ ضربه از آن‌ها، درصد کل تبدیل ضربات پنالتی‌اش به گل، ۶۰ درصد شود؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۰۵- نقطهٔ A روی بخش مثبت محور xها را نسبت به خط $x+۱=۰$ قرینه می‌کنیم تا به نقطهٔ B برسیم. اگر مجموع فواصل نقاط A و B از نیمساز ناحیهٔ اول و سوم برابر با $۲\sqrt{۲}$ باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸

۱۰۶- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x^۳-۳x^۲+ax+b}{x+c}$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(۲)$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۰۷- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۱+\sqrt{x-۲}}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x^۶-۲x^۳+۱\ ;\ x\geq ۱$

۲) $f^{-۱}(x)=x^۶-۲x^۳+۳\ ;\ x\geq ۱$

۳) $f^{-۱}(x)=x^۶-۲x^۳+۱\ ;\ x\geq ۲$

۴) $f^{-۱}(x)=x^۶-۲x^۳+۳\ ;\ x\geq ۲$

۱۰۸- اگر $f(x)=\frac{۲x}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x^۲}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}$ باشد، برد تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$

۲) $\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$

۳) $\mathbb{R}-\{\pm ۲\}$

۴) $\mathbb{R}-\{\pm ۱,\pm ۲\}$

۱۰۹- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=۱۰^{(۳x-۲)}$ به صورت $g(x)=a+b\log_{۱۰}x$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) ۲

۱۱۰- اگر $\log ۲۰=a$ باشد، مقدار $\log ۵\sqrt{۱۰}$ کدام است؟

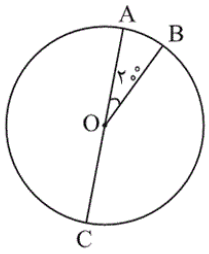
۱) $\frac{۳}{۲}+a$

۲) $\frac{۳}{۲}-a$

۳) $\frac{۵}{۲}+a$

۴) $\frac{۵}{۲}-a$

۱۱۱- در دایرهٔ مقابل، اگر $AC=۱۸$ قطر دایره باشد، اختلاف طول کمان‌های کوچک‌تر AB و BC کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



۱) ۶π

۲) ۷π

۳) ۱۲π

۴) ۱۴π

۱۱۲- ساده شدهٔ عبارت $\frac{۲\sin ۱۵^\circ\cos ۴۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $-۴\sin ۷۵^\circ$

۲) $-۲\sin ۷۵^\circ$

۳) $-۴\cos ۷۵^\circ$

۴) $-۲\cos ۷۵^\circ$

۱۱۳- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x} & ;\ x>۰\\ a[x]+\sqrt{۲} & ;\ x<۰\end{cases}$ در $x=۰$ حد دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\sqrt{۲}$

۲) $-\sqrt{۲}$

۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۴- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۱۵- عبارت x^2+kx-3 بر $x+1$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $2x-1$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{16}{9}$

۱۱۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin^4 x=\cos x(1+\cos^3 x)$ در بازهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۱۷- اگر $\lim_{x\to b}\frac{a}{2x^2+ax+2}=-\infty$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۵ ۴) ۵-

۱۱۸- اگر $f'(x^3+x)=\frac{x^2}{x^2+9}$ باشد، مقدار مشتق تابع $g(x)=f(x+\sqrt[3]{x})$ در $x=8$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{13}$ ۳) $\frac{13}{12}$ ۴) $\frac{2}{13}$

۱۱۹- اگر آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ در بازهٔ $[\alpha,2]$ برابر $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

۱۲۰- مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x^2-4)$ باشد، کدام است؟

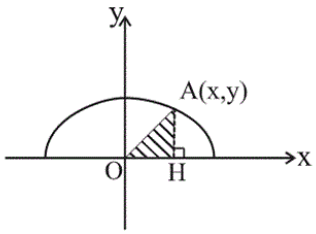
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۱- اگر $A(1,2)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+cx$ باشد، طول و نوع اکسترمم نسبی دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$، مینیمم ۲) $-\frac{5}{3}$، مینیمم ۳) $\frac{5}{3}$، ماکزیمم ۴) $-\frac{5}{3}$، ماکزیمم

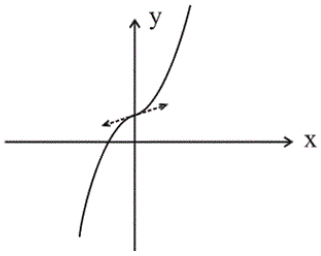
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۲- در شکل زیر، اگر نقطهٔ $A(x,y)$ واقع بر نمودار تابع $y=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، حداکثر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH کدام است؟



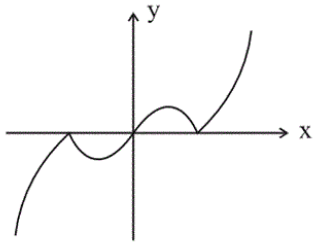
۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

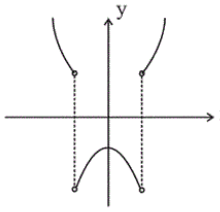
۱۲۳- شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=x^۳+(a+b)x^۲+ax+۱$ را نمایش می‌دهد. کدام گزینه می‌تواند زوج مرتب (a,b) باشد؟

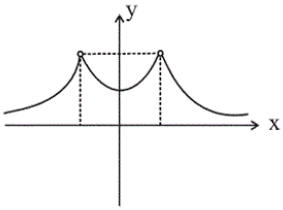


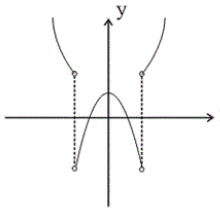
۱) $(۰,۰)$
۲) $(۱,-۱)$
۳) $(۱,-۲)$
۴) $(-۱,۱)$

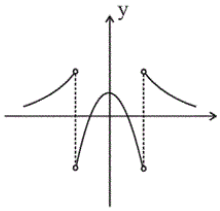
۱۲۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f' به کدام صورت است؟



۱)


۲)


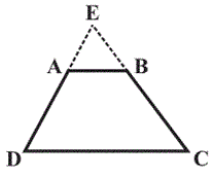
۳)


۴)


۱۲۵- نقطهٔ O درون مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($BC=۲AB$ و $\hat{A}=۹۰^\circ$)، از هر سه ضلع آن به یک فاصله است. اندازهٔ زاویهٔ AOB چند برابر اندازهٔ زاویهٔ AOC است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

۱۲۶- در شکل زیر، امتداد ساق‌های ذوزنقه در نقطهٔ E متقاطع‌اند. نقطهٔ F را روی AE طوری انتخاب می‌کنیم که طول AE واسطهٔ هندسی بین طول‌های EF و ED باشد. نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث ABC برابر با کدام نیست؟



۱) $\frac{BF}{AC}$
۲) $\frac{AF}{DF}$
۳) $\frac{AB}{CD}$
۴) $\frac{EF}{AE}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۷- مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای ۱۰/۵ واحد مربع است. تعداد نقاط درونی این چندضلعی چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

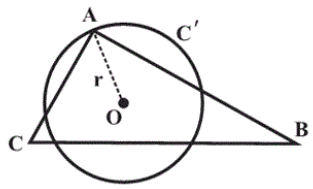
۱۲۸- شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه به‌ترتیب ۲ و ۴ واحد است. بزرگترین کرهٔ ممکن را از این استوانه جدا کرده، شکل حاصل را با صفحه‌ای به فاصلهٔ ۰/۵ واحد از قاعده قطع می‌دهیم. سطح مقطع حاصل چند واحد مربع است؟

۱) 2π ۲) $2/25\pi$ ۳) $2/5\pi$ ۴) $2/75\pi$

۱۲۹- از نقطهٔ A، دو مماس AB و AC را بر دایره‌ای به مرکز O رسم کرده‌ایم. اگر طول BC با طول مماس‌های رسم شده برابر باشد و نقطهٔ برخورد BC با OA را H بنامیم، آنگاه نسبت $\frac{OH}{AH}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

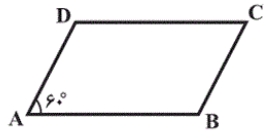
۱۳۰- در شکل زیر O مرکز دایرهٔ C' و همچنین مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC به اضلاع $AB=4$، $AC=3$ و $BC=5$ است. طول مماس رسم شده از نقطهٔ B بر دایرهٔ C' کدام است؟



۱) $\sqrt{10}$ ۲) ۳

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲/۵

۱۳۱- در متوازی‌الاضلاع شکل زیر طول ضلع CD، ۲/۵ برابر طول ضلع AD است. اگر E نقطه‌ای واقع بر ضلع CD باشد به‌گونه‌ای که مجموع فواصل آن از دو رأس A و B نسبت به سایر نقاط واقع بر CD کم‌تر باشد، حاصل $\frac{CE}{DE}$ کدام است؟



۱) $\frac{9}{4}$ ۲) ۲

۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۱۳۲- طول یک ضلع مثلثی ۷ و طول میانه‌های وارد بر دو ضلع دیگر آن ۴/۵ و ۷/۵ واحد است. مساحت این مثلث چند برابر $\sqrt{3}$ واحد مربع است؟

۱) ۱۱/۲۵ ۲) ۱۱/۵ ۳) ۱۱/۷۵ ۴) ۱۲

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۳- اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۲\times۳}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۲}$ دو ماتریس و $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ : i=j \\ i-j : i>j \\ j-i : i<j \end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ : i=j \\ i+j : i>j \\ i-j : i<j \end{cases}$ باشند، آنگاه $|AB|$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) -۱۶ ۳) ۲۵ ۴) -۲۵

۱۳۴- اگر ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} a+۱ & -b \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$، وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟ $(b\neq ۰)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) ۱۱

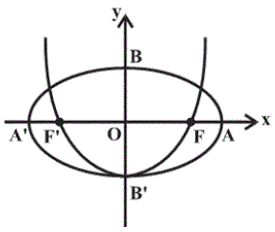
۱۳۵- اگر $۳A=\begin{bmatrix} |A| & -۱ \\ -۱۰ & |A| \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس A عددی مثبت باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) -۳ ۴) -۹

۱۳۶- در نقطهٔ $A(۲,۱)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$، مماسی بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر این خط مماس، محورهای x و y را در نقاط B و C قطع کند، مساحت مثلث OBC کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۶}$

۱۳۷- در شکل زیر مرکز بیضی بر مبدأ مختصات و قطرهای آن بر محورهای x و y منطبق هستند. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک‌تر آن برابر ۸ باشد، فاصلهٔ کانونی سهمی کدام است؟ (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)



۱) $\frac{۹}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲۵}{۹}$

۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۳۸- وجه‌های یک مکعب مستطیل، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=-۱$، $x=۳$، $y=۱$، $y=۳$، $z=-۲$ و $z=۱$ هستند. کدام یک از نقاط زیر دقیقاً بر دو وجه این مکعب واقع شده است؟

۱) $(-۱,۱,۱)$ ۲) $(۳,۳,۳)$ ۳) $(۰,۱,-۲)$ ۴) $(۱,۳,-۱)$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر $|\vec{a}|=۳$، $|\vec{a}\times\vec{b}|=۵\sqrt{۵}$ و $\vec{a}.\vec{b}=-۱$ باشد، آنگاه $|\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\sqrt{۱۴}$ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۱۱}$

۱۴۰- اگر $A=(-\infty,۰)$ باشد، آنگاه کدام‌یک از گزاره‌های سوری زیر درست است؟

۱) $\forall x\in A;\frac{x^۲-۴}{x+۲}=x-۲$ ۲) $\forall x\in A;x+\frac{۱}{x}<-۲$

۳) $\exists x\in A;\frac{x-۳}{۵}=۰$ ۴) $\exists x\in A;x-\frac{۱}{x}>۲$

۱۴۱- اگر A، B، $C=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $D=\{۱,۳,۵,۷\}$، چهار مجموعه باشند که در روابط $A\subseteq C\subseteq B$ و $A\subseteq D\subseteq B$ صدق می‌کنند، آنگاه حداقل تعداد ممکن برای زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B، چند برابر حداکثر تعداد ممکن برای زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

۱۴۲- برای دو مجموعهٔ غیرتهی A و B، رابطهٔ $A-[B\cup(A-B')]=A$ برقرار است. کدام یک از احکام زیر همواره درست است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B-A=B$ ۳) $B\subseteq A$ ۴) $A\cup B=U$

۱۴۳- اگر $P(A)=۰/۳$، $P(B)=۰/۴$ و $P((A-B)|(A\cup B))=\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $P(B|A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۴۴- دو ظرف داریم که در اولی ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در دومی ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه وجود دارد. از ظرف اول ۲ مهره به تصادف بیرون می‌آوریم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم و سپس از ظرف دوم مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال این که مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم سفید باشد، کدام است؟

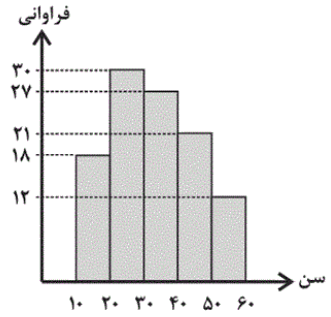
۱) $\frac{۴۰}{۷۷}$ ۲) $\frac{۴۱}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۳}{۷۷}$ ۴) $\frac{۴۵}{۷۷}$

۱۴۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A')=۰/۳$ و $P(B)=۰/۴$ باشند، حاصل $P(A'\cup B')$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۶۸ ۴) ۰/۶۶

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۶- نمودار بافت نگاشت مقابل، توزیع جمعیت افراد شرکت‌کننده در یک برنامهٔ تلویزیونی را برحسب سن آنها نمایش می‌دهد. زاویهٔ مرکزی متناظر با افراد ۳۰ تا ۵۰ ساله در نمودار دایره‌ای این توزیع جمعیت، چند درجه است؟



۱) ۱۴۴ ۲) ۱۵۰

۳) ۱۶۰ ۴) ۱۶۸

۱۴۷- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) در نمونه‌گیری سامانمند، اندازهٔ طبقات برابر یکدیگر است.

۲) در نمونه‌گیری طبقه‌ای، تعداد اعضای انتخابی از هر طبقه همواره متناسب با تعداد اعضای آن طبقه است.

۳) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، همهٔ واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسانی دارند.

۴) در نمونه‌گیری تصادفی ساده، گاهی دسترسی به فهرست اعضای جامعه، دشوار و هزینه‌بر است.

۱۴۸- به ازای چند مقدار n از مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۲۰\}$، عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۹}$ یک عدد زوج است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۴۹- اگر رقم یکان دو عدد $۲a-۷$ و $a+۴$ یکسان باشد، رقم یکان $(a+۲)^{۱۴}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۹

۱۵۰- اگر ۱۵ آذر یک سال، روز پنج‌شنبه باشد، آنگاه اول اردیبهشت آن سال چه روزی از هفته بوده است؟

۱) شنبه ۲) یکشنبه ۳) دوشنبه ۴) سه‌شنبه

۱۵۱- گراف $K_۴$ دارای چند زیرگراف با اندازهٔ ۲ است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۷

۱۵۲- اگر G یک گراف $r-$ منتظم، $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و تعداد اعضای مجموعهٔ همسایگی بستهٔ رأس a، برابر ۴ باشد، آنگاه اندازهٔ گراف $\bar{G}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۳- اعداد ۱ تا ۱۱ بر روی ۱۱ کارت نوشته شده است. به چند طریق می‌توان ۲ کارت از بین این ۱۱ کارت انتخاب نمود به‌طوری که مجموع اعداد روی دو کارت کوچک‌تر از ۱۷ باشد؟

۱) ۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۴ ۴) ۴۶

۱۵۴- چه تعداد از مربع‌های زیر به یک مربع لاتین ۳×۳ منحصر به فرد تبدیل می‌شود؟

الف)

۱		
	۲	
		۳

ب)

۱		
	۱	
		۱

پ)

۱	۲	
	۳	

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۵- اگر هر یال از یال‌های گراف کامل $K_{۱۶}$ را با یکی از ۷ رنگ موجود رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه بزرگ‌ترین مقدار n به‌طوری که مطمئن باشیم حداقل n یال در این گراف هم‌رنگ هستند، کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۰۱- (کاظم اجلالی)

فرض کنیم $\sqrt[۳]{a+۱}-\sqrt[۳]{a-۱}=k$ باشد، تساوی داده شده را به صورت $\sqrt[۳]{(a+۱)^۲}+\sqrt[۳]{(a-۱)^۲}+\sqrt[۳]{a^۲-۱}=۶$ می‌نویسیم. اکنون با ضرب طرفین تساوی‌ها در هم، داریم:

$$\left(\sqrt[۳]{a+۱}-\sqrt[۳]{a-۱}\right)\left(\sqrt[۳]{(a+۱)^۲}+\sqrt[۳]{a^۲-۱}+\sqrt[۳]{(a-۱)^۲}\right)=۶k$$

$$\Rightarrow (a+۱)-(a-۱)=a+۱-a+۱=۶k \Rightarrow k=\frac{۱}{۳}$$

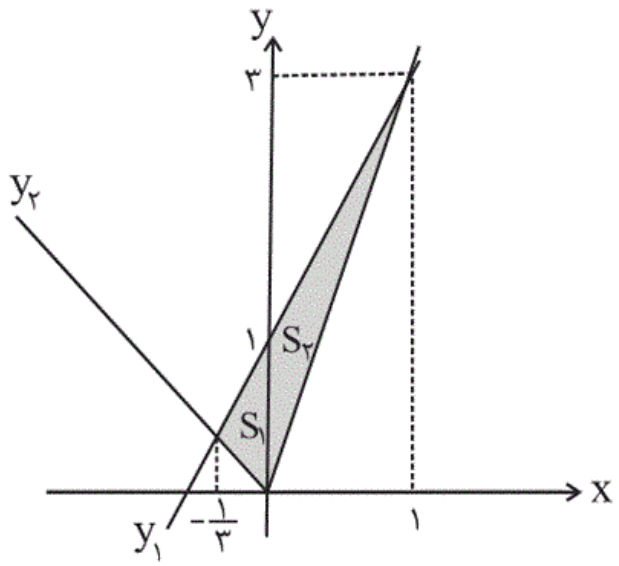
(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۲-

$$y_۲=\begin{cases}-x & ; \ x<۰\\ ۳x & ; \ x\geq ۰\end{cases}$$

نمودارهای این دو تابع در شکل زیر رسم شده‌اند. واضح است که طول نقـاط برخورد نمودارها، جواب‌های دو معادلهٔ $-x=۲x+۱$ و $۳x=۲x+۱$، یعنی $x_۱=-\frac{۱}{۳}$ و $x_۲=۱$ هستند.



با توجه به نمودار داریم:

$$S_۱=\frac{۱}{۲}(۱\times\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۶},S_۲=\frac{۱}{۲}(۱\times ۱)=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow S=S_۱+S_۲=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۳}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۳- (سیدمحمودرضا اسلامی)

جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$ را α و β در نظر می‌گیریم. بنابراین $\alpha + \beta = ۱$ و $\alpha\beta = -۱$ است و در نتیجه جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۸x + n = ۰$ به صورت $۲\alpha + m$ و $۲\beta + m$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$S = (۲\alpha + m) + (۲\beta + m) = ۸$$

$$\Rightarrow ۲(\alpha + \beta) + ۲m = ۸ \Rightarrow m = ۳$$

از طرفی برای حاصل‌ضرب جواب‌ها نیز داریم:

$$P = (۲\alpha + ۳)(۲\beta + ۳) = n$$

$$\Rightarrow ۴\alpha\beta + ۶(\alpha + \beta) + ۹ = n$$

$$\Rightarrow n = -۴ + ۶ + ۹ = ۱۱$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۴- (حمید علیزاده)

تعداد ضربات اضافه پنالتی: x

$$\text{درصد کل گل شدن پنالتی‌ها} = \frac{۸ + ۴}{۱۰ + x} = \frac{۱۲}{۱۰ + x} = ۶۰\% = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow x = ۱۰$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۵- (علی شهرابی)

نقطهٔ A را به‌صورت $(a,۰)$ فرض می‌کنیم. اگر این نقطه را نسبت به خط $x=-۱$ قرینه کنیم به نقطهٔ $B(-a-۲,۰)$ می‌رسیم.

مجموع فواصل A و B از خط $y-x=۰$ برابر $۲\sqrt{۲}$ است، پس داریم:

$$\frac{|۰-a|}{\sqrt{۱+۱}}+\frac{|۰+a+۲|}{\sqrt{۱+۱}}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow |a|+|a+۲|=۴ \xrightarrow{a>۰} a+a+۲=۴$$

$$\Rightarrow a=۱ \Rightarrow \begin{cases} A=(۱,۰) \\ B=(-۳,۰) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{(۱+۳)^۲+(۰-۰)^۲}=۴$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۶- (سعید علم‌پور)

تابع در $x=-۱$ تعریف نشده است اما در آن حد دارد. یعنی $x=-۱$، صفر مشترک عبارت‌های صورت و مخرج است.

مخرج : $-۱+c=۰\Rightarrow c=۱$

صورت : $۲(-۱)^۳-۳(-۱)^۲+a(-۱)+b=۰\Rightarrow b-a=۵$ (۱)

از طرفی عرض از مبدأ تابع برابر با ۳ است. یعنی:

$$f(۰)=\frac{b}{c}=۳\xrightarrow{c=۱}b=۳$$

$$\xrightarrow{(۱)}a=-۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲x^۳-۳x^۲-۲x+۳}{x+۱}=(۲x-۳)(x-۱);D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

$$\Rightarrow f(۲)=۱$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۷- (سعید خانجانی)

$$D_f=[۲,+\infty)$$

$$\sqrt{x-۲}\geq ۰\Rightarrow ۱+\sqrt{x-۲}\geq ۱\Rightarrow \sqrt[۳]{۱+\sqrt{x-۲}}\geq \sqrt[۳]{۱}=۱$$

$$\Rightarrow R_f=[۱,+\infty)$$

$$y=f(x)=\sqrt[۳]{۱+\sqrt{x-۲}}\Rightarrow y^۳=۱+\sqrt{x-۲}$$

$$\Rightarrow (y^۳-۱)^۲=x-۲\Rightarrow y^۶-۲y^۳+۱=x-۲$$

$$\Rightarrow x=y^۶-۲y^۳+۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۶-۲x^۳+۳$$

$$D_{f^{-۱}}=R_f=[۱,+\infty)$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۰۸- (کاظم اجلالی)

$$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{x+1} = 2x$$

بنابراین باید برد تابع خطی $y = 2x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ تعیین کنیم که برابر $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$ است.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸- حسابان ۱ — تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۹- (عرفان صادقی)

$$y = f(x) = 10^{3x-2}$$

$$\Rightarrow \log_{10} y = 3x - 2 \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_{10} y = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_{10} x = a + b\log_{10} x = g(x)$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۰- (علی شهرابی)

$$\log ۲۰ = \log(۲\times ۱۰) = \log ۲ + \log ۱۰ = \log ۲ + ۱ = a \Rightarrow \log ۲ = a - ۱$$

از طرفی می‌دانیم که رابطهٔ $\log ۵ = ۱ - \log ۲$ برقرار است. بنابراین داریم:

$$\log ۵ = ۱ - (a - ۱) = ۲ - a$$

$$\Rightarrow \log ۵\sqrt{۱۰} = \log ۵ + \log \sqrt{۱۰} = ۲ - a + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲} - a$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۱- (علی شهرابی)

$$\overset{\frown}{AB} = ۲۰^\circ = \frac{\pi}{۹}\text{rad}$$

$$\overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AB} = ۱۶۰^\circ = \frac{۸\pi}{۹}\text{rad}$$

$$\xrightarrow{\ell = r\theta} \begin{cases} |\overset{\frown}{AB}| = ۹\times\frac{\pi}{۹} = \pi \\ |\overset{\frown}{BC}| = ۹\times\frac{۸\pi}{۹} = ۸\pi \end{cases} \Rightarrow |\overset{\frown}{BC}| - |\overset{\frown}{AB}| = ۷\pi$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۲- (علی شهرابی)

$$\frac{۲\sin ۱۵^\circ \cos ۴۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ} - ۲\sin ۴۵^\circ = \frac{۲(\sin ۱۵^\circ \cos ۴۵^\circ - \sin ۴۵^\circ \cos ۱۵^\circ)}{\cos ۱۵^\circ}$$

$$= \frac{۲\sin(۱۵^\circ - ۴۵^\circ)}{\cos ۱۵^\circ} = -\frac{۲\sin ۳۰^\circ}{\cos ۱۵^\circ} = -\frac{۴\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}$$

$$= -۴\sin ۱۵^\circ = -۴\cos ۷۵^\circ$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۳- (میلاد سجادی لاریجانی)

$$\text{حد راست} : \lim_{x \to ۰^+} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to ۰^+} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}}{x} \times \frac{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}$$

$$= \lim_{x \to ۰^+} \frac{\sqrt{x^۲}}{x\sqrt{۲}} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{|x|}{\sqrt{۲}x} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x}{\sqrt{۲}x} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{حد چپ} : \lim_{x \to ۰^-} a[x] + \sqrt{۲} = -a + \sqrt{۲}$$

$$\text{حد چپ} = \text{حد راست} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -a + \sqrt{۲} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۴- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}\times\frac{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos 2x}{2(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)}{2(1-\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{2}=\frac{2}{2}=1$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۵- (یاسین سپهر)

حاصل عبارت x^2+kx-3 به ازای جواب $x+1=0$ برابر صفر است.

$$x=-1:(-1)^2+k(-1)-3=0\Rightarrow k=-2$$

حاصل عبارت x^2-2x-3 به ازای جواب $2x-1=0$ برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم مطلوب است:

$$x=\frac{1}{2}:(\frac{1}{2})^2-2(\frac{1}{2})-3=-\frac{15}{4}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ درجهٔ دوم}}\begin{cases}\cos x=\dfrac{-1+3}{4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=\dfrac{\pi}{3}\\ \cos x=\dfrac{-1-3}{4}=-1\Rightarrow x=(2k+1)\pi\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{4\pi}{3}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۷ (علی شهرابی)

مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف $x=b$ را داشته باشد.

$$\Rightarrow \Delta_{\text{مخرج}}=a^2-16=0\Rightarrow a=\pm4\xrightarrow[\text{پس صورت باید منفی باشد.}]{\text{حاصل حد }\infty-\text{ است.}}a=-4$$

ریشهٔ مضاعف عبارت $2x^2-4x+2$ برابر $b=1$ است.

$$\Rightarrow a-b=-4-1=-5$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸- (طاهر دادستانی)

$$g(x)=f(x+\sqrt[3]{x})$$

$$\Rightarrow g'(x)=(x+\sqrt[3]{x})'f'(x+\sqrt[3]{x})=(1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})f'(x+\sqrt[3]{x})$$

$$g'(8)=(1+\frac{1}{3\times 4})f'(8+2)=\frac{13}{12}f'(10)$$

اگر در ضابطهٔ تابع $f'(x^3+x)=\frac{x^2}{x^2+9}$، $x=2$ قرار دهیم، داریم:

$f'(10)=\frac{4}{13}$، پس داریم: $g'(8)=\frac{13}{12}\times\frac{4}{13}=\frac{1}{3}$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۰ تا ۹۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۹- (سعید علم‌پور)

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(2)-f(\alpha)}{2-\alpha}=\frac{0-\sqrt{2-\alpha}}{2-\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2-\alpha}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \frac{1}{2-\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=0$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x=0 = f'(0)=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}\Big|_{x=0}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۰)

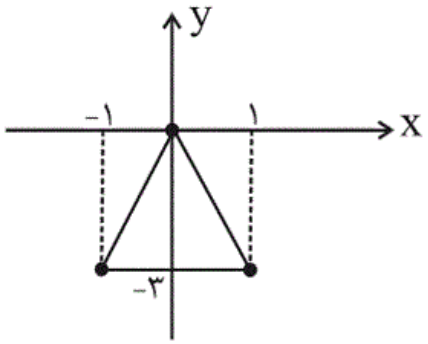
۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۰

$$f'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(x^۲-۴)+\sqrt[۳]{x^۲}(۲x)=\frac{۸(x^۲-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

تابع f در $x=۰$ مشتق پذیر نیست و از طرفی $x=\pm ۱$، جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. بنابراین نقاط $(-۱,-۳)$، $(۰,۰)$ و $(۱,-۳)$ نقاط بحرانی این تابع هستند (مطابق شکل زیر).



مساحت مثلث رسم شده در شکل، برابر $S=\frac{۱}{۲}(۲\times ۳)=۳$ است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

نقطهٔ $A(۱,۲)$، اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+cx$ است، پس:

$$\begin{cases} f(۱)=۱+b+c=۲\Rightarrow b+c=۱ & (۱) \\ f'(۱)=۳x^۲+۲bx+c\Big|_{x=۱}=۳+۲b+c=۰\Rightarrow ۲b+c=-۳ & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} b=-۴, c=۵$$

پس f' به صورت $f'(x)=۳x^۲-۸x+۵$ خواهد بود که صفرهای آن ۱ و $\frac{۵}{۳}$ است. داریم:

		۱		$\frac{۵}{۳}$	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	↗		↘		↗

بنابراین طول و نوع اکسترمم نسبی دیگر تابع f به ترتیب $x=\frac{۵}{۳}$ و مینیمم است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$S'(x)=0 \Rightarrow 1-2x^2=0 \xrightarrow{x>0} x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{max}=S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{6}$$

روش دوم: ماکزیمم مقدار $S(x)$، زمانی رخ می‌دهد که برابری $x^2=1-x^2$ برقرار باشد. $\xrightarrow{x>0} x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow S_{max}=S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{6}$$

نکته: اگر مجموع مقادیر a و b، همواره مقدار ثابتی باشد، حاصلضرب آن‌ها زمانی بیشینه می‌شود که a و b مقادیر یکسانی داشته باشند. به عبارت دیگر: $a+b=T \xrightarrow{a=b=\frac{T}{2}} (ab)_{max}=\left(\frac{T}{2}\right)^2=\frac{T^2}{4}$

در این سؤال، $x^2+\left(1-x^2\right)=1$ است، بنابراین بیشترین مقدار $S(x)$ در جواب معادلهٔ $x^2=1-x^2$ حاصل می‌شود.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۳ (سعید مدیرخراسانی)

نقطهٔ عطف نمودار روی محور yها است. یعنی طول آن صفر است.

طول نقطهٔ عطف: $x_I=-\frac{(a+b)}{3}=0 \Rightarrow a+b=0$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+ax+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+a$$

از طرفی شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ عطف، مثبت است. بنابراین داریم: $f'(0)=a>0$

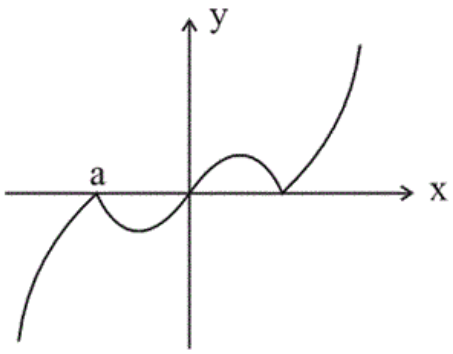
زوج مرتب گزینهٔ «۲» یعنی $(-1,1)$ شرایط مطلوب را داراست.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۴



تابع f روی بازهٔ $(-\infty,a)$ اکیداً صعودی و تقعر نمودار آن به سمت پایین است. بنابراین نمودار تابع f' در این بازه باید مثبت و نزولی باشد. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) نمی‌توانند جواب سؤال باشند. از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=0$ عددی مثبت است، یعنی $f'(0)>0$ است و در نتیجه گزینهٔ (۱) نیز نادرست است.

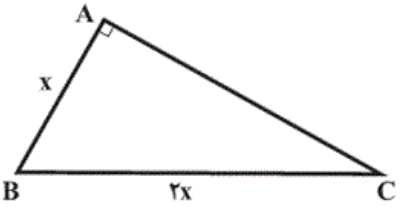
(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

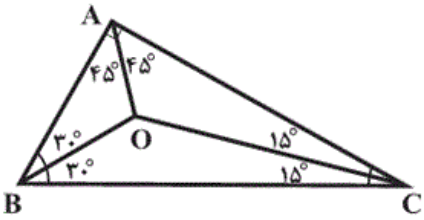
۱۲۵- (حسین حاجیلو)

طول یکی از اضلاع قائمه نصف طول وتر است، پس زاویهٔ مقابل به آن ضلع (زاویهٔ C) برابر ۳۰° است.



نقطه‌ای که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی آن است، پس در شکل زیر OA، OB و OC به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی A، B و C هستند.

در دو مثلث OAB و OAC، مجموع زاویه‌های داخلی را برابر با ۱۸۰° قرار می‌دهیم تا $\widehat{AOB}$ و $\widehat{AOC}$ را به‌دست آوریم:



$$\overset{\Delta}{OAB}: ۴۵^\circ + ۳۰^\circ + \widehat{AOB} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = ۱۰۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OAC}: ۴۵^\circ + ۱۵^\circ + \widehat{AOC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{AOC}} = \frac{۱۰۵^\circ}{۱۲۰^\circ} = \frac{۷}{۸}$$

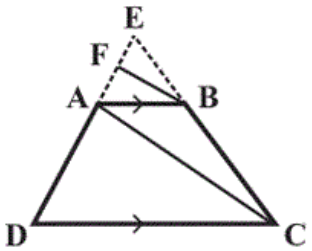
(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ – چندضلعی‌ها، صفحهٔ ۶۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۶- (حسین حاجیلو)

$$\left.\begin{array}{l} AE^2 = EF.ED \Rightarrow \dfrac{EF}{AE} = \dfrac{AE}{ED} \\ AB \parallel CD \Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AE}{ED} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{EF}{AE} = \dfrac{EB}{EC} \qquad (*)$$



از رابطهٔ (*)، طبق عکس قضیهٔ تالس در مثلث EAC، داریم $BF \parallel AC$، پس طول ارتفاع وارد بر ضلع BF در مثلث ABF و طول ارتفاع وارد بر ضلع AC در مثلث ABC با هم برابرند و داریم:

$$k = \frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta ABC}} = \underset{\text{گزینه(۱)}}{\frac{BF}{AC}} \xrightarrow{\text{تالس در } EAC} k = \underset{\text{گزینه(۴)}}{\frac{EF}{AE}} \overset{(*)}{=} \frac{EB}{EC}$$

$$\xrightarrow{\text{تالس در } ECD} k = \underset{\text{گزینه(۳)}}{\frac{AB}{CD}}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۷- (رسول محسنی‌منش)

اگر یک چندضلعی شبکه‌ای b نقطهٔ مرزی و i نقطهٔ درونی داشته باشد، آنگاه $S = \frac{b}{2} + i - 1$ است، از طرفی می‌دانیم که همواره $i \geq 0$ و $b \geq 3$، پس داریم:

$$10/5 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow b = 2(11/5 - i) = 23 - 2i$$

$$\xrightarrow{b \geq 3} 23 - 2i \geq 3 \Rightarrow i \leq 10 \xrightarrow{i \geq 0} 0 \leq i \leq 10$$

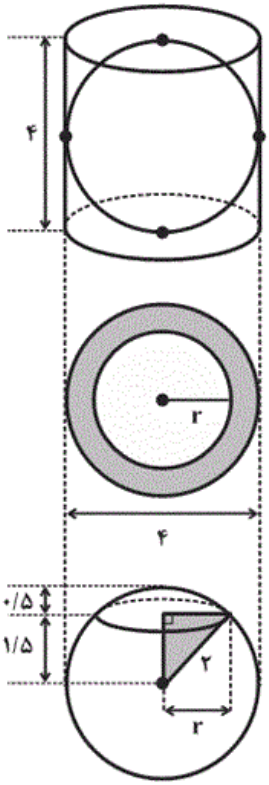
پس i می‌تواند یازده مقدار $0,1,2,\ldots,10$ را بپذیرد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۸- (حسین حاجیلو)



با توجه به توضیحات سؤال، شکل مقابل را می‌توانیم در نظر بگیریم، اگر مساحت سطح مقطع حاصل را برابر با S در نظر بگیریم، داریم:

$$S = \pi(۲)^۲ - \pi(r)^۲ = (۲^۲ - r^۲)\pi \quad (*)$$

برای محاسبهٔ r با استفاده از شکل فوق داریم:

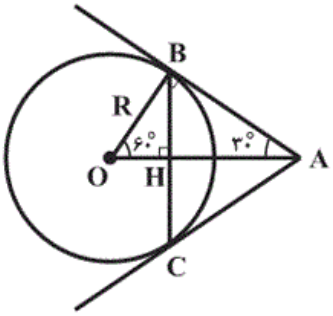
$$(۱/۵)^۲ + r^۲ = ۲^۲ \Rightarrow ۲^۲ - r^۲ = (۱/۵)^۲$$

$$\xrightarrow{(*)} S = (۱/۵)^۲\pi = ۲/۲۵\pi$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۹- (حسین حاجیلو)



با توجه به شکل، اگر $BC = AB = AC$ باشد، آنگاه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. از آنجا که OA نیمساز زاویهٔ BAC است، پس $\widehat{OAB} = ۳۰^\circ$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB، طول ضلع OB (ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°) نصف طول وتر است، پس $OA = ۲R$ می‌باشد. به دلیل مشابه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، طول ضلع OH نصف طول OB است، پس $OH = \frac{R}{۲}$ می‌باشد. داریم:

$$AH = OA - OH = \frac{۳R}{۲} \Rightarrow \frac{OH}{AH} = \frac{\frac{R}{۲}}{\frac{۳R}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

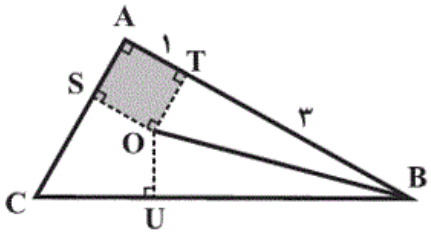
(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

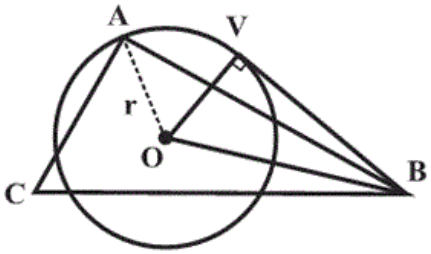
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۰ (حسین حاجیلو)

مثلث ABC قائم‌الزاویه است. در شکل زیر اگر O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و نقاط T، S و U محل تماس این دایره با سه ضلع AB، AC و BC باشد، آنگاه چهارضلعی $ATOS$ مربعی به طول ضلع $P-a=\frac{۳+۴+۵}{۲}-۵=۱$ است، داریم:



$$\begin{cases} OA=\sqrt{۲}AT=\sqrt{۲} \\ OB=\sqrt{OT^۲+BT^۲}=\sqrt{۱۰} \end{cases}$$



حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OBV داریم:

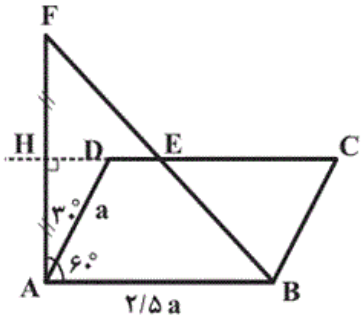
$$BV=\sqrt{OB^۲-OV^۲}=\sqrt{۱۰-۲}=۲\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۹، ۲۵، ۲۶ و ۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۱- (حسین حاجیلو)



فرض کنید نقطهٔ F بازتاب نقطهٔ A نسبت به پاره‌خط CD باشد. نقطهٔ E، نقطهٔ برخورد خطی که B را به F وصل می‌کند با خط شامل پاره‌خط CD می‌باشد. داریم:

$$\overset{\Delta}{ADH}: DH = \frac{۱}{۲}AD \Rightarrow DH = ۰/۵a$$

$$\overset{\Delta}{FAB}: HE \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{HE}{AB} = \frac{FH}{FA} \Rightarrow HE = \frac{۱}{۲}AB = ۱/۲۵a$$

$$\Rightarrow DE = HE - DH = ۱/۲۵a - ۰/۵a = ۰/۷۵a$$

$$\Rightarrow CE = CD - DE = ۲/۵a - ۰/۷۵a = ۱/۷۵a$$

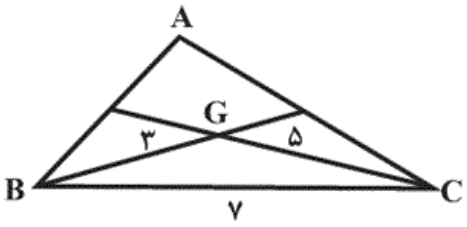
$$\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{۱/۷۵a}{۰/۷۵a} = \frac{۷}{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحهٔ ۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۲- (رسول محسنی‌منش)



می‌دانیم میانه‌ها در هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، بنابراین با معلوم بودن طول سه ضلع مثلث GBC، با استفاده از رابطهٔ هرون، مساحت آن را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\overset{\Delta}{GBC}} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲}\left(\frac{۱۵}{۲}-۷\right)\left(\frac{۱۵}{۲}-۵\right)\left(\frac{۱۵}{۲}-۳\right)} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$$

اگر از نقطهٔ همرسی میانه‌ها به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث با مساحت برابر ایجاد می‌شود، پس داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۳S_{\overset{\Delta}{GBC}} = \frac{۴۵}{۴}\sqrt{۳} = ۱۱/۲۵\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۳- (امیرحسین ابومحبوب)

طبق تعریف دو ماتریس A و B داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \quad و \quad B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۵ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۵ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۵ \\ ۱۵ & ۱۹ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB| = ۱۱\times۱۹ - ۱۵\times۱۵ = ۲۰۹ - ۲۲۵ = -۱۶$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱ و ۲۷)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۴- (امیرحسین ابومحبوب)

ماتریس ضرایب دستگاه معادلات و $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون آن است. با توجه به برابری دو ماتریس $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a+1 & -b \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ و در نتیجه مساوی بودن درایه‌های واقع $\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ در سطر اول و ستون دوم این دو ماتریس، $|A|=1$ است و داریم:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+1 & -b \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -c=-5\Rightarrow c=5 \\ a=2 \\ d=a+1\Rightarrow d=3 \end{cases}$$

$$|A|=1\Rightarrow ad-bc=1\Rightarrow 2\times 3-5b=1\Rightarrow 5b=5\Rightarrow b=1$$

$$a+b+c+d=2+1+5+3=11$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۵- (امیرحسین ابومحبوب)

ماتریس A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ است، پس $|kA|=k^2|A|$ است و داریم:

$$3A=\begin{bmatrix} |A| & -1 \\ -10 & |A| \end{bmatrix}\Rightarrow |3A|=|A^2|-10\Rightarrow 9|A|=|A|^2-10$$

$$\Rightarrow |A|^2-9|A|-10=0\Rightarrow (|A|-10)(|A|+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} |A|=10 \\ |A|=-1 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$3A=\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

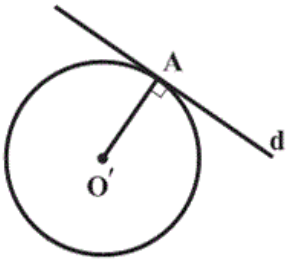
مجموع درایه‌های ماتریس A $=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}-\frac{10}{3}+\frac{10}{3}=3$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۶- (یاسین سپهر)



شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس $O'A$ بر خط d عمود است. بنابراین شیب خط d، قرینهٔ معکوس شیب $O'A$ است. داریم:

$$x^2+y^2-2x+4y-5=0 \Rightarrow O'(1,-2) \Rightarrow m_{O'A}=\frac{y_A-y_{O'}}{x_A-x_{O'}}$$

$$=\frac{1-(-2)}{2-1}=3 \Rightarrow m_d=-\frac{1}{3}$$

معادلهٔ خط d : $y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y-3=-x+2 \Rightarrow x+3y=5$$

حال نقاط تقاطع این خط با محورهای مختصات را به‌دست می‌آوریم:

$$x+3y=5 \xrightarrow{y=0} x=5 \Rightarrow B(5,0)$$

$$x+3y=5 \xrightarrow{x=0} y=\frac{5}{3} \Rightarrow C\left(0,\frac{5}{3}\right)$$

پس مساحت مثلث OBC برابر $\frac{1}{2}\left(5\times\frac{5}{3}\right)=\frac{25}{6}$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۷- (رضا عباسی‌اصل)

$$2b=8 \Rightarrow b=4$$

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow c=3k, a=5k$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25k^2=16+9k^2 \Rightarrow k=1 \Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ a=5 \end{cases}$$

بنابراین مختصات کانون‌های بیضی $F(3,0)$ و $F'(-3,0)$ و مختصات رأس سهمی $B'(0,-4)$ است.

معادلهٔ این سهمی که دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود، به‌صورت $(x-0)^2=4a'(y+4)$ است. از طرفی سهمی از نقطهٔ $F(3,0)$ می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$3^2=4a'(0+4) \Rightarrow a'=\frac{9}{16}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۸- (امیرحسین ابومحبوب)

گزینهٔ «۱»: نقطهٔ $(-۱,۱,۱)$ یکی از رأس‌های مکعب مستطیل است و بر سه وجه به معادلات $\begin{cases} x=-۱ \\ ۱\le y\le ۳ \\ -۲\le z\le ۱ \end{cases}$، $\begin{cases} y=۱ \\ -۱\le x\le ۳ \\ -۲\le z\le ۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} z=۱ \\ -۱\le x\le ۳ \\ ۱\le y\le ۳ \end{cases}$ واقع است.

گزینهٔ «۲»: نقطهٔ $(۳,۳,۳)$ خارج مکعب قرار دارد.

گزینهٔ «۳»: نقطهٔ $(-۲,۰,۱)$ دقیقاً بر دو وجه به معادلات $\begin{cases} y=۱ \\ -۱\le x\le ۳ \\ -۲\le z\le ۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} z=-۲ \\ -۱\le x\le ۳ \\ ۱\le y\le ۳ \end{cases}$ واقع است.

گزینهٔ «۴»: نقطهٔ $(-۱,۳,۱)$ فقط بر یک وجه به معادلهٔ $\begin{cases} y=۳ \\ -۱\le x\le ۳ \\ -۲\le z\le ۱ \end{cases}$ واقع است.

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۹- (یاسین سپهر)

برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲$$

$$\Rightarrow (۵\sqrt{۵})^۲+(-۱)^۲=۳^۲\times|\vec{b}|^۲$$

$$\Rightarrow ۹|\vec{b}|^۲=۱۲۶\Rightarrow|\vec{b}|^۲=۱۴\xrightarrow{|\vec{b}|>۰}|\vec{b}|=\sqrt{۱۴}$$

(هندسه ۳- بردارها: مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۸۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۰- (مرتضی فهیم‌علوی)

در گزینهٔ «۱»، تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$ به ازای $x=-۲$ تعریف نشده است، پس این گزارهٔ سوری نادرست است.

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۱- (امیرحسین ابومحبوب)

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq C\\A\subseteq D\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\subseteq C\cap D\Rightarrow A\subseteq\{۱,۳\}$$

بنابراین مجموعهٔ A حداکثر دارای ۲ عضو و در نتیجه $۲^۲=۴$ زیرمجموعه است.

$$\left.\begin{matrix}C\subseteq B\\D\subseteq B\end{matrix}\right\}\Rightarrow C\cup D\subseteq B\Rightarrow\{۱,۲,۳,۴,۵,۷\}\subseteq B$$

بنابراین مجموعهٔ B حداقل دارای ۶ عضو و در نتیجه $۲^۶=۶۴$ زیرمجموعه است.

$$\frac{\text{حداقل تعداد زیرمجموعه‌های }B}{\text{حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های }A}=\frac{۶۴}{۴}=۱۶$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۲- (علیرضا شریف‌خطیبی)

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$A-\left[B\cup(A-B')\right]=A-\underbrace{\left[B\cup(A\cap B)\right]}_{\text{قانون جذب}}=A-B$$

بنابراین $A-B=A$ است و در نتیجه دو مجموعهٔ A و B جدا از هم هستند، یعنی $A\cap B=\varnothing$ و در نتیجه $B-A=B$ است. به دلیل غیرتهی بودن A و B، قطعاً احکام $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ نادرست است و حکم $A\cup B=U$ نیز در حالت کلی برقرار نیست.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۳- (مرتضی فهیم‌علوی)

$$P(A-B \mid A \cup B)=\frac{P((A-B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=\frac{۰/۳-P(A\cap B)}{۰/۳+۰/۴-P(A\cap B)}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۰/۹-۳P(A\cap B)=۰/۷-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱$$

$$P(B \mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{۰/۱}{۰/۳}=\frac{۱}{۳}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۴۴- (عباس اسدی‌امیرآبادی)

اگر دو مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم قرار دهیم، آنگاه از ۱۱ مهرهٔ موجود در ظرف دوم، ۲ مهره از ابتدا به ظرف اول و ۹ مهره از ابتدا به ظرف دوم تعلق داشته‌اند، اگر A پیشامد خارج کردن مهرهٔ سفید از ظرف دوم باشد، داریم:

$$P(A)=\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۹}{۱۱}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۸}{۷۷}+\frac{۵}{۱۱}=\frac{۴۳}{۷۷}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۴۵- (عباس اسدی‌امیرآبادی)

$$P(A)=۱-۰/۳=۰/۷$$

$$P(A'\cup B')=P\left[(A\cap B)'\right]=۱-P(A\cap B)$$

$$=۱-P(A)\times P(B)=۱-۰/۷\times۰/۴=۱-۰/۲۸=۰/۷۲$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۶- (سیدوحید ذوالفقاری)

تعداد افراد شرکت‌کننده در این برنامهٔ تلویزیونی برابر است با:

$$۱۸+۳۰+۲۷+۲۱+۱۲=۱۰۸$$

زاویهٔ مرکزی متناظر با افراد ۳۰ تا ۵۰ ساله (مجموع دو گروه ۳۰ تا ۴۰ سال و ۴۰ تا ۵۰ سال) برابر است با: $\frac{۲۷+۲۱}{۱۰۸}\times ۳۶۰^\circ = \frac{۴۸}{۱۰۸}\times ۳۶۰^\circ = ۱۶۰^\circ$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۷- (سیدوحید ذوالفقاری)

در نمونه‌گیری طبقه‌ای، با طبقه‌بندی جامعه به زیر جامعه‌های مجزا، یک نمونهٔ تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود ولی تعداد اعضای انتخابی لزوماً متناسب با تعداد اعضای طبقه نیست.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۸- (جواد حاتمی)

برای این‌که عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۹}$**، عددی زوج باشد، لازم است جذر آن یعنی** $\frac{n(n+۱)}{۳}$ **عددی زوج باشد. دو عدد** n **و** $n+۱$**، دو عدد متوالی هستند و در نتیجه حاصل‌ضرب آنها همیشه عددی زوج است، پس لازم است** $n(n+۱)$ **عددی مضرب ۳ باشد. در این‌صورت داریم:** $(k,q\in\mathbb{Z})$

$$n(n+۱)=۳k\Rightarrow\begin{cases}n=۳q\Rightarrow n=۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸\\ n+۱=۳q\Rightarrow n=۳q-۱\Rightarrow n=۲,۵,۸,۱۱,۱۴,۱۷,۲۰\end{cases}$$

بنابراین در مجموع ۱۳ مقدار مختلف برای n **وجود دارد.**

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۹- (علیرضا شریف‌خطیبی)

$$۲a-۷\overset{۱۰}{\equiv}a+۴\Rightarrow a\overset{۱۰}{\equiv}۱۱\overset{۱۰}{\equiv}۱\Rightarrow a+۲\overset{۱۰}{\equiv}۳$$

$$\Rightarrow (a+۲)^{۱۴}\overset{۱۰}{\equiv}۳^{۱۴}\overset{۱۰}{\equiv}(۳^۲)^{۷}\overset{۱۰}{\equiv}(-۱)^{۷}\overset{۱۰}{\equiv}-۱\overset{۱۰}{\equiv}۹$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۹)

---

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۰- (مرتضی خویم‌علوی)

اگر اول اردیبهشت را به عنوان مبدأ فرض کنیم، آنگاه فاصلهٔ اول اردیبهشت تا ۱۵ آذر را محاسبه می‌کنیم که برابر است با:

$$\underset{\text{اردیبهشت}}{\overset{\downarrow}{۳۰}} + \underset{\text{خرداد تا شهریور}}{\overset{\downarrow}{۴\times ۳۱}} + \underset{\text{مهر و آبان}}{\overset{\downarrow}{۲\times ۳۰}} + \underset{\text{آذر}}{\overset{\downarrow}{۱۵}} = ۲۲۹$$

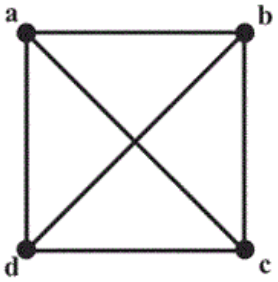
از طرفی $۲۲۹ \overset{۷}{\equiv} ۵$، پس ۱۵ آذر به اندازهٔ ۵ روز هفته بعد از اول اردیبهشت قرار دارد، یعنی اول اردیبهشت روز شنبه بوده است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحهٔ ۲۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۵۱- (امیرحسین ابومحبوب)

در گراف $K_۴$، زیرگراف‌های با اندازهٔ ۲ را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:



الف) زیرگراف‌های از مرتبهٔ ۴: در این حالت کافی است از میان ۶ یال گراف، ۲ یال را انتخاب نماییم. در نتیجه تعداد این زیرگراف‌ها برابر است با:

$$\binom{۶}{۲} = ۱۵$$

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۵۲- (امیرحسین ابومحبوب)

مجموعهٔ همسایگی بستهٔ رأس a دارای ۴ عضو است، پس رأس a با ۳ رأس دیگر از گراف G مجاور است. چون گراف منتظم است، پس درجهٔ همگی رئوس برابر ۳ است و داریم: $۲q(G) = ۶\times ۳ = ۱۸ \Rightarrow q(G) = ۹$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۹ + q(\bar{G}) = \frac{۶\times ۵}{۲} \Rightarrow q(\bar{G}) = ۶$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۳- (حمیدرضا امیری)

تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان دو کارت را از میان ۱۱ کارت انتخاب نمود، برابر است با $\binom{11}{2}=55$. از طرفی مجموع دو کارت انتخاب شده، حداقل برابر $1+2=3$ و حداکثر برابر $10+11=21$ است. بنابراین بهتر است حالت‌های متمم را پیدا کنیم که معادل آن است که مجموع اعداد روی دو کارت بزرگ‌تر یا مساوی ۱۷ شود. این حالت‌ها عبارت‌اند از:

$$\{(10,11),(9,11),(9,10),(8,11),(8,10),(8,9),(7,11),(7,10),(6,11)\}$$

در نتیجه تعداد حالت‌های مورد نظر برابر است با: $55-9=46$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۵۴- (امیرحسین ابومحبوب)

الف) جدول به‌صورت منحصربه‌فرد به مربع لاتین تبدیل می‌شود:

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

ب) جدول را به دو روش مختلف می‌توان به مربع لاتین تبدیل کرد:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

و

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

پ) جدول به‌صورت منحصربه‌فرد به مربع لاتین تبدیل می‌شود:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۵۵- (امیرحسین ابومحبوب)

تعداد یال‌های گراف کامل K_{16} برابر است با: $\frac{16\times15}{2}=120$

اگر ۱۲۰ یال را معادل ۱۲۰ کبوتر و ۷ رنگ موجود را معادل ۷ لانهٔ کبوتر فرض کنیم، آنگاه چون $17\times7+1=120$ است، پس حداقل $17+1=18$ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند. یعنی مطمئناً حداقل ۱۸ یال در این گراف هم‌رنگ هستند.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا