سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

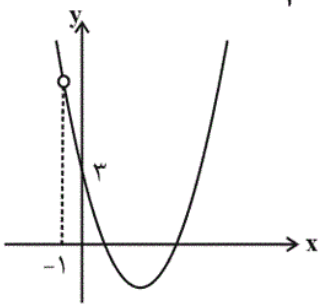
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۰۱- مساحت سطح محصور بین نمودار توابع $y_1 = 2x + 1$ و $y_2 = x + 2|x|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۰۲- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + ax + b}{x + c}$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(2)$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۰۳- اگر $\log ۲۰ = a$ باشد، مقدار $\log ۵\sqrt{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2} + a$ ۲) $\frac{3}{2} - a$ ۳) $\frac{5}{2} + a$ ۴) $\frac{5}{2} - a$

۱۰۴- در یک دنبالهٔ هندسی، حد مجموع جملات دنباله و حد مجموع مربعات جملات دنباله، برابر است. در این‌صورت جملهٔ اول در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-۲,۰]$ ۴) $(۲,۴]$

۱۰۵- عبارت $x^2 + kx - ۳$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $۲x - ۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{16}{9}$

۱۰۶- جواب‌های معادلهٔ $x^2 - ۸x + n = ۰$ از ۲ برابر جواب‌های معادلهٔ $x^2 - x - ۱ = ۰$، m واحد بیشتر است. n کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۰۷- یک بازیکن فوتبال، ۸ ضربه از ۱۰ ضربهٔ پنالتی را به گل تبدیل کرده است. چند ضربهٔ پنالتی دیگر بزند تا با شرط گـل شـدن ۴ ضربه از آن‌ها، درصد کل تبدیل ضربات پنالتی‌اش به گل، ۶۰ درصد شود؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۰۸- اگر $f(x)=\frac{۲x}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x^۲}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}$ باشد، برد تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm ۲\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\pm ۱,\pm ۲\}$

۱۰۹- f تابعی وارون‌پذیر، g تابعی فرد و $g(۲x+۱)=۳x+f(\frac{x+۱}{۲x+۱})$ است. اگر $f(۰)=۵$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(-۲)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۰- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=۱۰^{(۳x-۲)}$ به صورت $g(x)=a+b\log_{۱۰}x$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۲

۱۱۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin^۴x=\cos x(۱+\cos^۳x)$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۱۱۲- حاصل عبارت $A=۲\sin^۲(\frac{۱}{۲}\cos^{-۱}\frac{۱}{۳})+۲\cos^۲(\frac{۱}{۲}\cos^{-۱}\frac{۱}{۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۲۳}{۱۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۷}{۱۲}$

۱۱۳- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x} & ;x>۰\\ a[x]+\sqrt{۲} & ;x<۰\end{cases}$ در $x=۰$ حد دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۱۴- اگر $f'(x^۳+x)=\frac{x^۲}{x^۲+۹}$ باشد، مقدار مشتق تابع $g(x)=f(x+\sqrt[۳]{x})$ در $x=۸$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲}{۱۳}$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۵- اگر $f(x)=[\cos x]$، $a_n=2\pi-\frac{3}{n}$ و $b_n=\pi+\frac{2}{n}$ باشند، دنبالهٔ $\{f(\frac{a_n+b_n}{2})\}$ همگرا به چه عددی است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) صفر ۴) واگرا است.

۱۱۶- اگر مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{x^2+x+5}{\sqrt{x^2-4}}$ در نقاط A و B با عرض‌های منفی همدیگر را قطع کنند، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$

۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴) ۴

۱۱۷- خط مماس بر نمودار تابع $y=Ln(\frac{\sqrt{6x+1}}{x^2-5x+9})$ در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

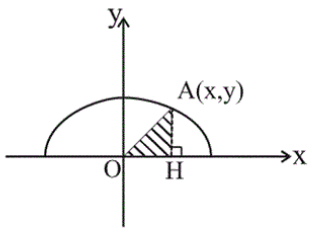
۱) $\frac{12}{25}$ ۲) $\frac{16}{25}$

۳) $\frac{48}{25}$ ۴) $\frac{24}{25}$

۱۱۸- مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x^2-4)$ باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۹- در شکل زیر، اگر نقطهٔ $A(x,y)$ واقع بر نمودار تابع $y=\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$ باشد، حداکثر مساحت مثلث قائم الزاویهٔ OAH کدام است؟

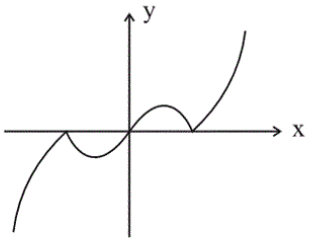


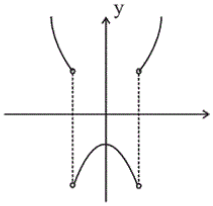
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$

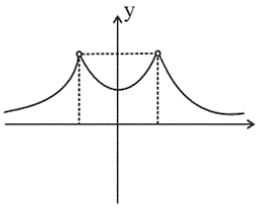
۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

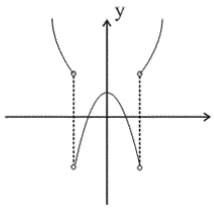
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

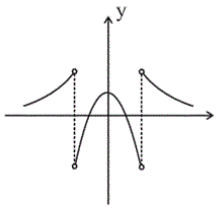
۱۲۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f' به کدام صورت است؟



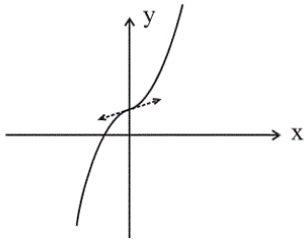
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۲۱- شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=x^۳+(a+b)x^۲+ax+۱$ را نمایش می‌دهد. کدام گزینه می‌تواند زوج مرتب (a,b) باشد؟



۱) $(۰,۰)$
۲) $(۱,-۱)$
۳) $(۱,-۲)$
۴) $(-۱,۱)$

۱۲۲- اگر $A(۱,۲)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+cx$ باشد، طول و نوع اکسترمم نسبی دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$، مینیمم
۲) $-\frac{۵}{۳}$، مینیمم
۳) $\frac{۵}{۳}$، ماکزیمم
۴) $-\frac{۵}{۳}$، ماکزیمم

۱۲۳- در تابع $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ در بازهٔ $[۲,m]$ به‌ازای $n=۹۰$، مجموع بالا به اندازهٔ $\frac{۱}{۴۰}$ واحد از مجموع پایین بیشتر است. مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۶

۱۲۴- حاصل $I=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۱+\sin x}dx$ کدام است؟

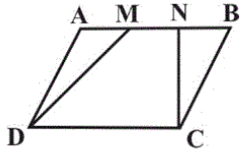
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۵- نقطهٔ O درون مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($BC=۲AB$ و $\hat{A}=۹۰^\circ$)، از هر سه ضلع آن به یک فاصله است. اندازهٔ زاویهٔ AOB چند برابر اندازهٔ زاویهٔ AOC است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

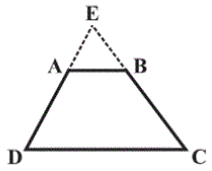
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۲۶- چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و دو نقطهٔ M و N روی ضلع AB هستند. اگر نسبت مساحت ذوزنقهٔ MNCD به مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، نسبت اندازهٔ MN به اندازهٔ AB کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۲۷- در شکل زیر، امتداد ساق‌های ذوزنقه در نقطهٔ E متقاطع‌اند. نقطهٔ F را روی AE طوری انتخاب می‌کنیم که طول AE واسطهٔ هندسی بین طول‌های EF و ED باشد. نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث ABC برابر با کدام نیست؟



۱) $\frac{BF}{AC}$ ۲) $\frac{AF}{DF}$ ۳) $\frac{AB}{CD}$ ۴) $\frac{EF}{AE}$

۱۲۸- شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه به‌ترتیب ۲ و ۴ واحد است. بزرگترین کرهٔ ممکن را از این استوانه جدا کرده، سپس شکل حاصل را با صفحه‌ای به فاصلهٔ ۰/۵ واحد از قاعده قطع می‌کنیم. سطح مقطع حاصل چند واحد مربع است؟

۱) ۲π ۲) $۲/۲۵\pi$ ۳) $۲/۵\pi$ ۴) $۲/۷۵\pi$

۱۲۹- در مثلث ABC، ضلع BC به طول ۸ سانتی‌متر ثابت و مساحت مثلث، ۲۴ سانتی‌متر مربع است. مکان هندسی نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث کدام است؟

۱) دایره‌ای به مرکز وسط ضلع BC و به شعاع ۲
۲) دو خط به موازات BC و هر یک به فاصلهٔ ۴ از آن
۳) دایره‌ای به مرکز وسط ضلع BC و به شعاع ۴
۴) دو خط به موازات BC و هر یک به فاصلهٔ ۲ از آن

۱۳۰- از نقطهٔ A، دو مماس AB و AC را بر دایره‌ای به مرکز O رسم کرده‌ایم. اگر طول BC با طول مماس‌های رسم شده برابر باشد و نقطهٔ برخورد BC با OA را H بنامیم، آنگاه نسبت $\frac{OH}{AH}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$

۱۳۱- A نقطه‌ای از خط $x-y=۴$، A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به مبدأ مختصات و A'' انتقال یافته نقطهٔ A' توسط بردار $(۲,۴)$ است. اگر A'' روی محور y‌ها قرار گیرد، مختصات نقطهٔ A کدام است؟

۱) $(۲,-۲)$ ۲) $(۴,۰)$ ۳) $(۰,-۴)$ ۴) $(۳,-۱)$

۱۳۲- از نقطهٔ A خارج خط L در فضا، بی‌شمار خط متقاطع با L و موازی با صفحهٔ P می‌گذرد. لزوماً کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $A\in P$ ۲) $L\subset P$ ۳) $L\perp P$ ۴) $L\parallel P$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۳- بردارهای a و b مفروض‌اند. اگر $|a| = ۳$ و $|a \times b| = ۵\sqrt{۵}$ و $a.b = -۱$ باشد، آنگاه $|b|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۱۱}$

۱۳۴- از نقطهٔ $(۳,۲,۱)$، خط D را به موازات خط با معادلات $(y = ۰$ و $x + ۲z = ۰)$ رسم می‌کنیم. فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط D کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۳

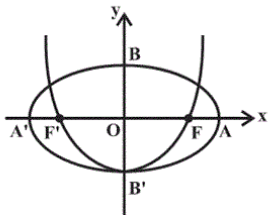
۱۳۵- صفحهٔ گذرنده از دو نقطهٔ $(۲,۳,۲)$ و $(۴,۱,۲)$ و عمود بر صفحهٔ به معادلهٔ $ax - ۵y + ۲z = ۱۲$، محور xها را در نقطه‌ای به طول a قطع می‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳۶- در نقطهٔ $A(۲,۱)$ روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۵ = ۰$، مماسی بر این دایره رسم کرده‌ایم. اگر این خط مماس، محورهای x و y را در نقاط B و C قطع کند، مساحت مثلث OBC کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) ۳ ۲) $\frac{۲۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲}$ ۴) ۴

۱۳۷- در شکل زیر مرکز بیضی بر مبدأ مختصات و قطرهای آن بر محورهای x و y منطبق هستند. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک‌تر آن برابر ۸ باشد، فاصلهٔ رأس تا کانون سهمی کدام است؟ (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)



۱) $\frac{۹}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲۵}{۹}$

۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۳۸- اگر $A = [a_{ij}]_{۲\times۳}$ و $B = [b_{ij}]_{۳\times۲}$ دو ماتریس و $a_{ij} = \begin{cases} i^۲ - ۱ : i = j \\ i - j : i > j \\ j - i : i < j \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i^۲ + ۱ : i = j \\ i + j : i > j \\ i - j : i < j \end{cases}$ باشند، آنگاه $|AB|$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) -۱۶ ۳) ۲۵ ۴) -۲۵

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

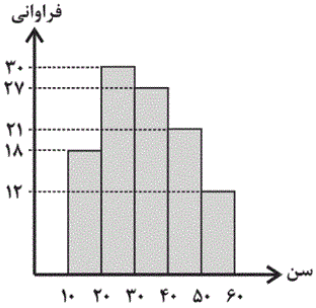
۱۳۹- اگر $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$ و بردارهای $(1,a,a^2)$، $(1,b,b^2)$ و $(1,c,c^2)$ هم صفحه نباشند، آنگاه مقدار abc کدام است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۴۰- اگر ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} a+1 & -b \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$، وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟ $(b \neq 0)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۱۴۱- نمودار مستطیلی مقابل، توزیع جمعیت افراد شرکت کننده در یک برنامهٔ تلویزیونی را برحسب سن آنها نمایش می‌دهد. زاویهٔ مرکزی متناظر با افراد ۳۰ تا ۵۰ ساله در نمودار دایره‌ای این توزیع جمعیت، چند درجه است؟



۱) ۱۴۴ ۲) ۱۵۰
۳) ۱۶۰ ۴) ۱۶۸

۱۴۲- مجموع ۱۰ دادهٔ آماری برابر با ۲۰ و مجموع مربعات آن‌ها برابر با ۲۰۰ است. به هر کدام از این داده‌ها ۲ واحد می‌افزاییم، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۴۳- اگر هر یال از یال‌های گراف کامل K_{16} را با یکی از ۷ رنگ موجود رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه بزرگ‌ترین مقدار n به‌طوری که مطمئن باشیم حداقل n یال در این گراف هم‌رنگ هستند، کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۴۴- اگر A، B، $C=\{1,2,3,4\}$ و $D=\{1,3,5,7\}$، چهار مجموعه باشند که در روابط $A \subseteq C \subseteq B$ و $A \subseteq D \subseteq B$ صدق می‌کنند، آنگاه حداقل تعداد ممکن برای زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B، چند برابر حداکثر تعداد ممکن برای زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A است؟

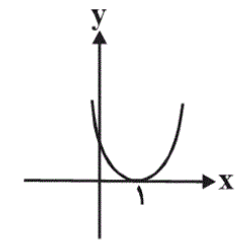
۱) ۱۲۸ ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

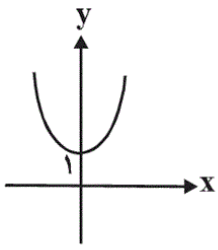
۱۴۵- برای دو مجموعهٔ غیرتهی A و B، رابطهٔ $A - [B \cup (A - B')] = A$ برقرار است. کدام یک از احکام زیر همواره درست است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

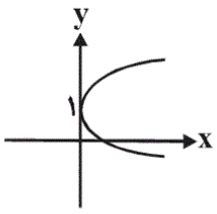
۱) $B - A = B$ ۲) $A \subseteq B$ ۳) $B \subseteq A$ ۴) $A \cup B = U$

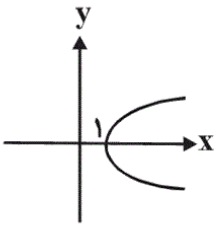
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۶- رابطهٔ R روی R^2 به‌صورت $(x,y)R(t,z) \Leftrightarrow y-x^2=z-t^2$ تعریف‌شده‌است. دستهٔ هم ارزی $[(0,1)]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

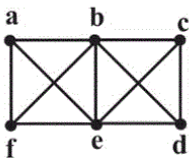
۱۴۷- تاس سالمی را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این که دست کم ۵ بار عدد زوج ظاهر شود کدام است؟

۱) $\frac{1}{64}$ ۲) $\frac{6}{64}$ ۳) $\frac{7}{64}$ ۴) $\frac{9}{64}$

۱۴۸- نقطه‌ای به تصادف درون یک مربع به ضلع ۲ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که فاصلهٔ این نقطه از حداقل یک ضلع کم‌تر از $\frac{1}{2}$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{9}{16}$

۱۴۹- در گراف روبه‌رو، چند مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد؟



۱) ۶ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۳

۱۵۰- عددی در مبنای ۸ به صورت $\overline{a11}$ و در مبنای ۹ به صورت $\overline{8b}$ نوشته می‌شود. اگر عدد را به مبنای ۷ ببریم مجموع ارقام آن چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۷

۱۵۱- اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه ب.م.م دو عدد $6n+2$ و $3n-2$ چند مقدار متفاوت می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۵۲- اگر رقم یکان دو عدد $2a-7$ و $a+4$ یکسان باشد، رقم یکان $(a+2)^{14}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۹

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۳- ماتریس زیر متناظر با رابطهٔ R_1 روی مجموعهٔ A است. چه تعداد از روابط تقارنی تعریف شده روی A، زیرمجموعهٔ R_1 می‌باشند؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۵۴- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A') = 0/3$ و $P(B) = 0/4$ باشند، حاصل $P(A' \cup B')$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۶۸ ۴) ۰/۶۶

۱۵۵- دو ظرف داریم در اولی ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در دومی ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه وجود دارد. از ظرف اول ۲ مهره به تصادف بیرون می‌آوریم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم و سپس از ظرف دوم مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال این که مهرهٔ خارج شده از ظرف دوم سفید باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{40}{77}$ ۲) $\frac{41}{77}$ ۳) $\frac{43}{77}$ ۴) $\frac{45}{77}$

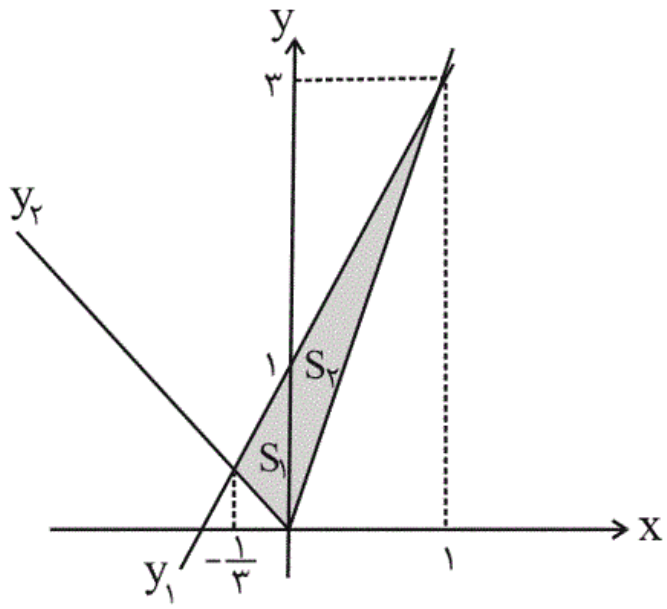
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۰۱- (میلاد سجادی لاریجانی)

$$y_۲=\begin{cases}-x & ; \quad x<۰\\ ۳x & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$$

نمودارهای این دو تابع در شکل زیر رسم شده‌اند. واضح است که طول نقـاط برخورد نمودارها، جواب‌های دو معادلهٔ $-x=۲x+۱$ و $۳x=۲x+۱$، یعنی $x_۱=-\frac{۱}{۳}$ و $x_۲=۱$ هستند.



با توجه به نمودار داریم:

$$S_۱=\frac{۱}{۲}(۱\times\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۶},S_۲=\frac{۱}{۲}(۱\times ۱)=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow S=S_۱+S_۲=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۳}$$

(ریاضیات ۲- توابع خاص- نامعادله و تعیین علامت؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۲- (سعید علم‌پور)

تابع در $x=-۱$ تعریف نشده است اما در آن نقطه حد دارد. یعنی $x=-۱$، صفر مشترک عبارت‌های صورت و مخرج است.

مخرج: $-۱+c=۰\Rightarrow c=۱$

صورت: $۲(-۱)^۳-۳(-۱)^۲+a(-۱)+b=۰\Rightarrow b-a=۵$ (۱)

از طرفی عرض از مبدأ تابع برابر ۳ است. یعنی:

$$f(۰)=\frac{b}{c}=۳\xrightarrow{c=۱}b=۳$$

$$\xrightarrow{(۱)}a=-۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲x^۳-۳x^۲-۲x+۳}{x+۱}=(۲x-۳)(x-۱);D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۳- (علی شهرابی)

$$\log۲۰=\log(۲\times۱۰)=\log۲+\log۱۰=\log۲+۱=a\Rightarrow\log۲=a-۱$$

از طرفی می‌دانیم که رابطهٔ $\log۵=۱-\log۲$ برقرار است. بنابراین داریم:

$$\log۵=۱-(a-۱)=۲-a$$

$$\Rightarrow\log۵\sqrt{۱۰}=\log۵+\log\sqrt{۱۰}=۲-a+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}-a$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- (فریدون ساعتی)

جملات دنباله : $a_۱, a_۱q, a_۱q^۲, \ldots$ ⇒ حد مجموع $= \frac{a_۱}{۱-q}$

مربعات جملات دنباله : $a_۱^۲, a_۱^۲q^۲, a_۱^۲q^۴, \ldots$ ⇒ حد مجموع $= \frac{a_۱^۲}{۱-q^۲}$

$$\frac{a_۱}{۱-q} = \frac{a_۱^۲}{۱-q^۲} \Rightarrow \frac{a_۱}{۱-q} = \frac{a_۱(a_۱)}{(۱-q)(۱+q)}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{a_۱}{۱+q} \Rightarrow ۱+q = a_۱$$

از طرفی می‌دانیم $|q| < ۱$ است.

$$-۱ < q < ۱ \Rightarrow ۰ < q+۱ < ۲ \Rightarrow ۰ < a_۱ < ۲$$

البته جملهٔ نخست یعنی $a_۱$، صفر نیز می‌تواند باشد، پس: $۰ \le a_۱ < ۲$.

(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۵- (یاسین سپهر)

حاصل عبارت $x^۲ + kx - ۳$ به ازای جواب $x + ۱ = ۰$ برابر صفر است.

$$x = -۱ : (-۱)^۲ + k(-۱) - ۳ = ۰ \Rightarrow k = -۲$$

حاصل عبارت $x^۲ - ۲x - ۳$ به ازای جواب $۲x - ۱ = ۰$ برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم مطلوب است:

$$x = \frac{۱}{۲} : (\frac{۱}{۲})^۲ - ۲(\frac{۱}{۲}) - ۳ = -\frac{۱۵}{۴}$$

(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۶- (سیدمحمودرضا اسلامی)

جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$ را α و β در نظر می‌گیریم. بنابراین $\alpha + \beta = ۱$ و $\alpha\beta = -۱$ است و در نتیجه جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۸x + n = ۰$ به صورت $۲\alpha + m$ و $۲\beta + m$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$S = (۲\alpha + m) + (۲\beta + m) = ۸$$

$$\Rightarrow ۲(\alpha + \beta) + ۲m = ۸ \Rightarrow m = ۳$$

از طرفی برای حاصل‌ضرب جواب‌ها نیز داریم: $P = (۲\alpha + ۳)(۲\beta + ۳) = n$

$$\Rightarrow ۴\alpha\beta + ۶(\alpha + \beta) + ۹ = n$$

$$\Rightarrow n = -۴ + ۶ + ۹ = ۱۱$$

(حسابان- معادلات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۷- (حمید علیزاده)

تعداد ضربات اضافه پنالتی: x

$$\text{درصد کل گل شدن پنالتی‌ها} = \frac{۸ + ۴}{۱۰ + x} = \frac{۱۲}{۱۰ + x} = ۶۰\% = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow x = ۱۰$$

(حسابان- معادلات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- (کاظم اجلالی)

$$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{x+1} = 2x$$

بنابراین باید برد تابع خطی $y = 2x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ تعیین کنیم که برابر $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$ است.

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۴ ۳✓ ۲ ۱

۱۰۹- (محمودرضا اسلامی)

$$x = -1 : g(-1) = -3 + f(0) = -3 + 5 = 2$$

$$\xrightarrow{g \text{ فرد است.}} g(1) = -g(-1) = -2$$

$$\Rightarrow x = 0 : g(1) = 0 + f(1) \Rightarrow f(1) = -2 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 1$$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۹ و ۸۹ تا ۹۴)

۴ ۳✓ ۲ ۱

$$\Rightarrow g(x) = f^{-1}(x) = y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_{10} x = a + b\log_{10} x \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۸۹ تا ۹۵)

۴ ۳ ۲ ۱✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- (میلاد سجادی لاریجانی)

$$\sin^۴ x = \cos x + \cos^۴ x \Rightarrow \cos^۴ x - \sin^۴ x = -\cos x$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = -\cos x \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ درجهٔ دوم}} \begin{cases} \cos x = \dfrac{-۱+۳}{۴} = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \dfrac{\pi}{۳} \xrightarrow{x\in[۰,\pi]} x = \dfrac{\pi}{۳} \\ \cos x = \dfrac{-۱-۳}{۴} = -۱ \Rightarrow x = (۲k+۱)\pi \xrightarrow{x\in[۰,\pi]} x = \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{۴\pi}{۳}$$

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۲- (حمید علیزاده)

$$A = ۲\sin^۲(\frac{۱}{۲}\cos^{-۱}\frac{۱}{۳}) + ۲\cos^۲(\frac{۱}{۲}\cos^{-۱}\frac{۱}{۴})$$

$$\alpha = \frac{۱}{۲}\cos^{-۱}\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۲\alpha = \cos^{-۱}\frac{۱}{۳} \Rightarrow \cos ۲\alpha = \frac{۱}{۳}$$

$$\beta = \frac{۱}{۲}\cos^{-۱}\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲\beta = \cos^{-۱}\frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos ۲\beta = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow A = ۲\sin^۲\alpha + ۲\cos^۲\beta = ۱ - \cos ۲\alpha + ۱ + \cos ۲\beta$$

$$= ۲ - \cos ۲\alpha + \cos ۲\beta = ۲ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۳}{۱۲}$$

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۳- (میلاد سجادی لاریجانی)

$$\text{حد راست} : \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{2}x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{حد چپ} : \lim_{x\to 0^-} a[x] + \sqrt{2} = -a + \sqrt{2}$$

$$\text{حد چپ} = \text{حد راست} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = -a + \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(حسابان- حد و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴ و ۱۵۰ تا ۱۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۴- (طاهر دادستانی)

$$g(x) = f(x + \sqrt[3]{x})$$

$$\Rightarrow g'(x) = (x + \sqrt[3]{x})' f'(x + \sqrt[3]{x}) = (1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}) f'(x + \sqrt[3]{x})$$

$$g'(8) = (1 + \frac{1}{3\times 4}) f'(8+2) = \frac{13}{12} f'(10)$$

اگر در ضابطهٔ تابع $f'(x^3 + x) = \frac{x^2}{x^2+9}$، $x = 2$ قرار دهیم، داریم:

$f'(10) = \frac{4}{13}$، پس داریم: $g'(8) = \frac{13}{12} \times \frac{4}{13} = \frac{1}{3}$

(حسابان- مشتق توابع: صفحهٔ ۱۸۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۵- (فریدون ساعتی)

$$\lim_{n\to+\infty}\{f(\frac{a_n+b_n}{۲})\}=\lim_{n\to+\infty}\{f(\frac{۲\pi-\frac{۳}{n}+\pi+\frac{۲}{n}}{۲})\}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\{f(\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۱}{۲n})\}=f((\frac{۳\pi}{۲})^-)=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۲})^-}[\cos x]$$

$$=[\cos(\frac{۳\pi}{۲})^-]=[۰^-]=-۱$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۵۳ تا ۶۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۶- (فریدون ساعتی)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲+x+۵}{\sqrt{x^۲-۴}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲+x+۵}{|x|}$$

$$=\begin{cases}x\to+\infty: y=x+۱ & \text{مجانب مایل}\\ x\to-\infty: y=-x-۱ & \text{مجانب مایل}\end{cases}$$

مجانب‌های قائم $x^۲-۴=۰\Rightarrow x=\pm۲$

محل تلاقی مجانب‌های قائم با مجانب‌های مایل را به‌دست می‌آوریم. هر کدام که عرض منفی داشته باشد، قابل قبول است.

$$x=۲\Rightarrow\begin{cases}y=۳ & \text{غ ق ق}\\ y=-۳\end{cases},\quad x=-۲\Rightarrow\begin{cases}y=-۱\\ y=۱ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{نقاط تلاقی}: A\begin{vmatrix}۲\\-۳\end{vmatrix}, B\begin{vmatrix}-۲\\-۱\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(-۱+۳)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

دقت کنید عرض نقاط A و B باید منفی باشد. هم‌چنین مجانب‌های مایل همدیگر را در نقطهٔ $(-۱,۰)$ قطع می‌کنند که قابل قبول نخواهد بود.

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۲۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\text{Ln}(6x+1)-\text{Ln}(x^2-5x+9)$$

$$\xrightarrow{x=4} y=\frac{1}{2}\text{Ln}25-\text{Ln}5=\text{Ln}5-\text{Ln}5=0$$

$\Rightarrow$ نقطهٔ تماس : $A(4,0)$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{6x+1}\right)-\frac{2x-5}{x^2-5x+9}$$

$$\text{شیب خط مماس}=y'_{(4)}=\frac{3}{25}-\frac{3}{5}=\frac{3-15}{25}=-\frac{12}{25}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط مماس}: y-0=-\frac{12}{25}(x-4)\xrightarrow{x=0} y=\frac{48}{25}$$

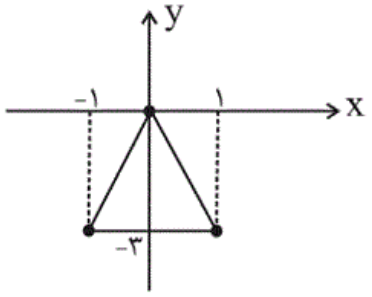
(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۸- (امیرهوشنگ خمسه)

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x^2-4)+\sqrt[3]{x^2}(2x)=\frac{8(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست و از طرفی $x=\pm 1$، جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. بنابراین نقاط $(-1,-3)$، $(0,0)$ و $(1,-3)$ نقاط بحرانی این تابع هستند (مطابق شکل زیر).



مساحت مثلث رسم شده در شکل، برابر $S=\frac{1}{2}(2\times 3)=3$ است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحهٔ ۱۷۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$S_{\overset{\Delta}{OAH}} = \frac{۱}{۲}xy \xrightarrow{y=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱-x^۲}} S(x) = \frac{۱}{۳}x\sqrt{۱-x^۲}$$

روش اول:

$$S'(x) = \frac{۱}{۳}\sqrt{۱-x^۲} - \frac{x^۲}{۳\sqrt{۱-x^۲}} = \frac{۱-۲x^۲}{۳\sqrt{۱-x^۲}}$$

بیشترین مساحت مثلث، در نقطهٔ بحرانی تابع $S(x)$ رخ می‌دهد.

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۱-۲x^۲ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{max} = S(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{۱}{۶}$$

روش دوم: ماکزیمم مقدار $S(x)$، زمانی رخ می‌دهد که برابری $x = \sqrt{۱-x^۲}$ برقرار باشد.

$$\xrightarrow{x>۰} x^۲ = ۱-x^۲ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

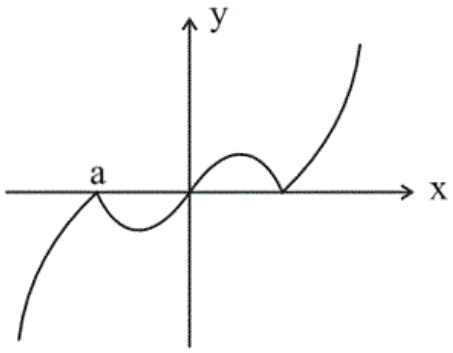
$$\Rightarrow S_{max} = S(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{۱}{۶}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۰- (کاظم اجلالی)



تابع f روی بازهٔ $(-\infty,a)$ اکیداً صعودی و تقعر نمودار آن به سمت پایین است. بنابراین نمودار تابع f' در این بازه باید مثبت و نزولی باشد. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) نمی‌توانند جواب سؤال باشند. از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=0$ عددی مثبت است، یعنی $f'(0)>0$ است و در نتیجه گزینهٔ (۱) نیز نادرست است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۸ تا ۱۸۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۱- (سعید مدیرخراسانی)

نقطهٔ عطف نمودار روی محور yها است. یعنی طول آن صفر است.

$$\text{طول نقطهٔ عطف}: x_I = -\frac{(a+b)}{3} = 0 \Rightarrow a+b=0$$

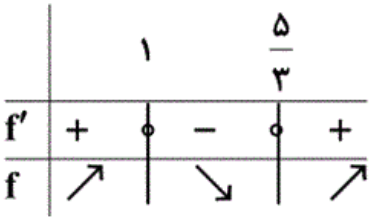
$$\Rightarrow f(x)=x^3+ax+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+a$$

از طرفی شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ عطف، مثبت است. بنابراین داریم: $f'(0)=a>0$

زوج مرتب گزینهٔ «۲» یعنی $(-1,1)$ شرایط مطلوب را داراست.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴



بنابراین طول و نوع اکسترمم نسبی دیگر تابع f به ترتیب $x=\frac{۵}{۳}$ و مینـیمم است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۲۳ (حمید علیزاده)

تابع در بازهٔ داده شده نزولی است: $f'(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}<۰$

حال قرار می‌دهیم: $\Delta x=\frac{m-۲}{۹۰}$، بنابراین داریم:

$$U_n(f)-L_n(f)=(f(۲)-f(m))\Delta x=(۲-\frac{m}{m-۱})(\frac{m-۲}{۹۰})=\frac{۱}{۴۰}$$

$$\Rightarrow(\frac{m-۲}{m-۱})(\frac{m-۲}{۹})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴m^۲-۲۵m+۲۵=۰$$

$$\Rightarrow(m-۵)(۴m-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۵>۲\\ m=۱/۲۵<۲\end{cases}$$ غ ق ق

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۳۲)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۴ (آریان حیدری)

$$۱+\sin x=(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^{۲}$$

$$\Rightarrow I=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۱+\sin x}dx=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^{۲}}dx$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\left|\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}\right|dx$$

$$۰<x<\pi\Rightarrow ۰<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \sin\frac{x}{۲},\cos\frac{x}{۲}>۰$$

$$\Rightarrow I=\int_{۰}^{\pi}(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})\,dx\Rightarrow(-۲\cos\frac{x}{۲}+۲\sin\frac{x}{۲})\Big|_{۰}^{\pi}$$

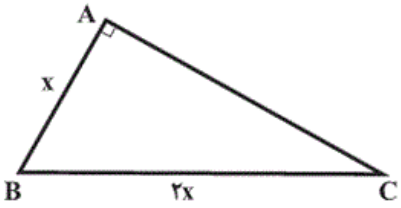
$$=۲-(-۲)=+۴$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

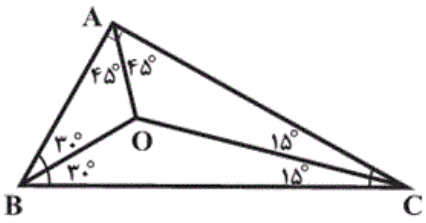
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۵- (حسین حاجیلو)



طول یکی از اضلاع قائمه نصف طول وتر است، پس زاویهٔ مقابل به آن ضلع (زاویهٔ C) برابر ۳۰° است.

نقطه‌ای که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی آن است، پس در شکل زیر OA، OB و OC به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی A، B و C هستند.



در دو مثلث OAB و OAC، مجموع زاویه‌های داخلی را برابر با ۱۸۰° قرار می‌دهیم تا $\widehat{AOB}$ و $\widehat{AOC}$ را به‌دست آوریم:

$$\overset{\Delta}{OAB}: ۴۵^\circ + ۳۰^\circ + \widehat{AOB} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = ۱۰۵^\circ$$

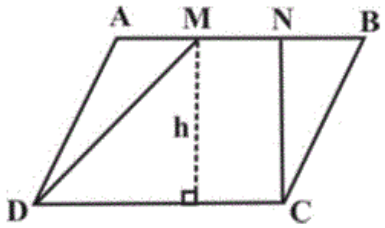
$$\overset{\Delta}{OAC}: ۴۵^\circ + ۱۵^\circ + \widehat{AOC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{AOC}} = \frac{۱۰۵^\circ}{۱۲۰^\circ} = \frac{۷}{۸}$$

(هندسه ۱- هندسه و استدلال: صفحهٔ ۱۱ و هندسه ۲- استدلال در هندسه: صفحهٔ ۳۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۶- (محمدعلی نادرپور)



مطابق شکل، داریم:

$$S = S_{ABCD} = AB \times h, S' = S_{MNCD} = \frac{۱}{۲}(DC + MN) \times h$$

$$= \frac{۱}{۲}(AB + MN) \times h$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{AB + MN}{۲AB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{AB + MN}{AB} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{۱}{۳}$$

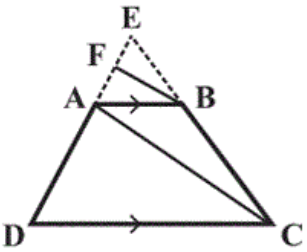
(هندسه ۱- مساحت و قضیهٔ فیثاغورس: صفحه‌های ۴۱ تا ۵۰)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۷- (حسین حاجیلو)

$$\left.\begin{array}{l} AE^2 = EF.ED \Rightarrow \dfrac{EF}{AE} = \dfrac{AE}{ED} \\ AB \parallel CD \Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AE}{ED} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{EF}{AE} = \dfrac{EB}{EC} \qquad (*)$$



از رابطهٔ (*)، طبق عکس قضیهٔ تالس در مثلث EAC، داریم $BF \parallel AC$، پس طول ارتفاع وارد بر ضلع BF در مثلث ABF و طول ارتفاع وارد بر ضلع AC در مثلث ABC با هم برابرند و داریم:

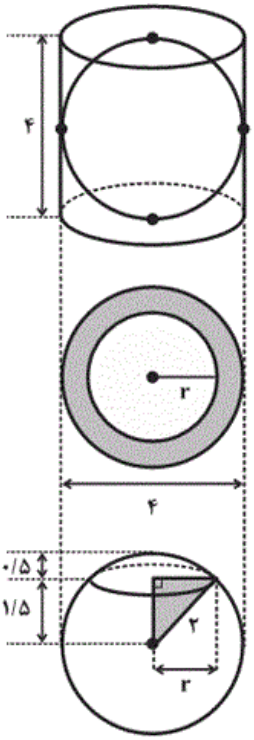
$$k = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BF}{AC} \xrightarrow[\text{گزینه(۱)}]{\text{تالس در } EAC} k = \underbrace{\frac{EF}{AE}}_{\text{گزینه(۴)}} \overset{(*)}{=} \frac{EB}{EC}$$

$$\xrightarrow{\text{تالس در } ECD} k = \underbrace{\frac{AB}{CD}}_{\text{گزینه(۳)}}$$

(هندسه ۱- تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۸- (حسین حاجیلو)



با توجه به توضیحات سؤال، شکل مقابل را می‌توانیم در نظر بگیریم، اگر مساحت سطح مقطع حاصل را برابر با S در نظر بگیریم، داریم:

$$S = \pi(2)^2 - \pi(r)^2 = (2^2 - r^2)\pi \qquad (*)$$

برای محاسبهٔ r با استفاده از شکل مقابل داریم:

$$(1/5)^2 + r^2 = 2^2 \Rightarrow 2^2 - r^2 = (1/5)^2$$

$$\xrightarrow{(*)} S = (1/5)^2\pi = 2/25\pi$$

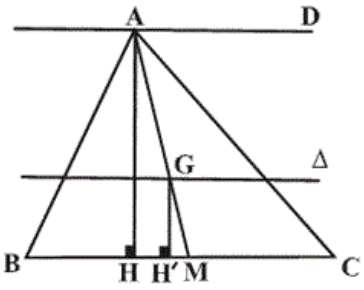
(هندسه ۱- شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۹- (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

$$S=\frac{۱}{۲}BC\times AH \Rightarrow ۲۴=\frac{۱}{۲}\times ۸\times AH \Rightarrow AH=۶$$



بنابراین رأس A روی دو خط D و D' به موازات ضلع BC و به فاصلهٔ $AH=۶$ از آن تغییر می‌کند. فرض کنیم ABC یکی از مثلث‌ها، M نقطهٔ وسط ضلع BC، AM میانه، G نقطهٔ همرسی میانه‌ها و AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد.

عمود GH' را بر ضلع BC وارد می‌سازیم.

$$GH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{GM}{AM}=\frac{GH'}{AH} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{GH'}{۶}$$

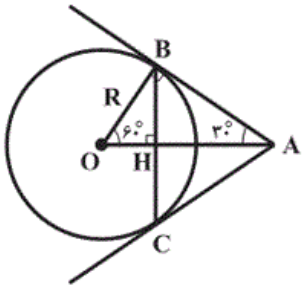
$$\Rightarrow GH'=۲$$

یعنی، نقطهٔ G به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از ضلع BC قرار دارد. به عبارت دیگر، نقطهٔ G روی دو خط Δ و Δ' به موازات ضلع BC و هر یک به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از آن، تغییر مکان می‌دهد.

(هندسه ۲- استدلال در هندسه: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۰- (حسین حاجیلو)



با توجه به شکل، اگر $BC=AB=AC$ باشد، آنگاه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. از آنجا که OA نیمساز زاویهٔ BAC است، پس $\widehat{OAB}=۳۰^\circ$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB، طول ضلع OB (ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°) نصف طول وتر است، پس $OA=۲R$ می‌باشد. به دلیل مشابه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، طول ضلع OH نصف طول OB است، پس $OH=\frac{R}{۲}$ می‌باشد. داریم:

$$AH=OA-OH=\frac{۳R}{۲} \Rightarrow \frac{OH}{AH}=\frac{\frac{R}{۲}}{\frac{۳R}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۱- (محمدعلی نادرپور)

$$A=(\alpha,\beta)\xrightarrow{x-y=۴}\alpha-\beta=۴$$

بازتاب نسبت به مبدأ مختصات : $A'=(-\alpha,-\beta)$

$$\xrightarrow{\text{انتقال با بردار } (۲,۴)}A''=(۲-\alpha,۴-\beta)$$

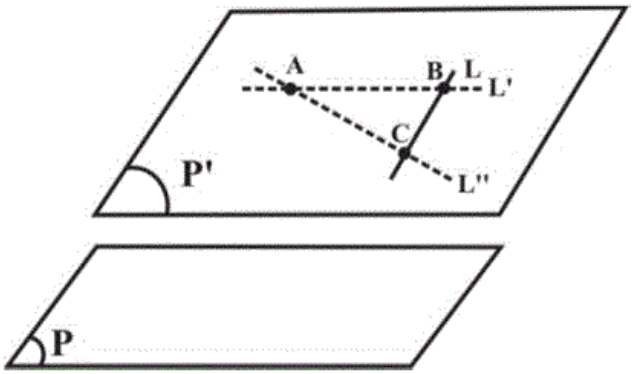
$$\xrightarrow{A''\text{ روی محور } y\text{ ها}}۲-\alpha=۰$$

$$\Rightarrow\alpha=۲\xrightarrow{\alpha-\beta=۴}\beta=-۲\Rightarrow A=(۲,-۲)$$

(هندسه ۲- تبدیل‌ها: صفحه‌های ۹۱ تا ۱۰۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۲- (رضا بخشنده)



شکل بالا را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که L' و L'' دو خط متمایزند که از نقطهٔ A گذشته و با صفحهٔ P موازی‌اند و خط L را به ترتیب در نقاط B و C قطع کرده‌اند.

چون هر دو خط متقاطع L' و L'' با صفحهٔ P موازی‌اند، پس صفحهٔ P' شامل دو خط متقاطع L' و L''، موازی با صفحهٔ P است در نتیجه $P'\parallel P$، از طرفی دو نقطهٔ B و C در صفحهٔ P' و در نتیجه خط L به تمامی در صفحهٔ P' واقع است و می‌دانیم که اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط از یکی از این دو صفحه با صفحهٔ دیگر موازی است، پس خط L موازی صفحهٔ P است. از طرفی شکل فوق، مثال نقض مناسبی برای رد گزینه‌های دیگر است.

(هندسه ۲- هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۳- (یاسین سپهر)

برای دو بردار دلخواه a و b داریم: $|a\times b|^۲+(a.b)^۲=|a|^۲|b|^۲$

$$\Rightarrow \left(۵\sqrt{۵}\right)^۲+(-۱)^۲=۳^۲\times|b|^۲$$

$$\Rightarrow ۹|b|^۲=۱۲۶\Rightarrow |b|^۲=۱۴\xrightarrow{|b|>۰}|b|=\sqrt{۱۴}$$

(هندسه تحلیلی- بردارها: مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۳۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۴- (رضا بخشنده)

می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ P از خطی موازی بردار u از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: $h=\frac{|\overrightarrow{PP_۰}\times u|}{|u|}$

که در آن $P_۰$ نقطهٔ دلخواهی روی خط است. خط D به موازات خط مذکور رسم می‌شود: $(x+۲z=۰,y=۰)\Rightarrow(\frac{x}{۲}=\frac{z}{-۱},y=۰)$

پس خط D با بردار $u=(۲,۰,-۱)$ موازی است. از طرفی با توجه به مفروضات مسأله $P=(۰,۰,۰)$ و $P_۰=(۳,۲,۱)$ که نتیجه می‌شود $\overrightarrow{PP_۰}=(۳,۲,۱)$ و خواهیم داشت:

$$h=\frac{|(۳,۲,۱)\times(۲,۰,-۱)|}{|(۲,۰,-۱)|}=\frac{|(-۲,۵,-۴)|}{\sqrt{۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=۳$$

(هندسه تحلیلی- خط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۵- (رضا بخشنده)

صفحهٔ مورد نظر را P و بردار عمود بر آن را n می‌نامیم. چون صفحهٔ P شامل دو نقطهٔ $A=(۲,۳,۲)$ و $B=(۴,۱,۲)$ است، پس موازی با بردار $\overrightarrow{AB}=(۲,-۲,۰)$ است و در نتیجه $n \perp \overrightarrow{AB}$. از طرفی چون صفحهٔ P عمود بر صفحهٔ $P' : ax-۵y+۲z=۱۲$ می‌باشد پس $n \perp n'=(a,-۵,۲)$ و در نتیجه n، ضریبی غیرصفر از $\overrightarrow{AB}\times n'$ است و خواهیم داشت:

$$(۲,-۲,۰)\times(a,-۵,۲)=(-۴,-۴,۲a-۱۰) \xrightarrow{\div(-۲)} n=(۲,۲,۵-a)$$

حال با استفاده از بردار $n=(۲,۲,۵-a)$ و نقطهٔ $A=(۲,۳,۲)$ واقع در صفحه، معادلهٔ صفحه را می‌نویسیم: $P : ۲x+۲y+(۵-a)z=۲۰-۲a$

از طرفی طبق فرض، صفحهٔ P محور x ها را با طول a قطع می‌کند. با جای‌گذاری مختصات نقطهٔ $(a,۰,۰)$ در معادلهٔ P داریم:

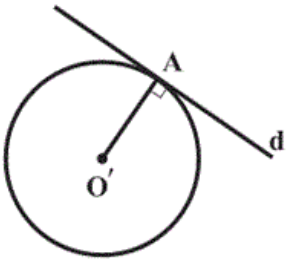
$$۲(a)+۲(۰)+(۵-a)(۰)=۲۰-۲a \Rightarrow ۴a=۲۰ \Rightarrow a=۵$$

(هندسه تحلیلی- خط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۶- (یاسین سپهر)



شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس $O'A$ بر خط d عمود است. بنابراین شیب خط d، قرینهٔ معکوس شیب $O'A$ است. داریم:

$$x^2+y^2-2x+4y+3=0 \Rightarrow O'(1,-2) \Rightarrow m_{O'A}=\frac{y_A-y_{O'}}{x_A-x_{O'}}$$

$$=\frac{1-(-2)}{2-1}=3 \Rightarrow m_d=-\frac{1}{3}$$

معادلهٔ خط d : $y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y-3=-x+2 \Rightarrow x+3y=5$$

حال نقاط تقاطع این خط با محورهای مختصات را به‌دست می‌آوریم:

$$x+3y=5 \xrightarrow{y=0} x=5 \Rightarrow B(5,0)$$

$$x+3y=5 \xrightarrow{x=0} y=\frac{5}{3} \Rightarrow C\left(0,\frac{5}{3}\right)$$

پس مساحت مثلث OBC برابر $\frac{1}{2}\left(5\times\frac{5}{3}\right)=\frac{25}{6}$ است.

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۷- (رضا عباسی‌اصل)

$$2b=8 \Rightarrow b=4$$

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow c=3k, a=5k$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 25k^2=16+9k^2 \Rightarrow k=1 \Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ a=5 \end{cases}$$

بنابراین مختصات کانون‌های بیضی $F(3,0)$ و $F'(-3,0)$ و مختصات رأس سهمی $B'(0,-4)$ است.

معادلهٔ این سهمی که دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود، به‌صورت $(x-0)^2=4a'(y+4)$ است. از طرفی سهمی از نقطهٔ $F(3,0)$ می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$3^2=4a'(0+4) \Rightarrow a'=\frac{9}{16}$$

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۷۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۸- (امیرحسین ابومحبوب)

طبق تعریف دو ماتریس A و B داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۳ & ۱\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۵\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۵\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & ۱۵\\ ۱۵ & ۱۹\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB|=۱۱\times ۱۹-۱۵\times ۱۵=۲۰۹-۲۲۵=-۱۶$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۱ و ۱۱۳)

۱ ✓۲ ۳ ۴

۱۳۹- (مختار منصوری)

$$\begin{vmatrix}a & a^۲ & ۱+a^۳\\ b & b^۲ & ۱+b^۳\\ c & c^۲ & ۱+c^۳\end{vmatrix}=۰\Rightarrow \begin{vmatrix}a & a^۲ & ۱\\ b & b^۲ & ۱\\ c & c^۲ & ۱\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^۲ & a^۳\\ b & b^۲ & b^۳\\ c & c^۲ & c^۳\end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}a & a^۲ & ۱\\ b & b^۲ & ۱\\ c & c^۲ & ۱\end{vmatrix}+abc\begin{vmatrix}۱ & a & a^۲\\ ۱ & b & b^۲\\ ۱ & c & c^۲\end{vmatrix}=۰\Rightarrow (۱+abc)\begin{vmatrix}۱ & a & a^۲\\ ۱ & b & b^۲\\ ۱ & c & c^۲\end{vmatrix}=۰$$

چون بردارهای $(۱,a,a^۲)$، $(۱,b,b^۲)$ و $(۱,c,c^۲)$ هم‌صفحه نیستند، پس

$$\begin{vmatrix}۱ & a & a^۲\\ ۱ & b & b^۲\\ ۱ & c & c^۲\end{vmatrix}\neq ۰$$

و در نتیجه $abc+۱=۰$ است، بنابراین $abc=-۱$.

توجه: $\begin{vmatrix}a & a^۲ & ۱\\ b & b^۲ & ۱\\ c & c^۲ & ۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱ & a & a^۲\\ ۱ & b & b^۲\\ ۱ & c & c^۲\end{vmatrix}$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۰- (امیرحسین ابومحبوب)

ماتریس ضرایب دستگاه معادلات و $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

وارون آن است. با توجه به برابری دو ماتریس $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

و $\begin{bmatrix} a+1 & -b \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ و $\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ و در نتیجه مساوی بودن درایه‌های واقع

در سطر اول و ستون دوم این دو ماتریس، $|A|=1$ است و داریم:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+1 & -b \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -c=-5\Rightarrow c=5 \\ a=2 \\ d=a+1\Rightarrow d=3 \end{cases}$$

$$|A|=1\Rightarrow ad-bc=1\Rightarrow 2\times 3-5b=1\Rightarrow 5b=5\Rightarrow b=1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

$$a+b+c+d=2+1+5+3=11$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۱- (سیدوحید ذوالفقاری)

تعداد افراد شرکت‌کننده در این برنامهٔ تلویزیونی برابر است با:

$$18+30+27+21+12=108$$

زاویهٔ مرکزی متناظر با افراد ۳۰ تا ۵۰ ساله (مجموع دو گروه ۳۰ تا ۴۰ سال و ۴۰ تا ۵۰ سال) برابر است با: $\frac{27+21}{108}\times 360^\circ=\frac{48}{108}\times 360^\circ=160^\circ$

(آمار و مدل‌سازی- نمودارها و تحلیل داده‌ها: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۶ و ۹۲ تا ۹۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۲- (حسین حاجیلو)

$$\sigma_x^2 = (\frac{1}{n}\sum x_i^2) - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1}{10} \times 200 - (\frac{20}{10})^2 = 16$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{16} = 4$$

$$\Rightarrow CV_{x+2} = \frac{\sigma_{x+2}}{\overline{x+2}} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}+2} = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

(آمار و مدل‌سازی- شاخص‌های پراکندگی: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۳- (امیرحسین ابومحبوب)

تعداد یال‌های گراف کامل K_{16} برابر است با: $\frac{16 \times 15}{2} = 120$

اگر ۱۲۰ یال را معادل ۱۲۰ کبوتر و ۷ رنگ موجود را معادل ۷ لانهٔ کبوتر فرض کنیم، آنگاه چون $1 + 7 \times 17 = 120$ است، پس حداقل $1 + 17 = 18$ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند. یعنی مطمئناً حداقل ۱۸ یال در این گراف هم‌رنگ هستند.

(جبر و احتمال- استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰ و ریاضیات گسسته- گراف: صفحهٔ ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۴- (امیرحسین ابومحبوب)

$$\left.\begin{matrix} A \subseteq C \\ A \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subseteq C \cap D \Rightarrow A \subseteq \{1,3\}$$

بنابراین مجموعهٔ A حداکثر دارای ۲ عضو و در نتیجه $2^2 = 4$ زیر مجموعه است.

$$\left.\begin{matrix} C \subseteq B \\ D \subseteq B \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \cup D \subseteq B \Rightarrow \{1,2,3,4,5,7\} \subseteq B$$

بنابراین مجموعهٔ B حداقل دارای ۶ عضو و در نتیجه $2^6 = 64$ زیرمجموعه است.

$$\frac{\text{حداقل تعداد زیرمجموعه‌های } B}{\text{حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های } A} = \frac{64}{4} = 16$$

(جبر واحتمال- مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۳۶ تا ۴۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۵- (علیرضا شریف‌خطیبی)

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$A-\left[B\cup\left(A-B'\right)\right]=A-\underbrace{\left[B\cup\left(A\cap B\right)\right]}_{\text{قانون جذب}}=A-B$$

بنابراین $A-B=A$ است و در نتیجه دو مجموعهٔ A و B جدا از هم هستند، یعنی $A\cap B=\varnothing$ و در نتیجه $B-A=B$ است. به دلیل غیرتهی بودن A و B، قطعاً احکام $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ نادرست است و حکم $A\cup B=U$ نیز در حالت کلی برقرار نیست.

(جبر و احتمال- مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۴۶- (علی عابدینی)

دستهٔ هم ارزی $[(0,1)]$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$[(0,1)]=\{(x,y)\mid y-x^2=1\}$$

از نظر هندسی، دستهٔ هم ارزی $[(0,1)]$ عبارت است از مجموعهٔ نقاط واقع بر سهمی $y=x^2+1$.

(جبر و احتمال- مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۴۷- (محسن فاطمی)

چون در هر بار پرتاب تاس، احتمال زوج آمدن برابر با $\frac{1}{2}$ است، پس طبق فرمول احتمال دو جمله‌ای، احتمال رخ دادن k دفعه زوج برابر است با:

$$P(k)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}\Rightarrow P(5)+P(6)=\frac{\binom{6}{5}}{2^6}+\frac{\binom{6}{6}}{2^6}=\frac{7}{64}$$

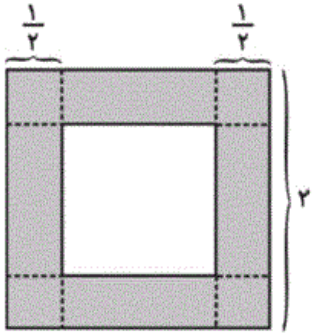
(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۰)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۸- (مهرداد ملوندی)

پیشامد مطلوب (A)، ناحیهٔ سایه‌خوردهٔ شکل زیر است:



$$a_S = ۲ \times ۲ = ۴$$

$$a_A = ۲^۲ - ۱^۲ = ۳$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۳}{۴}$$

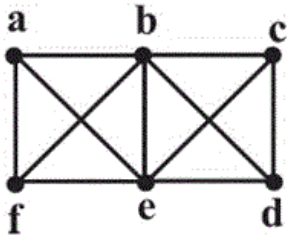
(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۴۹- (مهرداد ملوندی)

با توجه به گراف، ۴ مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد:

$$afeb, aefb, aecb, aedb$$



(ریاضیات گسسته- گراف: صفحهٔ ۱۳)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۵۰- (هومن نورائی)

$$\left.\begin{array}{l}(\overline{a۱۱})_۸ = ۱ + ۸ + ۶۴a \\ (\overline{۸b})_۹ = b + ۷۲\end{array}\right\} \Rightarrow ۹ + ۶۴a = b + ۷۲ \Rightarrow b = ۶۴a - ۶۳$$

با توجه به آن‌که $۷ \geq a \geq ۰$ و $۸ \geq b \geq ۰$، a تنها می‌تواند ۱ باشد، زیرا در غیر این صورت b از ۸ بزرگ‌تر می‌شود، پس داریم:

$$a = ۱ \Rightarrow b = ۶۴ - ۶۳ = ۱$$

پس این عدد در مبنای ۱۰ برابر است با: $(\overline{۸b})_۹ = b + ۷۲ = ۱ + ۷۲ = ۷۳$

نمایش عدد ۷۳ در مبنای ۷ به صورت $(۱۳۳)_۷$ است که مجموع ارقام آن برابر ۷ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۱- (هومن نورائی)

$$(6n+2,3n-2)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 6n+2 \\ d \mid 3n-2 \xrightarrow{\times 2} d \mid 6n-4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 6 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 6$$

از آنجا که اعداد $3n-2$ و $6n+2$ مضرب ۳ نیستند، پس تنها مقادیر $d=1,2$ قابل قبول است.

(ریاضیات گسسته- نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۵۲- (علیرضا شریف‌خطیبی)

$$2a-7 \overset{10}{\equiv} a+4 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 11 \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow a+2 \overset{10}{\equiv} 3$$

$$\Rightarrow (a+2)^{14} \overset{10}{\equiv} 3^{14} \overset{10}{\equiv} \left(3^2\right)^7 \overset{10}{\equiv} (-1)^7 \overset{10}{\equiv} -1 \overset{10}{\equiv} 9$$

(ریاضیات گسسته- نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۵۳- (کاظم باقرزاده)

با توجه به ماتریس متناظر رابطهٔ R_1، ماتریس متناظر با زیرمجموعه‌های R_1 که متقارن هستند به فرم $\begin{bmatrix} a & \circ & \circ & b \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ b & \circ & \circ & c \end{bmatrix}$ می‌باشد که در آن هر یک از اعداد a و b و c می‌توانند صفر یا یک باشند. بنابراین تعداد روابط مورد نظر برابر است با $2 \times 2 \times 2 = 8$.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۴- (عباس اسدی‌امیرآبادی)

$$P(A)=۱-۰/۳=۰/۷$$

$$P(A'\cup B')=P\left[(A\cap B)'\right]=۱-P(A\cap B)$$

$$=۱-P(A)\times P(B)=۱-۰/۷\times ۰/۴=۱-۰/۲۸=۰/۷۲$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۵۵- (عباس اسدی‌امیرآبادی)

اگر دو مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم قرار دهیم، آنگاه از ۱۱ مهرهٔ موجود در ظرف دوم، ۲ مهره از ابتدا به ظرف اول و ۹ مهره از ابتدا به ظرف دوم تعلق داشته‌اند، اگر A پیشامد خارج کردن مهرهٔ سفید از ظرف دوم باشد، داریم:

$$P(A)=\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۹}{۱۱}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۸}{۷۷}+\frac{۵}{۱۱}=\frac{۴۳}{۷۷}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا