سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضیات - ۵۵ سوال -

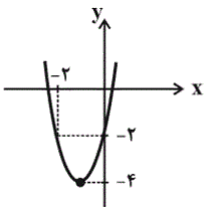
۱۰۱- اگر $0 < a < 1$ و $a^2 + \frac{4}{a^2} = 6$ باشد، مقدار عبارت $a^3 - \frac{8}{a^3}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$
۲) $8\sqrt{2}$
۳) $-8\sqrt{2}$
۴) $-4\sqrt{2}$

۱۰۲- در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت، مجموع دو جملهٔ اول ۷ و مجموع ۶ جملهٔ اول ۹۱ است. مجموع ۴ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۲۸
۲) ۳۲
۳) ۳۵
۴) ۴۹

۱۰۳- نمودار مقابل مربوط به سهمی $y = f(x)$ است. مجموع مربعات جواب‌های معادلهٔ $f(x) = 0$ کدام است؟

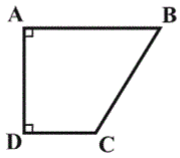


۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۱۰۴- اگر $x = 2$ طول یکی از نقاط برخورد دو تابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2 + 4x - 4$ باشد، دو نقطهٔ تلاقی دیگر در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند؟

۱) $3\sqrt{10}$
۲) $\sqrt{10}$
۳) ۶
۴) $2\sqrt{10}$

۱۰۵- اگر در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ فرضی زیر مختصات رأس‌ها به‌صورت $A(1,2)$، $B(-1,4)$، $C(3,5)$ و $D(m,n)$ باشد، $3m - n$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۱۵

۱۰۶- اگر $x^2 + |x^2 - 2x| = 2x$ باشد، مقدار $\left[\frac{|3x-4|}{5}\right]$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر یا ۱
۲) فقط صفر
۳) ۱- یا صفر
۴) فقط ۱-

۱۰۷- اگر $f(x)=x^{۲}+kx$، $g(x)=\frac{|x|}{x}-۲$ و برد تابع fog فقط شامل یک عضو باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

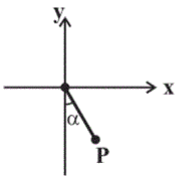
۱۰۸- اگر $f\left(۱+\frac{x}{۲}\right)=\frac{x}{۴}-۱$ و $g(x)=۲x-۳$ باشد، حاصل $gof^{-۱}(۲)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۱۰۹- وارون تابع $f(x)=a+\log_{۳}(bx+۱)$ از نقاط $A(۳,۱)$ و $B(۵,۱۳)$ عبور می‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۰- در شکل زیر، نقطهٔ P با عرض $-\frac{۲}{۳}$ در فاصلهٔ یک واحدی نسبت به مبدأ مختصات قرار دارد. مقدار $\sin ۴\alpha$ کدام است؟



۱) $-\frac{۸\sqrt{۵}}{۸۱}$ ۲) $\frac{۸\sqrt{۵}}{۸۱}$ ۳) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۸۱}$ ۴) $-\frac{۵\sqrt{۳}}{۸۱}$

۱۱۱- اگر $\sin x\sin ۳x=-\left(\cos x\cos ۳x+\frac{۳}{۸}\right)$ باشد، مقدار $\tan^{۲} x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۲ ۳) ۲/۴ ۴) ۲/۶

۱۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲\pi^{-}}\frac{\sqrt{۲-۲\cos x}}{\sin ۲x}$ کدام است؟

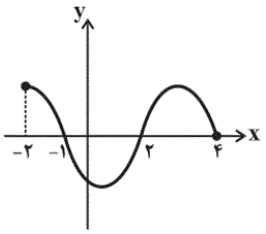
۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۱۳- تابع $g(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{۲a|x-۲|} & ;\ x<۲\\ ۱ & ;\ x=۲\\ [-x+۳]-b & ;\ x>۲\end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته است. حاصل $a+b$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۹}{۸}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۴- اگر نمودار تابع $y=f(x-2)$ به‌صورت روبه‌رو باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $[-۳,۲]$
۲) $[۲,۴]$
۳) $[-۲,۳]$
۴) $[۰,۱]\cup[۴,۶]$

۱۱۵- تابع اکیداً صعودی $y=f(x)$ مفروض است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-۱$ و $x+۲$ به‌ترتیب $a-۲$ و $۲a+۱$ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱
۲) -۲
۳) -۳
۴) -۴

۱۱۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\tan ۳x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$
۲) $\frac{۳\pi}{۴}$
۳) π
۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۱۷- اگر $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{f(x)}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) $+\infty$
۳) ۱
۴) -۱

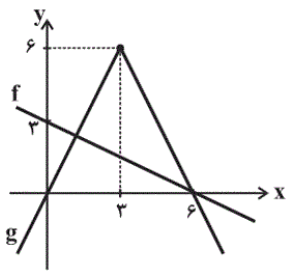
۱۱۸- اگر $f(x)=\frac{x^۲-۴}{\cos \pi x}[x-۳]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴
۲) -۴
۳) ۸
۴) -۸

۱۱۹- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-۲x$ در $x=\sqrt{۲}$ با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ θ می‌سازد. مقدار $\frac{۱}{\cos^۲\theta}$ کدام است؟

۱) ۱۷
۲) ۱۶
۳) ۴
۴) ۵

۱۲۰- با توجه به نمودار دو تابع f و g، مشتق تابع $h(x)=\frac{f(x)-۱}{(g(x))^۲}$ در $x=۴$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۳۲}$
۲) $-\frac{۱}{۱۶}$
۳) $-\frac{۱}{۸}$
۴) $-\frac{۱}{۴}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

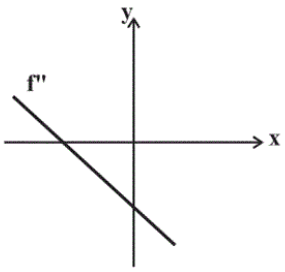
۱۲۱- اگر $۲۰f(x) = x^۵ + ۵x^۴ + ۱۰x(x+۱)^۲ + ۱۰x + ۴$ باشد، نمودار تابع f'' از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

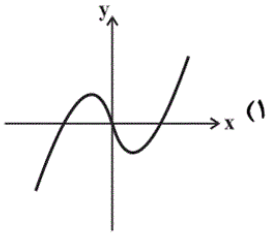
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

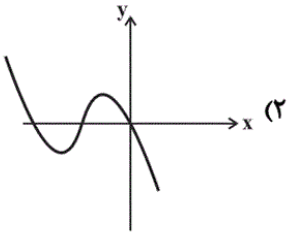
۱۲۲- استوانه‌ای به شعاع r، درون یک کره به شعاع ۴ محاط شده‌است. به ازای کدام مقدار r، حجم استوانه بیش‌ترین مقدار را دارد؟

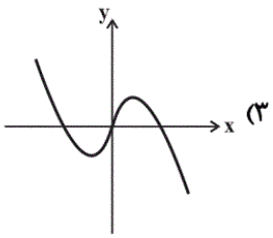
۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

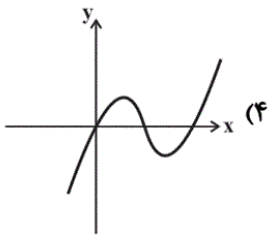
۱۲۳- اگر نمودار تابع f'' به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع f به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۱)


۲)


۳)


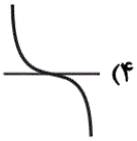
۴)


۱۲۴- نمودار تابع $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ در همسایگی نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$ به کدام صورت است؟

۱)

۲)

۳)

۴)


۱۲۵- عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC از مثلث ABC در نقطهٔ S داخل این مثلث متقاطع‌اند. اگر $\overset{\frown}{SBC} = ۱۸^\circ$ باشد، آنگاه زاویهٔ BAC چند درجه است؟

۱) ۷۲ ۲) ۷۵ ۳) ۷۸ ۴) ۸۱

۱۲۶- در مثلثی به طول اضلاع ۹، ۱۲ و ۱۵، نیمساز زاویهٔ داخلی روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع، ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع را در نقطهٔ T قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ T از ضلع متوسط کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۴ ۴) ۳/۶

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۲۷- طول یک مستطیل سه برابر عرض آن است. چه نسبتی از محیط چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل، داخل مستطیل قرار می‌گیرد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲۸- اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$، $AB=۳$ و $AC=۴$) را حول وتر آن دوران دهیم، کدام شکل هندسی حاصل می‌شود؟

۱) دو مخروط با شعاع قاعدهٔ ۲/۵
۲) دو مخروط با ارتفاع‌های ۱/۸ و ۳/۲
۳) یک مخروط با شعاع قاعدهٔ ۲/۵
۴) یک مخروط با ارتفاع ۲/۴

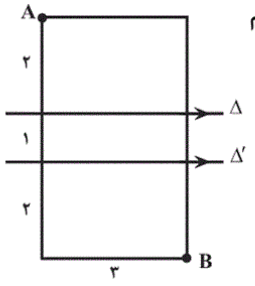
۱۲۹- نسبت مساحت کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یک نیم‌دایره، به مساحت مربع محاط در آن نیم‌دایره چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

۱۳۰- فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره ۵ سانتی‌متر است. اگر طول مماس مشترک داخلی این دو دایره برابر ۳ سانتی‌متر باشد، کمترین فاصلهٔ بین نقاط واقع بر این دو دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷۵

۱۳۱- در شکل مقابل، A و B دو رأس از مستطیلی به ابعاد ۳ و ۵ هستند. در حرکت از A به B، اگر بخواهیم مسیر بین دو خط موازی Δ و Δ'، عمود بر آن دو باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟



۱) $۲+۳\sqrt{۲}$ ۲) $۱+\sqrt{۳۴}$
۳) ۷ ۴) ۶

۱۳۲- در مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۴، فاصلهٔ نقطهٔ همرسی میانه‌ها از ضلع متوسط کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳۱}}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix} k & ۱ \\ ۱ & -k+۲ \end{bmatrix}$ ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) بستگی به مقدار k دارد.

۱۳۴- به ازای چند مقدار m، دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} mx+۲y=m+۲ \\ ۳x+(m+۵)y=۲ \end{cases}$ بیش از یک دسته جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) بی‌شمار ۳) ۲ ۴) ۱

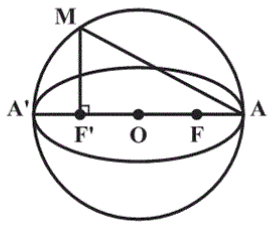
۱۳۵- دایره‌ای بر خطوط $y=x+۱$ و $y=x-۳$ مماس است. اگر خط $x+y+۳=۰$ بر دایره عمود باشد، این دایره محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۳۶- سهمی $y^۲-۲y+۸x+۹=۰$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع $\sqrt{۵}$ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره با دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۵$ چه وضعیتی دارد؟

۱) مماس خارج ۲) مماس داخل ۳) متقاطع ۴) هم مرکز

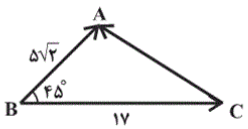
۱۳۷- در شکل زیر، اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر دایره برابر ۱۰ باشد، طول پاره‌خط AM کدام است؟ (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)



۱) ۸ ۲) $۶\sqrt{۲}$

۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) ۹

۱۳۸- در شکل مقابل، حاصل $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ کدام است؟



۱) -۱۶۰ ۲) -۱۹۰ ۳) -۲۰۰ ۴) -۲۰۴

۱۳۹- اگر $|\vec{a}|=۲$، $|\vec{b}|=۴$ و $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ باشد، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۱۳۵° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۱۲۰°

۱۴۰- اگر گزارهٔ $p \Rightarrow q$ نادرست و گزارهٔ $r \sim$ درست باشد، کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $(\sim q \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow p$ ۲) $(p \vee q) \Rightarrow r$ ۳) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ۴) $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۴۱- اگر $A=\{\{۱,۲\},۱,۲\}$، $B=\{۱,۲\}$ و $C=\{\{۱,۲\}\}$، آنگاه کدام دسته از روابط زیر همگی صحیح هستند؟

۱) $B\subseteq A$ و $B\in A$ و $B\subseteq C$

۲) $B\subseteq A$ و $B\in A$ و $B\not\subseteq C$

۳) $B\subseteq A$ و $B\notin A$ و $B\not\subseteq C$

۴) $B\not\subseteq A$ و $B\in A$ و $B\not\subseteq C$

۱۴۲- اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی، $A=\{a,b\}$، $B=\{a,c\}$، $C=\{a,d,e\}$ پیشامدهایی از این فضای نمونه و $P(A)=\frac{۱}{۳}$، $P(B)=\frac{۲}{۵}$ و $P(C)=\frac{۳}{۵}$ باشد، آنگاه $P(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۴۳- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونهٔ S، اگر $P(A)=\frac{۱۲}{۲۵}$، $P(B)=\frac{۳۷}{۱۰۰}$ و $P(A'|B')=\frac{۲۶}{۶۳}$ باشد، حاصل $P(A|B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۷}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۳۷}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۷}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۷}$

۱۴۴- احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده ۰/۷۵ است. اگر ۴ نفر را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آن که داروی ساخته شده روی حداقل یک نفر جواب منفی داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۱}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۴۳}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۱۷۵}{۲۵۶}$

۱۴۵- اگر میانگین داده‌های $۲ax_۱+b, ۲ax_۲+b, ..., ۲ax_n+b$ برابر ۸۰ و میانگین داده‌های $ax_۱+b, ax_۲+b, ..., ax_n+b$ برابر ۳۰ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲۰- ۲) ۱۰- ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۱۴۶- اگر نمودار جعبه‌ای داده‌های مرتب شدهٔ ۵,۷,۸,۹,۱۱,۱۲,۱۵,۱۷,۱۸,۲۰,۲۲,۲۴,۲۶,۲۷,۳۰ را رسم کنیم، آنگاه دامنهٔ میان‌چارکی برای داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۸/۵ ۳) ۹ ۴) ۹/۵

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۴۷- یک جامعه از ۶ نفر تشکیل شده که درآمد ماهیانهٔ آنها بر حسب میلیون تومان به‌صورت $\{۱,۳,۵,۶,۷,۸\}$ است. احتمال برابری میانگین نمونه و جامعه در نمونه‌های دو عضوی این جامعه چند برابر همین احتمال در نمونه‌های سه عضوی این جامعه است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۴۸- اگر $a\in[b]_{۶}$ و $b\in[-a]_{۶}$، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ab بر ۹ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۷

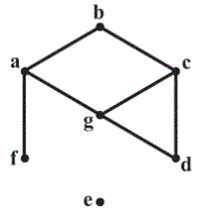
۱۴۹- به ازای کدام مقدار b، دو عدد متمایز به‌صورت $\overline{۱۳ab۹}$ وجود دارد که هر کدام مضرب ۹ باشند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۰- اگر x و y دو عدد صحیح باشند که در معادلهٔ $۷x-۱۱y=۳۷$ صدق کنند، در این‌صورت کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) $x-y\overset{۱۸}{\equiv}۱۱$ ۲) $x+y\overset{۱۸}{\equiv}۱۳$ ۳) $x-y\overset{۴}{\equiv}۱$ ۴) $x+y\overset{۴}{\equiv}۳$

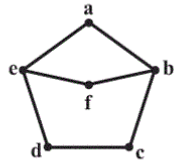
۱۵۱- اگر گراف G مطابق شکل مقابل باشد، آنگاه مجموع درجات رئوس گراف $\overline{G}$ کدام است؟

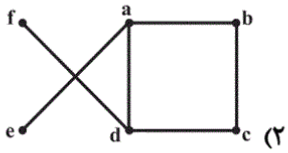


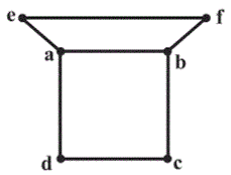
۱) ۱۴ ۲) ۱۶

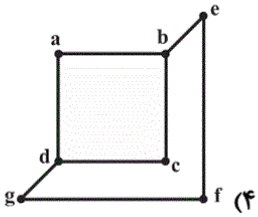
۳) ۲۲ ۴) ۲۸

۱۵۲- در کدام‌یک از گراف‌های زیر، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتاست؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۵۳- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد چهاررقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۵۴- تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۹۳

۱۵۵- چند تابع پوشا از مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4\}$ به مجموعهٔ $B = \{a,b,c,d\}$ می‌توان تعریف کرد به‌گونه‌ای که شامل زوج مرتب $(4,d)$ بوده ولی شامل زوج مرتب $(3,b)$ نباشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۰۱- (یاسر ارشدی)

$$a^۲+\frac{۴}{a^۲}=\left(a-\frac{۲}{a}\right)^۲+۴=۶\Rightarrow\left(a-\frac{۲}{a}\right)^۲=۲\Rightarrow\left|a-\frac{۲}{a}\right|=\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{۰<a<۱}-\left(a-\frac{۲}{a}\right)=\sqrt{۲}\Rightarrow a-\frac{۲}{a}=-\sqrt{۲}$$

بنابراین طبق اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$a^۳-\frac{۸}{a^۳}=\left(a-\frac{۲}{a}\right)\left(a^۲+\frac{۴}{a^۲}+۲\right)=-\sqrt{۲}(۶+۲)=-۸\sqrt{۲}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۲- (طاهر دادستانی)

$$S_۲=a_۱+a_۲=a_۱(۱+q)=۷ \qquad (۱)$$

$$S_۶=a_۱\frac{q^۶-۱}{q-۱}=۹۱ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{S_۶}{S_۲}=\frac{q^۶-۱}{q^۲-۱}=q^۴+q^۲+۱=۱۳$$

$$\Rightarrow q^۴+q^۲-۱۲=(q^۲+۴)(q^۲-۳)=۰\Rightarrow q^۲=۳$$

$$\xrightarrow{q>۰}q=\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{(۱)}a_۱=\frac{S_۲}{۱+q}=\frac{۷}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۷\left(\sqrt{۳}-۱\right)}{۲}$$

$$\Rightarrow S_۴=a_۱\frac{q^۴-۱}{q-۱}=\frac{۷\left(\sqrt{۳}-۱\right)}{۲}\times\frac{۳^۲-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۵۶}{۲}=۲۸$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۳- (حمید علیزاده)

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ در نظر می‌گیریم:

$$f(۰)=-۲\Rightarrow c=-۲$$

با توجه به اینکه $f(-۲)=f(۰)=-۲$ است، طول رأس سهمی میانگین صفر و ۲- یعنی ۱- است.

$$\Rightarrow x_S=\frac{-b}{۲a}=-۱\Rightarrow b=۲a \quad (۱)$$

$$f(-۱)=a-b-۲=-۴\Rightarrow a-b=-۲ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=۲,b=۴\Rightarrow f(x)=۲x^۲+۴x-۲$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۴- (عرفان صادقی)

برای به‌دست آوردن نقاط تلاقی در ابتدا معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^۳=x^۲+۴x-۴$$

$$\Rightarrow x^۳-x^۲-۴x+۴=(x-۲)(x^۲+x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \\ x^۲+x-۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱\Rightarrow f(۱)=g(۱)=۱ \\ x=-۲\Rightarrow f(-۲)=g(-۲)=-۸ \end{cases}$$

در نهایت فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(۱,۱)$ و $B(-۲,-۸)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{۹+۸۱}=\sqrt{۹۰}=۳\sqrt{۱۰}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳، ۲۹ و ۳۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۰۵- (ندا ملکیان)

با توجه به شکل، خطی که از AD می‌گذرد، بر خطی که از AB می‌گذرد عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب آن‌ها برابر ۱- است:

$$\left(m_{AD} \times m_{AB} = -1\right)$$

$$\begin{cases} m_{AD} = \dfrac{n-2}{m-1} \\ m_{AB} = \dfrac{4-2}{-1-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{n-2}{m-1} \times -1 = -1 \Rightarrow n-2 = m-1$$

$$\Rightarrow n - m = 1 \qquad (1)$$

از طرفی خطی که از AB می‌گذرد، با خطی که از DC می‌گذرد موازی است، پس شیب این دو خط با هم برابر است: $\left(m_{AB} = m_{DC}\right)$

$$\begin{cases} m_{AB} = -1 \\ m_{DC} = \dfrac{5-n}{3-m} \Rightarrow \dfrac{5-n}{3-m} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 - n = -3 + m \Rightarrow m + n = 8 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} n = \frac{9}{2}, m = \frac{7}{2} \Rightarrow 3m - n = 6$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۶- (علی شهرابی)

می‌دانیم اگر $|A| = -A$ باشد، $A \le 0$ است. پس در این سؤال داریم:

$$\left|x^2 - 2x\right| = -\left(x^2 - 2x\right) \Rightarrow x^2 - 2x \le 0 \Rightarrow 0 \le x \le 2$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{5} \le \frac{3x-4}{5} \le \frac{2}{5} \Rightarrow \left[\frac{3x-4}{5}\right] = -1 \text{ یا } 0$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحهٔ ۲۵ و تابع: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۰۷- (علی شهرابی)

$$g(x)=\frac{|x|}{x}-۲=\begin{cases}-۱ & ;x>۰\\ -۳ & ;x<۰\end{cases}$$

پس برد fog فقط شامل دو عضو $f(-۱)$ و $f(-۳)$ است. برای آن که برد fog فقط ۱ عضو داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$f(-۱)=f(-۳)\Rightarrow ۱-k=۹-۳k\Rightarrow k=۴$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۸- (امیرهوشنگ خمسه)

$$f^{-۱}(۲)=a\Rightarrow f(a)=۲$$

$$\Rightarrow f(a)=f\left(۱+\frac{x}{۲}\right)=\frac{x}{۴}-۱=۲\Rightarrow x=۱۲\xrightarrow{a=۱+\frac{x}{۲}}a=۷$$

$$\Rightarrow g\left(f^{-۱}(۲)\right)=g(a)=g(۷)=۱۱$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۷۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۰۹-

$$(۳,۱)\in f^{-۱} \Rightarrow (۱,۳)\in f \Rightarrow f(۱)=a+\log_۳(b+۱)=۳$$

$$(۵,۱۳)\in f^{-۱} \Rightarrow (۱۳,۵)\in f \Rightarrow f(۱۳)=a+\log_۳(۱۳b+۱)=۵$$

طرفین دو معادلهٔ بالا را از هم کم می‌کنیم، داریم:

$$a+\log_۳(۱۳b+۱)-a-\log_۳(b+۱)=۵-۳$$

$$\Rightarrow \log_۳\left(\frac{۱۳b+۱}{b+۱}\right)=۲ \Rightarrow \frac{۱۳b+۱}{b+۱}=۹$$

$$\Rightarrow ۱۳b+۱=۹b+۹ \Rightarrow b=۲$$

با جای‌گذاری $b=۲$ در معادلهٔ اول (یا دوم)، مقدار a را حساب می‌کنیم:

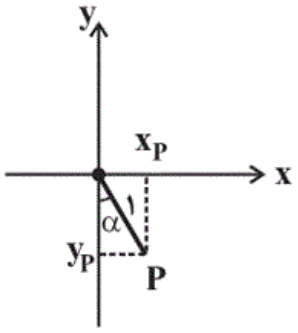
$$a+\log_۳(b+۱)=a+\log_۳ ۳=a+۱=۳ \Rightarrow a=۲$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۰- (سعید علم‌پور)



$$x_P = \sin\alpha \ , - y_P = \cos\alpha = \frac{۲}{۳}$$

دقت کنید که α یک زاویهٔ حاده است، پس تمام نسبت‌های مثلثاتی آن باید مثبت باشد.

$$\xrightarrow{x_P^۲+y_P^۲=۱} x_P^۲ = \frac{۵}{۹} \Rightarrow x_P = \sin\alpha = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۲\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۴\sqrt{۵}}{۹}$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۲\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ - ۱ = \frac{۸}{۹} - ۱ = \frac{-۱}{۹}$$

$$\Rightarrow \sin ۴\alpha = ۲\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha = ۲\left(\frac{۴\sqrt{۵}}{۹}\right)\left(\frac{-۱}{۹}\right) = -\frac{۸\sqrt{۵}}{۸۱}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۱- (علی شهرابی)

$$\sin x\sin ۳x = -\cos x\cos ۳x - \frac{۳}{۸}$$

$$\Rightarrow \sin x\sin ۳x + \cos x\cos ۳x = \cos(۳x - x) = \cos ۲x$$

$$= ۲\cos^۲ x - ۱ = -\frac{۳}{۸} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۵}{۱۶}$$

$$۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱۶}{۵} \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۱۱}{۵} = ۲/۲$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

$$\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\cos x}$$

$$=\frac{1}{2(-1)(1)}=\frac{-1}{2}$$

دقت کنید که اگر x در همسایگی چپ 2π باشد، $\frac{x}{2}$ در همسایگی چپ π و در نتیجه در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم خواهد بود، بنابراین $\sin\frac{x}{2}$ مقداری مثبت دارد.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

$$\lim_{x\to ۲} g(x) = g(۲) = ۱ \qquad (*)$$

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{\sqrt{x+۲}-۲}{۲a|x-۲|}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{\sqrt{x+۲}-۲}{-۲a(x-۲)} \times \frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{x-۲}{-۲a(x-۲)\left(\sqrt{x+۲}+۲\right)} = \frac{۱}{-۸a}$$

$$\lim_{x\to ۲^+} g(x) = \lim_{x\to ۲^+} [-x+۳] - b = [۱^-] - b = -b$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۱}{-۸a} = -b = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۱}{۸} \Rightarrow a+b = -\frac{۹}{۸} \\ b = -۱ \end{cases}$$

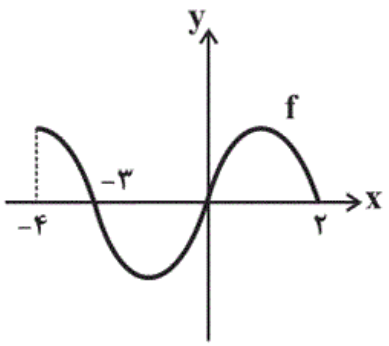
(حسابان ۱- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۴- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

نمودار $y=f(x)$، با انتقال نمودار $y=f(x-۲)$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ به‌دست می‌آید.



حال با جدول تعیین علامت زیر داریم:

	-۴		-۳		۰		۲
x		$-$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$g(x)=xf(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

$$D_g : xf(x)\geq ۰ \Rightarrow D_g=[-۳,۲]$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۵- (یاسین سپهر)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-۱$ و $x+۲$ به‌ترتیب برابر $f(۱)$ و $f(-۲)$ می‌باشد:

$$f(۱)=a-۲\ ,\ f(-۲)=۲a+۱$$

از طرفی تابع $y=f(x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین داریم:

$$-۲<۱ \Rightarrow f(-۲)<f(۱)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۶- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$\tan ۳x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos x(۱ + \tan x)}{\cos x(۱ - \tan x)} = \frac{۱ + \tan x}{۱ - \tan x}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{۴} + x\right)$$

$$\Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۴} + x \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$$

$$\xrightarrow[k=۰,۱]{x\in[۰,\pi]} x = \frac{\pi}{۸}\ ,\ x = \frac{۵\pi}{۸}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{۶\pi}{۸} = \frac{۳\pi}{۴}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ✓۲ ۳ ۴

۱۱۷- (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^۲}{x^۲} = ۱$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x^۲ - ۱} = ۱ + \frac{۲}{x^۲ - ۱}$$

یعنی اگر $x \to +\infty$، تابع f با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ و در نتیجه تابع g با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ میل می‌کند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} (fog)(x) = \lim_{x\to +\infty} f(g(x)) = \lim_{t\to ۱^-} f(t) = -\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵ و ۵۹ تا ۶۶)

✓۱ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۸- (علی شهرابی)

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2)-f(2+h)}{h}=-f'_-(2)$$

$$-f'_-(2)=-\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{x^2-4}{\cos\pi x}[x-3]-0}{x-2}$$

$$=-\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{(x-2)(x+2)}{\cos\pi x}[2^- -3]}{x-2}=-\left(\frac{4}{\cos 2\pi}(-2)\right)=8$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۴ تا ۸۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۹- (عرفان صادقی)

$\tan\theta$ را که همان شیب خط مماس بر نمودار تابع در $x=\sqrt{2}$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\theta=f'(x)=3x^2-2\xrightarrow{x=\sqrt{2}}\tan\theta=4$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=17$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۰ تا ۹۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۲۰- (مجتبی صادقی)

واضح است که تابع f خطی است و اگر $x \geq ۳$ باشد، تابع g نیز خطی خواهد بود.

$$f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$x \geq ۳ : g(x) = -۲x + ۱۲$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{-\frac{۱}{۲}x + ۲}{(-۲x + ۱۲)^۲} = -\frac{۱}{۸}\left(\frac{x-۴}{(x-۶)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow h'(x) = -\frac{۱}{۸}\left(\frac{(x-۶)^۲ - ۲(x-۴)(x-۶)}{(x-۶)^۴}\right)$$

$$\Rightarrow h'(۴) = -\frac{۱}{۸}\left(\frac{۴-۰}{۱۶}\right) = -\frac{۱}{۳۲}$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۹۰ تا ۹۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۱- (امیرهوشنگ خمسه)

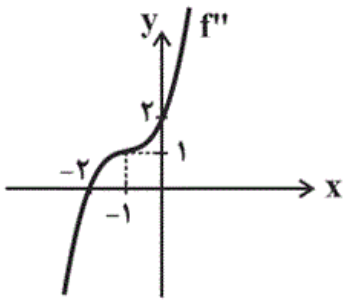
$$۲۰f(x) = x^۵ + ۵x^۴ + ۱۰x^۳ + ۲۰x^۲ + ۲۰x + ۴$$

$$\Rightarrow ۲۰f'(x) = ۵x^۴ + ۲۰x^۳ + ۳۰x^۲ + ۴۰x + ۲۰$$

$$\Rightarrow ۲۰f''(x) = ۲۰x^۳ + ۶۰x^۲ + ۶۰x + ۴۰ = ۲۰\left(x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۲\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = (x+۱)^۳ + ۱$$

مطابق شکل، نمودار f'' از ربع چهارم نمی‌گذرد.



(حسابان ۲- مشتق؛ صفحهٔ ۹۸)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

ارتفاع استوانه را h در نظر می‌گیریم. مطابق شکل داریم:

$$\overset{\Delta}{OAB}: r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow r^2 + \frac{h^2}{4} = 16 \Rightarrow r^2 = 16 - \frac{h^2}{4} \quad (1)$$

$$V = \pi r^2 \times h \xrightarrow{(1)} V_{(h)} = \pi \times h \times \left(16 - \frac{h^2}{4}\right) = \frac{-\pi h^3}{4} + 16\pi h$$

$$\Rightarrow V'_{(h)} = \frac{-3\pi h^2}{4} + 16\pi$$

$$V'_{(h)} = 0 \Rightarrow \frac{-3\pi h^2}{4} + 16\pi = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}h^2 = 16 \xrightarrow{h>0} h = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{(1)} r^2 = 16 - \frac{h^2}{4} = 16 - \frac{64}{12} = \frac{128}{12} = \frac{32}{3} \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: مشابه مثال صفحهٔ ۱۱۹)

۱ ✓۲ ۳ ۴

۱۲۳- (علی شهرابی)

با توجه به نمودار f''، این تابع یک صفر منفی (مثلاً α) دارد. جدول f'' به‌صورت زیر است:

x		α	
f''	$+$	۰	$-$
f	تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین

فقط در نمودار گزینهٔ «۲»، ویژگی‌های جدول بالا رعایت شده است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۰)

۱ ✓۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

-۱۲۴ (سعید علم‌پور)

$$y' = \frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{۲\sqrt{\cos x}} = \frac{\cos x\sqrt{\cos x} - \sin x\sqrt{\sin x}}{۲\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۰$$

بنابراین داریم:

x		$\frac{\pi}{۴}$	
y'	$+$	۰	$-$
y	↗	max	↘

پس نمودار حاصل در همسایگی $x = \frac{\pi}{۴}$ شبیه گزینهٔ «۳» خواهد بود.

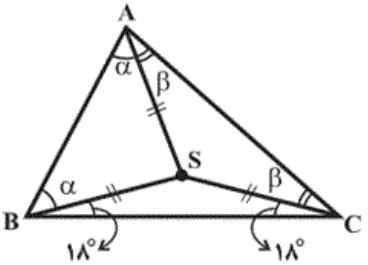
توجه داریم که به ازای $\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲}$، $\sin x > \cos x$ و به ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۴}$، $\sin x < \cos x$ است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۲۵- (رضا عباسی اصل)



نقطهٔ S، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC است، پس از هر سه رأس آن به یک فاصله است و سه مثلث SAB، SAC و SBC متساوی‌الساقین هستند، در مثلث ABC داریم:

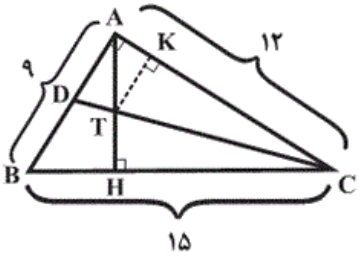
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow (\alpha+\beta)+(\alpha+۱۸^\circ)+(\beta+۱۸^\circ)=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)+۳۶^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{A}+۳۶^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۷۲^\circ$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۶- (حسین حاجیلو)



با توجه به تساوی $۱۵^۲=۱۲^۲+۹^۲$، این مثلث قائم‌الزاویه است. با توجه به شکل، طول پاره‌خط TK مورد نظر است که با طول TH برابر است، پس طول TH را حساب می‌کنیم:

$$AB.AC=AH.BC \Rightarrow AH=\frac{۹\times ۱۲}{۱۵}=۷/۲$$

$$AC^۲=CH.BC \Rightarrow CH=\frac{۱۲\times ۱۲}{۱۵}=۹/۶$$

$$\overset{\Delta}{ACH} \xrightarrow{\text{نیمساز CT}} \frac{CH}{AC}=\frac{TH}{AT} \Rightarrow \frac{CH}{AC+CH}=\frac{TH}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{۹/۶}{۲۱/۶}=\frac{TH}{۷/۲} \Rightarrow TH=۳/۲$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

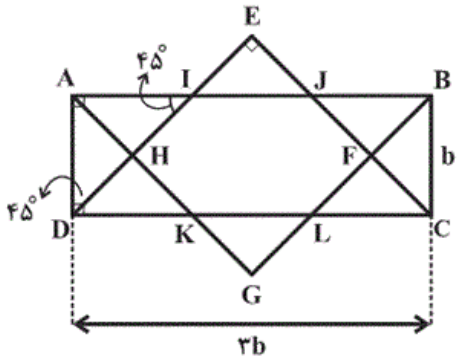
۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

-۱۲۷

مثلث ADI قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس:

$$ID = \sqrt{۲}AD = \sqrt{۲}b$$



شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، یک مربع است، پس $AH \perp DE$ و در نتیجه AH ارتفاع نظیر ضلع ID در مثلث ADI است. AH علاوه بر ارتفاع، میانهٔ وارد بر ID هم هست و داریم:

$$IH = \frac{۱}{۲}ID = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b$$

از آنجا که $IH = HK = JF = FL$، پس طول قسمتی از محیط چهارضلعی $EFGH$ که داخل مستطیل قرار می‌گیرد، برابر است با: $۴IH = ۲\sqrt{۲}b$

از طرفی طول ضلع مربع $EFGH$ برابر است با: $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۳b - b) = \sqrt{۲}b$

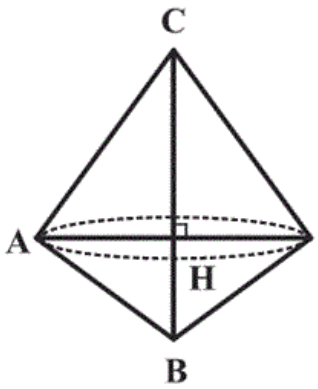
پس $\frac{۲\sqrt{۲}b}{۴\sqrt{۲}b} = \frac{۱}{۲}$ محیط مربع، داخل مستطیل قرار می‌گیرد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

-۱۲۸ (محمد خندان)



مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول وتر BC، دو مخروط که از قاعده به هم چسبیده‌اند، حاصل می‌شود.

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۹ = BH \times ۵ \Rightarrow BH = ۱/۸$$

$$AC^{۲} = CH \times BC \Rightarrow ۱۶ = CH \times ۵ \Rightarrow CH = ۳/۲$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۵ = ۳ \times ۴ \Rightarrow AH = ۲/۴$$

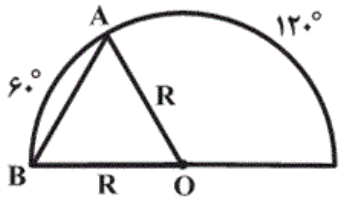
بنابراین طول ارتفاع‌های دو مخروط برابر ۱/۸ و ۳/۲ و شعاع قاعدهٔ دو مخروط برابر ۲/۴ است.

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲ و تجسم فضایی: صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

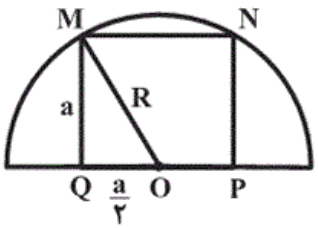
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۲۹- (حسین حاجیلو)



مطابق شکل، OAB کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در نیم‌دایره‌ای به شعاع R است که طول ضلع آن برابر با شعاع نیم‌دایره است.

از طرفی $MNPQ$ مربع محاط در نیم‌دایره است، با توجه به شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{OMQ} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OM^۲ = OQ^۲ + MQ^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ = \frac{a^۲}{۴} + a^۲ \Rightarrow a^۲ = \frac{۴}{۵}R^۲$$

پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OAB}}}{S_{MNPQ}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^۲}{a^۲} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^۲}{\frac{۴}{۵}R^۲} = \frac{۵}{۱۶}\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۰- (حسین حاجیلو)

طول مماس مشترک داخلی: $L = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲}$

$$۳ = \sqrt{۵^۲ - (R+R')^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹ = ۲۵ - (R+R)^۲$$

$$\Rightarrow (R+R')^۲ = ۱۶ \Rightarrow R+R' = ۴$$

دو دایره متخارج هستند و در نتیجه داریم:

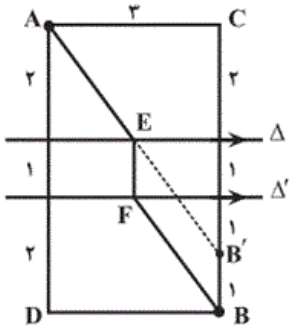
کمترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایره $= d - (R+R') = ۱$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۱- (حسین حاجیلو)



نقطهٔ B را به اندازهٔ فاصلهٔ بین Δ و Δ' روی BC به بالا منتقل می‌کنیم تا نقطهٔ B' به‌دست آید. کوتاه‌ترین مسیر مورد نظر، مسیر $AEFB$ است که طول آن برابر با $AB' + B'B$ است.

$$\overset{\Delta}{ACB'} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AB' = ۵ \xrightarrow{BB'=۱} AB' + BB' = ۶$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحهٔ ۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۲- (حسین حاجیلو)

ابتدا طول ارتفاع وارد بر ضلع متوسط را حساب می‌کنیم.

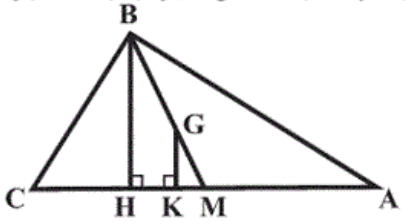
$$a = ۲ , b = ۳ , c = ۴$$

$$۲P = ۲ + ۳ + ۴ = ۹ \Rightarrow P = \frac{۹}{۲}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{۹}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۱}{۲}} = \frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$h_b = \frac{۲S}{b} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۲} \qquad (*)$$

با توجه به شکل زیر، با به‌کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث BHM، داریم:



$$\frac{GK}{BH} = \frac{GM}{BM} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow GK = \frac{۱}{۳}BH$$

$$\xrightarrow{(*)} GK = \frac{۱}{۳}\left(\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۱۵}}{۶}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۳- (امیرحسین ابومحبوب)

$$|A| = k(-k+۲) - ۱ = -k^۲ + ۲k - ۱ = -(k-۱)^۲$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{-(k-۱)^۲}\begin{bmatrix} -k+۲ & -۱ \\ -۱ & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-۱} \text{ مجموع درایه‌های } = \frac{-۱}{(k-۱)^۲}\underbrace{(-k+۲-۱-۱+k)}_{۰} = ۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۳۴- (رضا عباسی اصل)

اگر یک دستگاه معادلات خطی بیش از یک دسته جواب داشته باشد به معنای آن است که بی‌شمار جواب دارد. دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'x=c' \end{cases}$ زمانی بی‌شمار جواب دارد که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد.

داریم: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m}{۳}=\frac{۲}{m+۵} \Rightarrow m(m+۵)=۶$

$\Rightarrow m^۲+۵m-۶=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{cases} m=۱ \\ m=-۶ \end{cases}$

اکنون شرط $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ را برای مقادیر m بررسی می‌کنیم. داریم:

$m=۱ \Rightarrow \frac{۲}{۶} \neq \frac{۳}{۲}$

$m=-۶ \Rightarrow \frac{۲}{-۱}=\frac{-۴}{۲}$

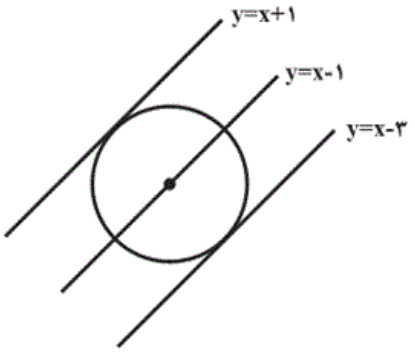
پس تنها به ازای $m=-۶$، دستگاه بیش از یک دسته جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

-۱۳۵ (اسحاق اسفندیار)



اگر خطوط موازی $y = x + ۱$ و $y = x - ۳$ بر دایره مماس باشند، آنگاه شعاع دایره برابر است با نصف فاصلهٔ این دو خط موازی، یعنی داریم:

$$۲R = \frac{|۱ - (-۳)|}{\sqrt{۱ + ۱}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow R = \sqrt{۲}$$

از طرفی خطوط $y = x - ۱$ و $x + y + ۳ = ۰$ قطرهای دایره‌اند، پس مرکز دایره محل تلاقی این دو خط یعنی نقطهٔ $O(-۱,-۲)$ است و معادلهٔ آن به‌صورت $(x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲$ می‌باشد.

$$(x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲ \xrightarrow{x=۰} (y+۲)^۲ = ۱ \Rightarrow y + ۲ = \pm ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -۱ \\ y = -۳ \end{cases}$$

$$(x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=۰} (x+۱)^۲ = -۲$$ جواب ندارد

بنابراین نقاط تلاقی این دایره و محورهای مختصات، دو نقطهٔ $A(۰,-۱)$ و $B(۰,-۳)$ هستند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۳۶- (یاسین سپهر)

$$y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰ \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۸(x+۱)$$

$$-۴a = -۸ \Rightarrow a = ۲$$

رأس سهمی برابر $A(h,k) = (-۱,۱)$ می‌باشد، پس مختصات کانون سهمی $F(-a+h,k) = (-۳,۱)$ است. بنابراین مرکز دایره $(-۳,۱)$ می‌باشد. از طرفی مرکز و شعاع دایرهٔ $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۵$ به‌ترتیب $O(۱,-۱)$ و $\sqrt{۵}$ است. حال فاصلهٔ بین مراکز این دایره‌ها را پیدا می‌کنیم.

$$OF = \sqrt{(۱+۳)^۲ + (-۱-۱)^۲} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

از طرفی مجموع شعاع‌های این دایره‌ها برابر $۲\sqrt{۵}$ است. پس دو دایره بر هم مماس خارج هستند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶ و ۵۰ تا ۵۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۷- (رضا عباسی‌اصل)

طول قطر دایره برابر طول قطر بزرگ بیضی است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OF'M$ داریم:

$$OM^۲ = OF'^۲ + MF'^۲ \Rightarrow a^۲ = c^۲ + MF'^۲$$

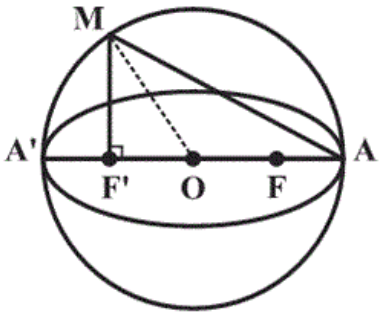
$$\Rightarrow MF'^۲ = a^۲ - c^۲ = b^۲$$

$$۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{c}{۵} \Rightarrow c = ۳$$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶$$

$$AF' = OA + OF' = ۵ + ۳ = ۸$$



در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AF'M$ داریم:

$$AM^۲ = AF'^۲ + MF'^۲ = ۶۴ + ۱۶ = ۸۰ \Rightarrow AM = ۴\sqrt{۵}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۵۷)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۳۸- (رضا عباسی اصل)

با توجه به شکل داده شده داریم:

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}-\left|\overrightarrow{BC}\right|^{۲}$$

$$=\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|\cos ۴۵^\circ-\left|\overrightarrow{BC}\right|^{۲}=۱۷\times ۵\sqrt{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}-۱۷^{۲}=-۲۰۴$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۹- (محمد خندان)

می‌دانیم بردار $\vec{a}\times\vec{c}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود است، بنابراین داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^{۲}+\vec{a}.\vec{b}=۰\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|^{۲}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=-\left|\vec{a}\right|^{۲}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{-۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۰- (حمیدرضا امیری)

چون گزارهٔ $p\Rightarrow q$ نادرست است، پس p درست و q نادرست است و چون گزارهٔ $r\sim$ درست است، پس r نادرست می‌باشد. داریم:

گزینهٔ «۱»: $(\sim q\Leftrightarrow r)\Leftrightarrow p\equiv(T\Leftrightarrow F)\Leftrightarrow T\equiv F\Leftrightarrow T\equiv F$

گزینهٔ «۲»: $(p\vee q)\Rightarrow r\equiv(T\vee F)\Rightarrow F\equiv T\Rightarrow F\equiv F$

گزینهٔ «۳»: $(p\wedge q)\Rightarrow r\equiv(T\wedge F)\Rightarrow F\equiv F\Rightarrow F\equiv T$

گزینهٔ «۴»: $(q\Rightarrow p)\Leftrightarrow r\equiv(F\Rightarrow T)\Leftrightarrow F\equiv T\Leftrightarrow F\equiv F$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۴۱- (مرتضی فهیم‌علوی)

مجموعهٔ B شامل دو عضو ۱ و ۲ هست که هر دو به A تعلق دارند، پس $B \subseteq A$ ولی مجموعهٔ C شامل تنها یک عضو به صورت $\{۱,۲\}$ می‌باشد، پس $B \not\subseteq C$. از طرفی مجموعهٔ A دارای عضوی به صورت $\{۱,۲\}$ است، بنابراین $B \in A$.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۲- (امیرحسین ابومحبوب)

$$A \cup B = \{a,b,c\} \Rightarrow A' \cap B' = (A \cup B)' = \{d,e\}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow ۳P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\big(P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e)\big)}_{۱} + ۲P(a) = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲P(a) = \frac{۴}{۳} - ۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow P(a) = \frac{۱}{۶}$$

$$P(\{d,e\}) = P(\{a,d,e\}) - P(a) = \frac{۳}{۵} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱۳}{۳۰}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۴۳- (سیرامیر ستوده)

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}\Rightarrow P(A'\cap B')=\frac{۲۶}{۶۳}\times\frac{۶۳}{۱۰۰}=\frac{۲۶}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=۱-P(A'\cap B')=۱-\frac{۲۶}{۱۰۰}=\frac{۷۴}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{۴۸}{۱۰۰}+\frac{۳۷}{۱۰۰}-\frac{۷۴}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱۱}{۱۰۰}}{\frac{۳۷}{۱۰۰}}=\frac{۱۱}{۳۷}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۴- (امیرحسین ابومحبوب)

پیشامد آن که داروی ساخته شده روی حداقل یک نفر جواب منفی داشته باشد، متمم آن است که داروی ساخته شده روی هر ۴ نفر جواب مثبت داده باشد. اگر پیشامد مورد نظر سؤال را A بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A')=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۸۱}{۲۵۶}$$

$$\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۸۱}{۲۵۶}=\frac{۱۷۵}{۲۵۶}$$

(آمار و احتمال- احتمال: مشابه تمرین ۱۱ صفحهٔ ۷۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۵- (مرتضی خوییم‌علوی)

اگر میانگین داده‌های $x_1,x_2,...,x_n$، برابر $\bar{x}$ باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{matrix}\\-۲\end{matrix}\begin{cases}۲a\bar{x}+b=۸۰\\a\bar{x}+b=۳۰\end{cases}\Rightarrow -b=۲۰\Rightarrow b=-۲۰$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۴۶- (امیرحسین ابومحبوب)

تعداد داده‌ها برابر ۱۵ و در نتیجه عددی فرد است، پس دادهٔ هشتم میانهٔ داده‌هاست و داده‌های چهارم و دوازدهم به‌ترتیب چارک اول و چارک سوم هستند. بنابراین داده‌های داخل و روی جعبه عبارت‌اند از:

$$۹,۱۱,۱۲,۱۵,۱۷,۱۸,۲۰,۲۲,۲۴$$

تعداد داده‌های داخل و روی جعبه برابر ۹ است، پس دادهٔ پنجم میانهٔ داده‌هاست و میانگین داده‌های دوم و سوم برابر چارک اول و میانگین داده‌های هفتم و هشتم برابر چارک سوم این داده‌ها می‌باشد. داریم:

$$Q_۱ = \frac{۱۱+۱۲}{۲} = ۱۱/۵ \quad و \quad Q_۳ = \frac{۲۰+۲۲}{۲} = ۲۱$$

$$IQR = Q_۳ - Q_۱ = ۲۱ - ۱۱/۵ = ۹/۵$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۶، ۹۷ و ۹۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

اگر پیشامدهای برابری

میانگین نمونه و جامعه در نمونه‌های دو عضوی و سه عضوی این جامعه را

به‌ترتیب با A و B نمایش دهیم، داریم: $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۱۵}}{\frac{۲}{۲۰}} = \frac{۲۰}{۳۰} = \frac{۲}{۳}$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۸- (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

$$\left.\begin{array}{l} a \in [b]_۶ \Rightarrow a \overset{۶}{\equiv} b \\ b \in [-a]_۶ \Rightarrow b \overset{۶}{\equiv} -a \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{۶}{\equiv} -a \Rightarrow ۲a \overset{۶}{\equiv} ۰ \xrightarrow[(۲,۶)=۲]{\div ۲} a \overset{۳}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow a = ۳k \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (۱)$$

$$b \overset{۶}{\equiv} a \xrightarrow{۳|۶} b \overset{۳}{\equiv} a \xrightarrow{(۱)} b \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow b = ۳k' (k' \in \mathbb{Z}) \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ab = ۹kk'$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ab بر ۹، برابر صفر است.

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲ و ۱۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۴۹- (مرتضی فهیم‌علوی)

$$\overline{۱۳ab۹} \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+a+b+۹ \overset{۹}{\equiv} a+b+۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۹}{\equiv} -b-۱۳$$

با توجه به این‌که a یک رقم است، تنها حالت ممکن برای آن که به ازای مقداری از b، دو مقدار متفاوت برای a وجود داشته باشد، آن است که $a \overset{۹}{\equiv} ۰$ باشد. در این‌صورت a می‌تواند مقادیر ۰ و ۹ را بپذیرد. داریم:

$$a \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow -b-۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow b \overset{۹}{\equiv} -۱۳ \overset{۹}{\equiv} -۱۳+۲\times۹ \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow b=۵$$

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۵۰- (مرتضی فهیم‌علوی)

$$۷x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۷ \Rightarrow ۷x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۰ \xrightarrow[(۷,۱۱)=۱]{\div ۷} x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow x=۱۱k+۱۰ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$۷(۱۱k+۱۰)-۱۱y=۳۷ \Rightarrow ۷۷k+۷۰-۳۷=۱۱y \Rightarrow y=۷k+۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۱k+۱۰+۷k+۳=۱۸k+۱۳ \overset{۱۸}{\equiv} ۱۳ \\ x-y=۱۱k+۱۰-۷k-۳=۴k+۷ \overset{۴}{\equiv} ۷ \overset{۴}{\equiv} ۳ \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۱- (امیرحسین ابومحبوب)

مجموع درجات رئوس هر گراف، دو برابر تعداد یال‌های آن است. از طرفی مجموع یال‌های یک گراف و مکمل آن، برابر تعداد یال‌های گراف کامل هم مرتبهٔ آن است. در نتیجه داریم:

$$q_G+q_{\bar{G}}=\frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۷+q_{\bar{G}}=\frac{۷\times۶}{۲} \Rightarrow q_{\bar{G}}=۱۴$$

بنابراین مجموع درجات رئوس گراف $\bar{G}$، برابر $۲\times۱۴=۲۸$ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۴۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۵۲- (امیرحسین ابومحبوب)

در گزینهٔ «۱»، هر یک از مجموعه‌های $\{b,e\}$، $\{b,d\}$ و $\{c,e\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم هستند.

در گزینهٔ «۳»: هر یک از مجموعه‌های $\{a,b\}$، $\{d,f\}$ و $\{c,e\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم هستند.

در گزینهٔ «۴»: هر یک از مجموعه‌های $\{b,g\}$ و $\{d,e\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم هستند.

ولی در گزینهٔ «۲»، مجموعهٔ $\{a,d\}$ تنها مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۳- (حمیدرضا امیری)

کافی است تعداد اعداد چهاررقمی فرد را از کل اعداد چهاررقمی که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ ساخته می‌شود، کم کنیم. داریم:

$$\text{تعداد کل چهاررقمی‌ها} = 4\times4\times3\times2 = 96$$

$$\text{تعداد چهاررقمی‌های فرد} = 3\times3\times2\times\underset{\text{ارقام ۱ یا ۳}}{\underset{\downarrow}{2}} = 36$$

بنابراین تعداد اعداد چهاررقمی زوج با ارقام داده شده برابر است با:

$$96-36=60$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۵۴- (امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به این که $۲x_۲$ و ۲۰، اعدادی زوج هستند، پس $x_۱ + x_۳$ نیز باید عددی زوج باشد. بنابراین $x_۱$ و $x_۳$ یا هر دو زوج و یا هر دو فرد هستند و در نتیجه داریم:

حالت اول: $x_۱ = ۲k_۱ \ , \ x_۳ = ۲k_۳$

$$۲k_۱ + ۲x_۲ + ۲k_۳ = ۲۰ \Rightarrow k_۱ + x_۲ + k_۳ = ۱۰$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۱۰-۱}{۳-۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

حالت دوم: $x_۱ = ۲k_۱ - ۱ \ , \ x_۳ = ۲k_۳ - ۱$

$$۲k_۱ + ۲x_۲ + ۲k_۳ = ۲۲ \Rightarrow k_۱ + x_۲ + k_۳ = ۱۱$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۱۱-۱}{۳-۱} = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$$

در نتیجه تعداد جواب‌های طبیعی معادله برابر است با: $۳۶ + ۴۵ = ۸۱$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۵۵- (امیرحسین ابومحبوب)

تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $f = \{(۱,□),(۲,□),(۳,□),(۴,d)\}$

چون تعداد اعضای A و B برابر یکدیگر است، پس هر تابع پوشا از A به B، لزوماً یک‌به‌یک نیز می‌باشد. با توجه به وجود زوج مرتب $(۴,d)$ در این تابع، کافی است تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ به $\{a,b,c\}$ را به‌دست آورده و توابعی که شامل زوج مرتب $(۳,b)$ هستند را از آنها کم کنیم. تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی برابر $۳! = ۶$ است. توابعی که شامل زوج مرتب $(۳,b)$ هستند، عبارت‌اند از:

$$f_۱ = \{(۱,a),(۲,c),(۳,b)\}$$

$$f_۲ = \{(۲,a),(۱,c),(۳,b)\}$$

پس به تعداد $۶ - ۲ = ۴$ تابع پوشا از A به B می‌توان تعریف کرد که شامل $(۴,d)$ و فاقد $(۳,b)$ باشد.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۸۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir