سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

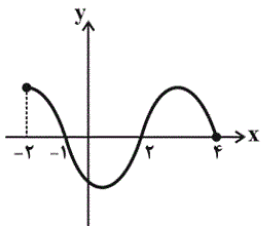
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضیات. - ۵۵ سوال -

۱۰۱- اگر $0 < a < 1$ و $a^2 + \frac{4}{a^2} = 6$ باشد، مقدار عبارت $a^3 - \frac{8}{a^3}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$
۲) $8\sqrt{2}$
۳) $-8\sqrt{2}$
۴) $-4\sqrt{2}$

۱۰۲- اگر نمودار تابع $y = f(x-2)$ به‌صورت روبه‌رو باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $[-3,2]$
۲) $[2,4]$
۳) $[-2,3]$
۴) $[0,1] \cup [4,6]$

۱۰۳- وارون تابع $f(x) = a + \log_4(bx+1)$ از نقاط $A(3,1)$ و $B(5,13)$ عبور می‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

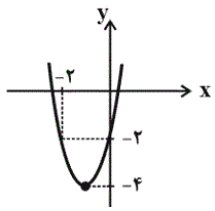
۱۰۴- در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت، مجموع دو جملهٔ اول ۷ و مجموع ۶ جملهٔ اول ۹۱ است. مجموع ۴ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۲۸
۲) ۳۲
۳) ۳۵
۴) ۴۹

۱۰۵- تابع اکیداً صعودی $y = f(x)$ مفروض است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به‌ترتیب $a-2$ و $2a+1$ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱
۲) -۲
۳) -۳
۴) -۴

۱۰۶- نمودار مقابل مربوط به سهمی $y = f(x)$ است. مجموع مربعات جواب‌های معادلهٔ $f(x) = 0$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۱۰۷- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ و $g(x)=\sin^{-۱}(\ln x)$ باشد، دامنهٔ تابع $f^۲+g$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۰۸- اگر $f(x)=x^۲+kx$، $g(x)=\frac{|x|}{x}-۲$ و برد تابع fog فقط شامل یک عضو باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۹- اگر $\sin x\sin ۳x=-\left(\cos x\cos ۳x+\frac{۳}{۸}\right)$ باشد، مقدار $\tan^۲ x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۲ ۳) ۲/۴ ۴) ۲/۶

۱۱۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\tan ۳x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۱۱- حاصل $\sin(۳\tan^{-۱}(-۲\sqrt{۲}))$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲۳}{۲۷}$ ۲) $\frac{-۱۰\sqrt{۲}}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

۱۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲\pi^-}\frac{\sqrt{۲-۲\cos x}}{\sin ۲x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۱۳- تابع $g(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{۲a|x-۲|} & ;\ x<۲\\ ۱ & ;\ x=۲\\ [-x+۳]-b & ;\ x>۲\end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته است. حاصل $a+b$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

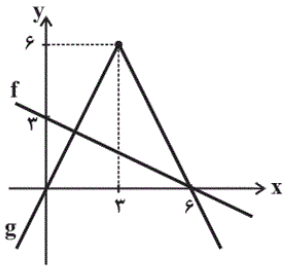
۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۹}{۸}$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir
www.kanoon.ir

۱۱۴- اگر $f(x)=\frac{x^۲-۴}{\cos \pi x}[x-۳]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۸ ۴) -۸

۱۱۵- با توجه به نمودار دو تابع f و g، مشتق تابع $h(x)=\frac{f(x)-۱}{(g(x))^۲}$ در $x=۴$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۳۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۶}$

۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۱۱۶- دنبالهٔ $\{\frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}+\sqrt{n^۲+۲}}\}$ چگونه است؟

۱) صعودی و کران‌دار است. ۲) نزولی و کران‌دار است.

۳) غیریکنوا و کران‌دار است. ۴) صعودی و بی‌کران است.

۱۱۷- اگر $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{f(x)}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۱۸- در رابطهٔ ضمنی $۲x^۲+۳xy+y^۲=۱۵$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۱۱}{۷}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۸}{۵}$ ۴) $-\frac{۷}{۸}$

۱۱۹- اگر $g^{-۱}(x)=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ باشد، مقدار $g''\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

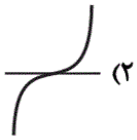
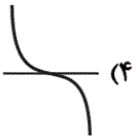
۱۲۰- استوانه‌ای به شعاع r، درون یک کره به شعاع ۴ محاط شده‌است. به ازای کدام مقدار r، حجم استوانه بیش‌ترین مقدار را دارد؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۱۲۱- اگر $\int_{۰}^{x} f(t)dt = \ln(۱+x^{۲})$ باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ عطف آن با طول مثبت، کدام است؟

۱) $-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) صفر ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

۱۲۲- نمودار تابع $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ در همسایگی نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$ به کدام صورت است؟

۱) ۲)  ۳) ۴) 

۱۲۳- در تابع $f(x) = |۲x-۳|$، مقدار $L_{۲۵}$ (مجموع پایین) در بازهٔ $[۰,۱]$ کدام است؟

۱) ۲/۰۴ ۲) ۲ ۳) ۱/۹۶ ۴) ۱/۸۸

۱۲۴- حاصل $\int_{-۱}^{۱} \cos^{-۱}x dx$ کدام است؟

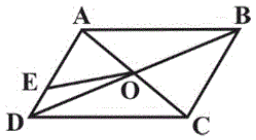
۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\pi-۱$ ۴) $\pi+۱$

۱۲۵- عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC از مثلث ABC در نقطهٔ S داخل این مثلث متقاطع‌اند. اگر $\widehat{SBC} = ۱۸^{\circ}$ باشد، آنگاه زاویهٔ BAC چند درجه است؟

۱) ۷۲ ۲) ۷۵ ۳) ۷۸ ۴) ۸۱

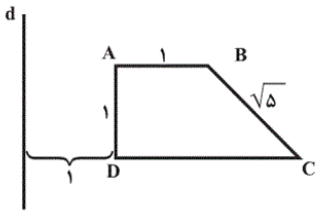
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۲۶- در متوازی‌الاضلاع شکل زیر، اگر $ED = \frac{۱}{۳}AD$ باشد، آنگاه مساحت مثلث OED چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



۱) $\frac{۱}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۱۰}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۲۷- ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ و خط d موازی با ساق قائم آن مطابق شکل در صفحه مفروض‌اند، ذوزنقه را حول خط d دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل چند واحد مکعب است؟



۱) ۸π
۲) $\frac{۲۵}{۳}\pi$
۳) $\frac{۲۶}{۳}\pi$
۴) ۹π

۱۲۸- در مثلثی به طول اضلاع ۹، ۱۲ و ۱۵، نیمساز زاویهٔ داخلی روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع، ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع را در نقطهٔ T قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ T از ضلع متوسط کدام است؟

۱) ۳
۲) ۳/۲
۳) ۳/۴
۴) ۳/۶

۱۲۹- طول یک مستطیل سه برابر عرض آن است. چه نسبتی از محیط چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل، داخل مستطیل قرار می‌گیرد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۰- فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره ۵ سانتی‌متر است. اگر طول مماس مشترک داخلی این دو دایره برابر ۳ سانتی‌متر باشد، کم‌ترین فاصلهٔ بین نقاط واقع بر این دو دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱
۲) ۱/۲۵
۳) ۰/۵
۴) ۰/۷۵

۱۳۱- بر اثر بازتاب نسبت به خط $L : by - ۳x + a = ۰$، خط $L_۱ : ۲y - ۳x - ۲ = ۰$ به خط $L_۲ : ۲y - ۳x + ۸ = ۰$ تصویر می‌شود. اگر خط L را تحت انتقال $T(x,y) = (x + ۳, y - ۱)$ تصویر کنیم، عرض از مبدأ خط تصویر کدام است؟

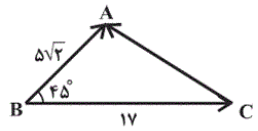
۱) ۱۴
۲) -۱۴
۳) -۷
۴) ۷

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۲- دو خط D و D' که در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند، موازی صفحهٔ P و هر دو به یک فاصله از این صفحه هستند. دو خط D و D' نسبت به هم کدام وضع را نمی‌توانند داشته باشند؟

۱) متقاطع ۲) موازی ۳) متنافر ۴) عمود بر هم

۱۳۳- در شکل مقابل، حاصل $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ کدام است؟



۱) ۱۶۰- ۲) ۱۹۰-

۳) ۲۰۰- ۴) ۲۰۴-

۱۳۴- اگر $|\mathbf{a}|=۲$، $|\mathbf{b}|=۴$ و $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ باشد، زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ کدام است؟

۱) ۱۳۵° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۱۲۰°

۱۳۵- نقطه‌ای با عرض مثبت روی خط به معادلات $x-۱=\frac{y+۱}{۲}=۳-z$، به فاصلهٔ ۳ واحد ازمبدأ مختصات واقع است. مجموع مختصات این نقطه کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

۱۳۶- دایره‌ای بر خطوط $y=x+۱$ و $y=x-۳$ مماس است. اگر خط $x+y+۳=۰$ بر دایره عمود باشد، این دایره محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۳۷- سهمی $y^۲-۲y+۸x+۹=۰$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع $\sqrt{۵}$ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره با دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۵$ چه وضعیتی دارد؟

۱) مماس خارج ۲) مماس داخل ۳) متقاطع ۴) هم مرکز

۱۳۸- اگر $\begin{vmatrix} x & ۱ & ۳ \\ y & -۱ & ۴ \\ z & ۳ & ۲ \end{vmatrix}=k$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} x-۲ & ۱ & ۳ \\ y-۱ & -۱ & ۴ \\ z & ۳ & ۲ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $k-۳۰$ ۲) $k+۳۰$ ۳) $k+۲۱$ ۴) $k-۲۱$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۳۹- اگر $A=\begin{bmatrix} k & ۱ \\ ۱ & -k+۲ \end{bmatrix}$ ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) بستگی به مقدار k دارد.

۱۴۰- دستگاه معادلات $\begin{cases} x-y+z=۱ \\ mx+۲z=\sqrt{۲} \\ x+my+۲z=۱ \end{cases}$ مفروض است. کدام گزینه درست نیست؟

۱) به ازای $m=۲$، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

۲) به ازای $m=\sqrt{۲}$، دستگاه جواب ندارد.

۳) به ازای $m=-\sqrt{۲}$، دستگاه جواب ندارد.

۴) به ازای $m=-۲$، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

۱۴۱- اگر میانگین داده‌های $۲ax_۱+b, ۲ax_۲+b, ..., ۲ax_n+b$ برابر ۸۰ و میانگین داده‌های $ax_۱+b, ax_۲+b, ..., ax_n+b$ برابر ۳۰ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲۰- ۲) ۱۰- ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۱۴۲- داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر، اعداد طبیعی دو رقمی هستند. اگر این داده‌ها را با نمودار جعبه‌ای نشان دهیم، میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

ساقه	برگ
۱	۳ ۶ ۹
۲	۰ ۱ ۲ ۵ ۵ ۸
۳	۱ ۵ ۶

۱) ۲۳/۵ ۲) ۲۴/۲۵

۳) ۱۸/۵ ۴) ۲۲

۱۴۳- حداقل چند عدد از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\cdots,۱۵\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم تفاضل حداقل دو عدد از میان اعداد انتخاب شده برابر ۳ است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۱۴۴- اگر $A=\{\{۱,۲\},۱,۲\}$، $B=\{۱,۲\}$ و $C=\{\{۱,۲\}\}$ باشد، آنگاه کدام دسته از روابط زیر همگی صحیح هستند؟

۱) $B\subseteq A$ و $B\in A$ و $B\subseteq C$ ۲) $B\subseteq A$ و $B\in A$ و $B\not\subseteq C$

۳) $B\subseteq A$ و $B\notin A$ و $B\not\subseteq C$ ۴) $B\not\subseteq A$ و $B\in A$ و $B\not\subseteq C$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۴۵- در کدام یک از روابط هم‌ارزی زیر که همگی روی R^2 تعریف شده‌اند، کلاس هم‌ارزی $[(0,0)]$ تک عضوی است؟

۱) $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$

۲) $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+b=c+d$

۳) $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^2+d^2=b^2+c^2$

۴) $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$

۱۴۶- رابطهٔ $xRy \Leftrightarrow |x-y|<2$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی چه تعداد از خواص بازتابی، تقارنی و تعدی را دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۷- اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی، $A=\{a,b\}$، $B=\{a,c\}$، $C=\{a,d,e\}$ پیشامدهایی از این فضای نمونه‌ای و $P(A)=\frac{1}{3}$، $P(B)=\frac{2}{5}$ و $P(C)=\frac{3}{5}$ باشد، آنگاه $P(A' \cap B')$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{30}$ ۲) $\frac{4}{15}$ ۳) $\frac{11}{30}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۴۸- دو عدد حقیقی از بازهٔ $[0,2]$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی نسبت این دو عدد از $\frac{1}{2}$ بیش‌تر و از $\frac{2}{3}$ کم‌تر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۴۹- درختی از مرتبهٔ ۷، دقیقاً دارای ۳ رأس از درجهٔ یک است. اگر A ماتریس مجاورت این درخت باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی A^2 کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۱۵۰- اگر $a \in [b]_9$ و $b \in [-a]_9$ باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ab بر ۹ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۷

۱۵۱- به ازای کدام مقدار b، دو عدد متمایز به‌صورت $\overline{13ab9}$ وجود دارد که هر کدام مضرب ۹ باشند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۲- اگر x و y دو عدد صحیح باشند که در معادلهٔ $7x-11y=37$ صدق کنند، کدام رابطهٔ هم‌نهشتی همواره صحیح است؟

۱) $x-y \overset{18}{\equiv} 11$ ۲) $x+y \overset{18}{\equiv} 13$ ۳) $x-y \overset{4}{\equiv} 1$ ۴) $x+y \overset{4}{\equiv} 3$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۵۳- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد چهاررقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۱۵۴- چند تابع پوشا از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعهٔ $B=\{a,b,c,d\}$ می‌توان تعریف کرد به‌گونه‌ای که شامل زوج مرتب $(۴,d)$ بوده ولی شامل زوج مرتب $(۳,b)$ نباشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۵۵- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S، اگر $P(A)=\frac{۱۲}{۲۵}$، $P(B)=\frac{۳۷}{۱۰۰}$ و $P(A'|B')=\frac{۲۶}{۶۳}$ باشد، حاصل $P(A|B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۷}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۳۷}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۷}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۷}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

-۱۰۱ (یاسر ارشدی)

$$a^۲+\frac{۴}{a^۲}=\left(a-\frac{۲}{a}\right)^۲+۴=۶\Rightarrow\left(a-\frac{۲}{a}\right)^۲=۲\Rightarrow\left|a-\frac{۲}{a}\right|=\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{۰<a<۱}-\left(a-\frac{۲}{a}\right)=\sqrt{۲}\Rightarrow a-\frac{۲}{a}=-\sqrt{۲}$$

بنابراین طبق اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای داریم:

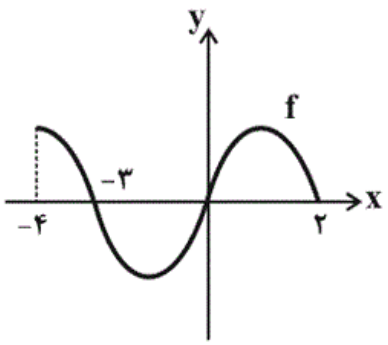
$$a^۳-\frac{۸}{a^۳}=\left(a-\frac{۲}{a}\right)\left(a^۲+\frac{۴}{a^۲}+۲\right)=-\sqrt{۲}(۶+۲)=-۸\sqrt{۲}$$

(ریاضیات ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۰۲ (میلاد سجادی‌لاریجانی)

نمودار $y=f(x)$، با انتقال نمودار $y=f(x-۲)$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ به‌دست می‌آید.



حال با جدول تعیین علامت زیر داریم:

	-۴		-۳		۰		۲
x		$-$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$g(x)=xf(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

$$D_g: xf(x)\geq ۰\Rightarrow D_g=[-۳,۲]$$

(ریاضیات ۲- توابع خاص- نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۳- (علی شهرابی)

$$(۳,۱)\in f^{-۱} \Rightarrow (۱,۳)\in f \Rightarrow f(۱)=a+\log_۳(b+۱)=۳$$

$$(۵,۱۳)\in f^{-۱} \Rightarrow (۱۳,۵)\in f \Rightarrow f(۱۳)=a+\log_۳(۱۳b+۱)=۵$$

طرفین دو معادلهٔ بالا را از هم کم می‌کنیم، داریم:

$$a+\log_۳(۱۳b+۱)-a-\log_۳(b+۱)=۵-۳$$

$$\Rightarrow \log_۳\left(\frac{۱۳b+۱}{b+۱}\right)=۲ \Rightarrow \frac{۱۳b+۱}{b+۱}=۹$$

$$\Rightarrow ۱۳b+۱=۹b+۹ \Rightarrow b=۲$$

با جای‌گذاری $b=۲$ در معادلهٔ اول (یا دوم)، مقدار a را حساب می‌کنیم:

$$a+\log_۳(b+۱)=a+\log_۳ ۳=a+۱=۳ \Rightarrow a=۲$$

(ریاضیات ۲- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۴- (طاهر دادستانی)

$$S_۲=a_۱+a_۲=a_۱(۱+q)=۷ \qquad (۱)$$

$$S_۶=a_۱\frac{q^۶-۱}{q-۱}=۹۱ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{S_۶}{S_۲}=\frac{q^۶-۱}{q^۲-۱}=q^۴+q^۲+۱=۱۳$$

$$\Rightarrow q^۴+q^۲-۱۲=(q^۲+۴)(q^۲-۳)=۰ \Rightarrow q^۲=۳$$

$$\xrightarrow{q>۰} q=\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{(۱)} a_۱=\frac{S_۲}{۱+q}=\frac{۷}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۷\left(\sqrt{۳}-۱\right)}{۲}$$

$$\Rightarrow S_۴=a_۱\frac{q^۴-۱}{q-۱}=\frac{۷\left(\sqrt{۳}-۱\right)}{۲}\times\frac{۳^۲-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۵۶}{۲}=۲۸$$

(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۰۵- (یاسین سپهر)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به‌ترتیب برابر $f(1)$ و $f(-2)$ می‌باشد:

$$f(1)=a-2\ ,\ f(-2)=2a+1$$

از طرفی تابع $y=f(x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین داریم:

$$-2<1\Rightarrow f(-2)<f(1)$$

$$\Rightarrow 2a+1<a-2\Rightarrow a<-3$$

با توجه به گزینه‌ها a می‌تواند ۴- باشد.

(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۶- (حمید علیزاده)

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم:

$$f(0)=-2\Rightarrow c=-2$$

با توجه به اینکه $f(-2)=f(0)=-2$ است، طول رأس سهمی میانگین صفر و ۲- یعنی ۱- است.

$$\Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=-1\Rightarrow b=2a \quad (1)$$

$$f(-1)=a-b-2=-4\Rightarrow a-b=-2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a=2,b=4\Rightarrow f(x)=2x^2+4x-2$$

اگر جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را α و β در نظر بگیریم، داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-2,P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=(-2)^2-2(-1)=6$$

(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
oon.ir

۱۰۷- (سیدعادل حسینی)

$$D_f : ۲x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_f = [۰,۲]$$

$$\Rightarrow D_{f^۲} = D_f = [۰,۲]$$

$$D_g : -۱ \leq \ln x \leq ۱ \Rightarrow D_g = \left[\frac{۱}{e}, e\right]$$

$$\Rightarrow D_{f^۲+g} = D_{f^۲} \cap D_g = \left[\frac{۱}{e}, ۲\right]$$

این بازه شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ می‌باشد.

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۸- (علی شهرابی)

$$g(x) = \frac{|x|}{x} - ۲ = \begin{cases} -۱ & ;x > ۰ \\ -۳ & ;x < ۰ \end{cases}$$

پس برد fog فقط شامل دو عضو $f(-۱)$ و $f(-۳)$ است. برای آن که برد fog فقط ۱ عضو داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$f(-۱) = f(-۳) \Rightarrow ۱ - k = ۹ - ۳k \Rightarrow k = ۴$$

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۰۹- (علی شهرابی)

$$\sin x \sin ۳x = -\cos x \cos ۳x - \frac{۳}{۸}$$

$$\Rightarrow \sin x \sin ۳x + \cos x \cos ۳x = \cos(۳x - x) = \cos ۲x$$

$$= ۲\cos^۲ x - ۱ = -\frac{۳}{۸} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۵}{۱۶}$$

$$۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱۶}{۵} \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۱۱}{۵} = ۲/۲$$

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۰- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$\tan ۳x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos x(۱ + \tan x)}{\cos x(۱ - \tan x)} = \frac{۱ + \tan x}{۱ - \tan x}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{۴} + x\right)$$

$$\Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۴} + x \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$$

$$\xrightarrow[k=۰,۱]{x \in [۰,\pi]} x = \frac{\pi}{۸}, \; x = \frac{۵\pi}{۸}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{۶\pi}{۸} = \frac{۳\pi}{۴}$$

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۱- (حمیدرضا طالبیان)

$$\tan^{-1}(-2\sqrt{2})=\alpha \Rightarrow \tan\alpha=-2\sqrt{2} \Rightarrow \cot\alpha=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

از طرفی: $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{8}{9} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه چهارم}} \sin\alpha=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin(3\tan^{-1}(-2\sqrt{2}))=\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$$

$$=(3-4\times\frac{8}{9})(\frac{-2\sqrt{2}}{3})=\frac{-5}{9}(\frac{-2\sqrt{2}}{3})=\frac{10\sqrt{2}}{27}$$

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۲- (علی شهرابی)

$$\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\cos x}$$

$$=\frac{1}{2(-1)(1)}=\frac{-1}{2}$$

دقت کنید که اگر x در همسایگی چپ 2π باشد، $\frac{x}{2}$ در همسایگی چپ π و در نتیجه در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم خواهد بود، بنابراین $\sin\frac{x}{2}$ مقداری مثبت دارد.

(حسابان- حد و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۵۰ تا ۱۵۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
noon.ir

۱۱۳- (عرفان صادقی)

$$\lim_{x\to ۲} g(x) = g(۲) = ۱ \qquad (*)$$

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{\sqrt{x+۲}-۲}{۲a|x-۲|}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{\sqrt{x+۲}-۲}{-۲a(x-۲)} \times \frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{x-۲}{-۲a(x-۲)\left(\sqrt{x+۲}+۲\right)} = \frac{۱}{-۸a}$$

$$\lim_{x\to ۲^+} g(x) = \lim_{x\to ۲^+} [-x+۳] - b = [۱^-] - b = -b$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۱}{-۸a} = -b = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۱}{۸} \Rightarrow a+b = -\frac{۹}{۸} \\ b = -۱ \end{cases}$$

(حسابان- حد و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۴- (علی شهرابی)

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۲)-f(۲+h)}{h} = -f'_-(۲)$$

$$-f'_-(۲) = -\lim_{x\to ۲^-} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = -\lim_{x\to ۲^-} \frac{\frac{x^۲-۴}{\cos \pi x}[x-۳]-۰}{x-۲}$$

$$= -\lim_{x\to ۲^-} \frac{\frac{(x-۲)(x+۲)}{\cos \pi x}[۲^- - ۳]}{x-۲} = -\left(\frac{۴}{\cos ۲\pi}(-۲)\right) = ۸$$

(حسابان- مشتق توابع: صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۷۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۵-

واضح است که تابع f خطی است و اگر $x \geq ۳$ باشد، تابع g نیز خطی خواهد بود.

$$f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$$

$$x \geq ۳ : g(x) = -۲x + ۱۲$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{-\frac{۱}{۲}x + ۲}{(-۲x + ۱۲)^۲} = -\frac{۱}{۸}\left(\frac{x-۴}{(x-۶)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow h'(x) = -\frac{۱}{۸}\left(\frac{(x-۶)^۲ - ۲(x-۴)(x-۶)}{(x-۶)^۴}\right)$$

$$\Rightarrow h'(۴) = -\frac{۱}{۸}\left(\frac{۴-۰}{۱۶}\right) = -\frac{۱}{۳۲}$$

(حسابان- مشتق توابع: صفحه‌های ۱۷۰ تا ۱۷۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۶- (کاظم اجلالی)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}+\sqrt{n^۲+۲}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{۲n}=\frac{۱}{۲}$$

دنباله، همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است، پس کران‌دار است.

دنباله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$a_n=\frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}+\sqrt{n^۲+۲}}=\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^۲+۱}}{n}+\frac{\sqrt{n^۲+۲}}{n}}$$

$$a_n=\frac{۱}{\sqrt{\frac{n^۲+۱}{n^۲}}+\sqrt{\frac{n^۲+۲}{n^۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{n^۲}}+\sqrt{۱+\frac{۲}{n^۲}}}$$

واضح است که با افزایش n، مقدار مخرج کسر کاهش و مقدار جملات دنباله افزایش می‌یابد، پس دنباله صعودی است.

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۱۸ تا ۳۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۷- (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x\to۱^-}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۲}=۱$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت: $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}=۱+\frac{۲}{x^۲-۱}$

یعنی اگر $x\to+\infty$، تابع f با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ و در نتیجه تابع g با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ میل می‌کند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(g(x))=\lim_{t\to۱^-}f(t)=-\infty$$

(دیفرانسیل- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

$$۲x^۲ + ۳xy + y^۲ = ۱۵ \qquad (۱)$$

$$\xrightarrow[x\text{ به}]{\text{مشتق نسبت}} ۴x + ۳y + ۳xy' + ۲yy' = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{۴x+۳y}{۳x+۲y} = m$$

m، شیب خط مماس بر نمودار رابطهٔ y بر حسب x (یا همان $\frac{dy}{dx}$) است.

$$\Rightarrow y = -\frac{۳m+۴}{۲m+۳}x = kx \qquad (۲)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) داریم:

$$۲x^۲ + ۳x(kx) + (kx)^۲ = ۱۵ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱۵}{k^۲ + ۳k + ۲}$$

برای این‌که بتوانیم برای x جوابی پیدا کنیم، مخرج کسر فوق باید مثبت باشد. یعنی:

$$k^۲ + ۳k + ۲ > ۰ \Rightarrow k < -۲ \text{ یا } k > -۱$$

$$\xrightarrow{(۲)} \begin{cases} \frac{۳m+۴}{۲m+۳} > ۲ \Rightarrow \frac{m+۲}{۲m+۳} < ۰ \Rightarrow -۲ < m < -\frac{۳}{۲} \\ \frac{۳m+۴}{۲m+۳} < ۱ \Rightarrow \frac{m+۱}{۲m+۳} < ۰ \Rightarrow -\frac{۳}{۲} < m < -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in (-۲,-۱)$$

یعنی شیب خط مماس بر نمودار، نمی‌تواند خارج از این بازه قرار بگیرد، پس نمی‌تواند $-\frac{۷}{۸}$ باشد.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۱۹- (سیدعادل حسینی)

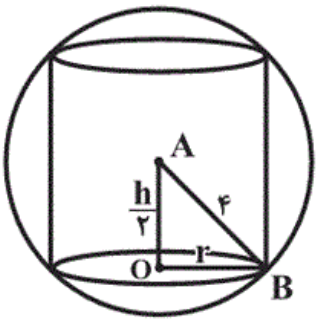
$$g^{-1}(x)=\cos 2x \Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}\cos^{-1}x : D_g=[-1,1]$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow g''(x)=\frac{-x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \Rightarrow g''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۰- (فرنود فارسی‌جانی)



ارتفاع استوانه را h در نظر می‌گیریم. مطابق شکل داریم:

$$\overset{\Delta}{OAB}: r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=4^2 \Rightarrow r^2+\frac{h^2}{4}=16 \Rightarrow r^2=16-\frac{h^2}{4} \quad (1)$$

$$V=\pi r^2\times h \xrightarrow{(1)} V_{(h)}=\pi\times h\times\left(16-\frac{h^2}{4}\right)=\frac{-\pi h^3}{4}+16\pi h$$

$$\Rightarrow V'_{(h)}=\frac{-3\pi h^2}{4}+16\pi$$

$$V'_{(h)}=0 \Rightarrow \frac{-3\pi h^2}{4}+16\pi=0 \Rightarrow \frac{3}{4}h^2=16 \xrightarrow{h>0} h=\frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{(1)} r^2=16-\frac{h^2}{4}=16-\frac{64}{12}=\frac{128}{12}=\frac{32}{3} \Rightarrow r=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

$$f(x)=\left(\ln\left(1+x^{2}\right)\right)'=\frac{2x}{1+x^{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2\left(1-x^{2}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{2}}\Rightarrow f''(x)=\frac{4x\left(x^{2}-3\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{3}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$$

با توجه به دامنهٔ f، باید $x=\sqrt{3}$ را به عنوان طول نقطهٔ عطف انتخاب کنیم.

$\Rightarrow$ شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ عطف : $m=f'\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ عطف : $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{4}\left(x-\sqrt{3}\right)$

$$\Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}}y_{0}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۳ و انتگرال: صفحهٔ ۲۴۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

x		$\frac{\pi}{4}$	
y'	+	۰	−
y	↗	max	↘

پس نمودار حاصل در همسایگی $x=\frac{\pi}{4}$ شبیه نمودار گزینهٔ «۳» خواهد بود.

توجه داریم که به ازای $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$، $\sin x>\cos x$ و به ازای $0<x<\frac{\pi}{4}$، $\sin x<\cos x$ است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۲۳- (سیدعادل حسینی)

بازهٔ $[۰,۱]$ را به n افراز منظم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x = \frac{۱}{n} , x_i = \frac{i}{n} ; i = ۰,...,n$$

در بازهٔ $[۰,۱]$، می‌توان ضابطهٔ تابع f را به صورت $f(x) = ۳ - ۲x$ نوشت؛ یعنی در این بازه تابع f اکیداً نزولی است. بنابراین برای مجموع پایین آن داریم:

$$L_n = \sum_{i=۱}^{n} \Delta x.f(x_i) = \sum_{i=۱}^{n} \left(\frac{۱}{n}\right)\left(۳ - \frac{۲i}{n}\right)$$

$$= \frac{۱}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n} ۳ - \frac{۲}{n}\sum_{i=۱}^{n} i\right) = \frac{۱}{n}\left(۳n - \frac{۲}{n}\frac{n(n+۱)}{۲}\right)$$

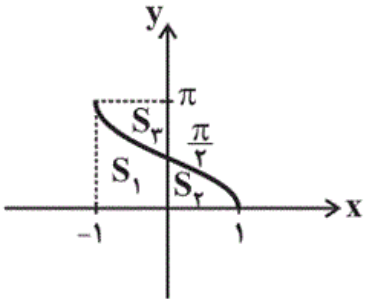
$$\Rightarrow L_n = \frac{۲n-۱}{n} \Rightarrow L_{۲۵} = \frac{۴۹}{۲۵} = ۱/۹۶$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۳۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۴- (طاهر دادستانی)

با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow \int_{-۱}^{۱} \cos^{-۱}x\,dx = S_۱ + S_۲$$

از طرفی می‌دانیم: $S_۲ = S_۳ = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos x\,dx = ۱$ است.

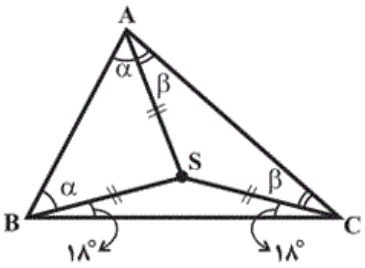
$$\Rightarrow \int_{-۱}^{۱} \cos^{-۱}x\,dx = S_۱ + S_۳ = \pi$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۳۵ تا ۲۴۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۲۵- (رضا عباسی اصل)



نقطهٔ S، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC است، پس از هر سه رأس آن به یک فاصله است و سه مثلث SAB، SAC و SBC متساوی‌الساقین هستند. در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow (\alpha+\beta)+(\alpha+۱۸^\circ)+(\beta+۱۸^\circ)=۱۸۰^\circ$$

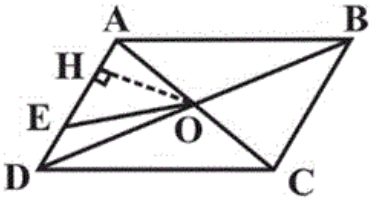
$$\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)+۳۶^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{A}+۳۶^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۷۲^\circ$$

(هندسه ۱- هندسه و استدلال: صفحه‌های ۱۱ و ۲۲)

(هندسه ۲- استدلال در هندسه: صفحهٔ ۳۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۶- (سیدعادل‌رضا مرتضوی)



از نقطهٔ O، عمود OH را بر AD رسم می‌کنیم و داریم:

$$S_{\Delta OED}=\frac{۱}{۲}\times OH\times ED \overset{ED=\frac{۱}{۳}AD}{=\!=\!=} \frac{۱}{۲}\times OH\times(\frac{۱}{۳}AD)$$

$$=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}\times OH\times AD)=\frac{۱}{۳}S_{\Delta OAD} \qquad (۱)$$

از طرفی قطرهای متوازی‌الاضلاع، آن را به ۴ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند، بنابراین $S_{\Delta OAD}=\frac{۱}{۴}S_{ABCD}$ است و داریم:

$$S_{\Delta OED}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABCD}$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیهٔ فیثاغورس: صفحه‌های ۴۲ تا ۵۲)

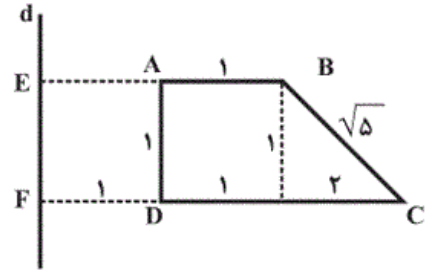
۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۲۷- (حسین حاجیلو)

توجه کنید که حجم مخروط ناقص به شعاع قاعده‌های R و R' و ارتفاع h برابر است با $\frac{۱}{۳}\pi\left(R^۲+R'^۲+RR'\right)h$.

با توجه به شکل، حجم شکل مورد نظر برابر است با حجم مخروط ناقص حاصل از دوران $EBCF$ حول d، منهای حجم استوانهٔ حاصل از دوران $AEFD$ حول d، پس داریم:



$$V_۱=\frac{۱}{۳}\pi\left(۲^۲+۴^۲+۲\times۴\right)\times۱=\frac{۲۸}{۳}\pi$$

$$V_۲=\pi\times۱^۲\times۱=\pi$$

$$\Rightarrow V_۱-V_۲=\frac{۲۸}{۳}\pi-\pi=\frac{۲۵}{۳}\pi$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

با توجه به تساوی $۱۵^۲=۹^۲+۱۲^۲$، این مثلث قائم‌الزاویه است، با توجه به شکل طول پاره‌خط TK مورد نظر است که با طول TH برابر است، پس طول TH را حساب می‌کنیم:

$$AB.AC=AH.BC\Rightarrow AH=\frac{۹\times۱۲}{۱۵}=۷/۲$$

$$AC^۲=CH.BC\Rightarrow CH=\frac{۱۲\times۱۲}{۱۵}=۹/۶$$

$$\overset{\Delta}{ACH}\xrightarrow{\text{نیمساز }CT}\frac{CH}{AC}=\frac{TH}{AT}\Rightarrow\frac{CH}{AC+CH}=\frac{TH}{AH}$$

$$\Rightarrow\frac{۹/۶}{۲۱/۶}=\frac{TH}{۷/۲}\Rightarrow TH=۳/۲$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیهٔ فیثاغورس: صفحهٔ ۶۵)

(هندسه ۲- استدلال در هندسه: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

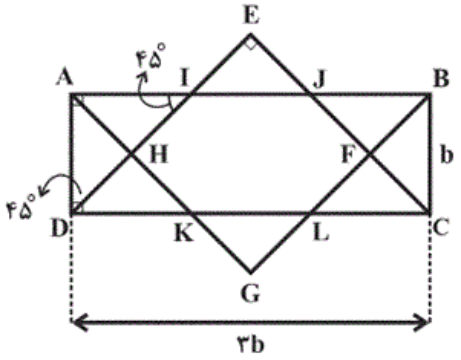
۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۲۹- (حسین حاجیلو)

مثلث ADI قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس:

$$ID = \sqrt{۲}AD = \sqrt{۲}b$$



شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، یک مربع است، پس $AH \perp DE$ و در نتیجه AH ارتفاع نظیر ضلع ID در مثلث ADI است. AH علاوه بر ارتفاع، میانهٔ وارد بر ID هم هست و داریم:

$$IH = \frac{۱}{۲}ID = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b$$

از آنجا که $IH = HK = JF = FL$، پس طول قسمتی از محیط چهارضلعی $EFGH$ که داخل مستطیل قرار می‌گیرد، برابر است با: $۴IH = ۲\sqrt{۲}b$

از طرفی طول ضلع مربع $EFGH$ برابر است با: $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۳b - b) = \sqrt{۲}b$

پس $\frac{۲\sqrt{۲}b}{۴\sqrt{۲}b} = \frac{۱}{۲}$ محیط مربع، داخل مستطیل قرار می‌گیرد.

(هندسه ۲- استدلال در هندسه: صفحه‌های ۱۱ و ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۰- (حسین حاجیلو)

طول مماس مشترک داخلی: $L = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$

$$\Rightarrow ۳ = \sqrt{۲۵ - (R + R')^۲} \Rightarrow ۹ = ۲۵ - (R + R')^۲$$

$$\Rightarrow (R + R')^۲ = ۱۶ \Rightarrow R + R' = ۴$$

کمترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایره $= d - (R + R') = ۱$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۳۱- (نوید مجیدی)

چون $L_2 \parallel L_1$، پس محور بازتاب (خط L) موازی L_1 و L_2 و به فاصلهٔ برابر از آن دو است. در نتیجه داریم:

$$L: by - 3x + a = 0 \Rightarrow b = 2, a = \frac{-2+8}{2} = 3$$

$$\Rightarrow L: 2y - 3x + 3 = 0$$

اکنون L را تحت انتقال T تصویر می‌کنیم:

$$T(x,y) = (x+3, y-1) = (X,Y) \Rightarrow \begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2y-3x+3=0} 2(Y+1) - 3(X-3) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2Y = 3X - 14 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = \frac{-14}{2} = -7$$

(هندسه ۲- تبدیل‌ها: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶ و ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۲- (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

مکان هندسی خط‌هایی که در یک طرف صفحهٔ P و به یک فاصله از این صفحه باشند، صفحه‌ای موازی با صفحهٔ P است. بنابراین، دو خط D و D' در یک صفحه قرار دارند و نمی‌توانند متنافر باشند.

(هندسه ۲- هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۳- (رضا عباسی‌اصل)

با توجه به شکل داده شده داریم:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|\cos 45^\circ - \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 17 \times 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 17^2 = -204$$

(هندسه تحلیلی- بردارها: صفحه‌های ۱۴ تا ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۳۴- (محمد خندان)

می‌دانیم بردار $a\times c$ بر بردار a عمود است، بنابراین داریم:

$$a+b=a\times c \Rightarrow a.(a+b)=a.(a\times c)$$

$$\Rightarrow |a|^{۲}+a.b=۰ \Rightarrow a.b=-|a|^{۲}$$

$$\Rightarrow |a||b|\cos\theta=-|a|^{۲} \Rightarrow \cos\theta=\frac{-|a|}{|b|}=\frac{-۲}{۴}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=۱۲۰^{\circ}$$

(هندسه تحلیلی- بردارها: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۸ و ۲۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۵- (فرهاد وفایی)

معادلهٔ خط را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$x-۱=\frac{y+۱}{۲}=۳-z \Rightarrow \begin{cases} x=t+۱ \\ y=۲t-۱ \\ z=۳-t \end{cases}$$

نقطهٔ $A(t+۱,۲t-۱,۳-t)$ روی این خط واقع است. فاصلهٔ آن تا مبدأ مختصات را حساب کرده و برابر ۳ قرار می‌دهیم.

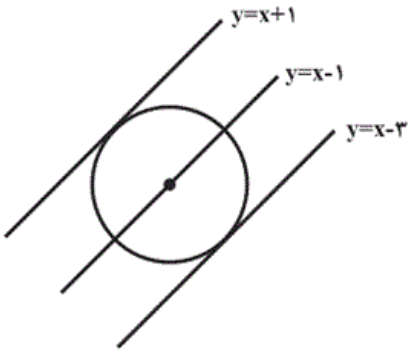
$$OA=\sqrt{(t+۱)^{۲}+(۲t-۱)^{۲}+(۳-t)^{۲}}=۳$$

$$\Rightarrow t^{۲}+۲t+۱+۴t^{۲}-۴t+۱+۹-۶t+t^{۲}=۹$$

$$\Rightarrow ۶t^{۲}-۸t+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \\ t=\frac{۱}{۳}(\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir



اگر خطوط موازی $y=x+1$ و $y=x-3$ بر دایره مماس باشند، آنگاه شعاع دایره برابر است با نصف فاصلهٔ این دو خط موازی، یعنی داریم:

$$2R=\frac{|1-(-3)|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}\Rightarrow R=\sqrt{2}$$

از طرفی خطوط $y=x-1$ و $x+y+3=0$ قطرهای دایره‌اند، پس مرکز دایره محل تلاقی این دو خط یعنی نقطهٔ $O(-1,-2)$ است و معادلهٔ آن به‌صورت $(x+1)^2+(y+2)^2=2$ می‌باشد.

$$(x+1)^2+(y+2)^2=2\xrightarrow{x=0}(y+2)^2=1\Rightarrow y+2=\pm1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=-1\\y=-3\end{cases}$$

$$(x+1)^2+(y+2)^2=2\xrightarrow{y=0}(x+1)^2=-2$$ جواب ندارد

بنابراین نقاط تلاقی این دایره و محورهای مختصات، دو نقطهٔ $A(0,-1)$ و $B(0,-3)$ هستند.

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
ww.kanoon.ir

۱۳۷- (یاسین سپهر)

$$y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰ \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۸(x+۱)$$

$$۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$$

رأس سهمی برابر $S(\alpha,\beta) = (-۱,۱)$ می‌باشد، پس مختصات کانون سهمی $F(\alpha + a,\beta) = (-۳,۱)$ است. بنابراین مرکز دایره $(-۳,۱)$ مـی‌باشـد. از طرفی مرکز و شعاع دایرهٔ $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۵$ به‌ترتیـب $O(۱,-۱)$ و $\sqrt{۵}$ است. حال فاصلهٔ بین مراکز این دایره‌ها را پیدا می‌کنیم.

$$OF = \sqrt{(۱+۳)^۲ + (-۱-۱)^۲} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

از طرفی مجموع شعاع‌های این دایره‌ها برابر $۲\sqrt{۵}$ است. پس دو دایره بر هم مماس خارج هستند.

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵ و ۶۴ تا ۷۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۸- (رضا عباسی‌اصل)

طبق ویژگی‌های دترمینان و با استفاده از دستور ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & x-۲ \\ ۴ & -۱ & y-۱ \\ ۲ & ۳ & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۱ & x \\ ۴ & -۱ & y \\ ۲ & ۳ & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= k + \left[(۰-۲-۲۴) - (۴-۹+۰)\right] = k - ۲۱$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷ و ۱۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۳۹- (امیرحسین ابومحبوب)

$$|A| = k(-k+۲) - ۱ = -k^۲ + ۲k - ۱ = -(k-۱)^۲$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{-(k-۱)^۲}\begin{bmatrix} -k+۲ & -۱ \\ -۱ & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-۱} \text{ مجموع درایه‌های } = \frac{-۱}{(k-۱)^۲}\underbrace{(-k+۲-۱-۱+k)}_{۰} = ۰$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۰- (مهرداد ملوندی)

شرط آن‌که دستگاه، جواب منحصر به فرد داشته باشد، آن است که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد، طبق دستور ساروس داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ m & ۰ & ۲ \\ ۱ & m & ۲ \end{vmatrix} = \left(۰ - ۲ + m^۲\right) - \left(۰ + ۲m - ۲m\right) = m^۲ - ۲$$

$$|A| \neq ۰ \Rightarrow m^۲ - ۲ \neq ۰ \Rightarrow m^۲ \neq ۲ \Rightarrow m \neq \pm\sqrt{۲}$$

پس گزینه‌های (۱) و (۴) عباراتی درست هستند.

مجهول y را از معادلهٔ اول برحسب x و z یافته و در دو معادلهٔ دیگر جای‌گذاری می‌کنیم تا به دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر برسیم:

$$\begin{cases} mx + ۲z = \sqrt{۲} \\ (m+۱)x + (m+۲)z = m+۱ \end{cases}$$

شرط این که دستگاه اخیر جواب نداشته باشد آن است که:

$$\frac{m}{m+۱} = \frac{۲}{m+۲} \neq \frac{\sqrt{۲}}{m+۱}$$

این شرط تنها به ازای $m = -\sqrt{۲}$ محقق می‌شود. پس گزینهٔ (۲) درست نیست.

توجه کنید که به ازای $m = \sqrt{۲}$، داریم: $\frac{m}{m+۱} = \frac{۲}{m+۲} = \frac{\sqrt{۲}}{m+۱}$، که در این صورت دستگاه بی‌شمار جواب خواهد داشت.

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۱- (مرتضی فهیم‌علوی)

اگر میانگین داده‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$، برابر $\bar{x}$ باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{matrix} \\ -۲ \end{matrix}\begin{cases} ۲a\bar{x} + b = ۸۰ \\ a\bar{x} + b = ۳۰ \end{cases} \Rightarrow -b = ۲۰ \Rightarrow b = -۲۰$$

(آمار و مدل‌سازی- شاخص‌های مرکزی؛ صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۲- (محمدرضا چکینی)

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱۳,۱۶,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲,۲۵,۲۵,۲۸,۳۱,۳۵,۳۶

چون تعداد داده‌ها ۱۲ است، پس میانه(چارک دوم)، برابر میانگین داده‌های ششم و هفتم است: $Q_۲ = \frac{۲۲+۲۵}{۲} = ۲۳/۵$.

چارک اول، برابر میانهٔ شش دادهٔ اول است، پس برابر است با میانگین داده‌های سوم و چهارم: $Q_۱ = \frac{۱۹+۲۰}{۲} = ۱۹/۵$.

چارک سوم، برابر میانهٔ شش دادهٔ دوم است، پس برابر است با میانگین داده‌های نهم و دهم: $Q_۳ = \frac{۲۸+۳۱}{۲} = ۲۹/۵$.

داده‌هایی که از چارک اول بزرگ‌تر و از چارک سوم کوچک‌تر هستند، داخل جعبه قرار می‌گیرند و میانگین آن‌ها برابر است با:

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۴۳- (مهرداد ملوندی)

براساس شرط مسئله، این مجموعه را به ۳ زیرمجموعه افراز می‌کنیم. دقت کنید در هر کدام از این زیرمجموعه‌ها، تفاضل هر دو عدد متوالی برابر ۳ است.

{۱,۴,۷,۱۰,۱۳}

{۲,۵,۸,۱۱,۱۴}

{۳,۶,۹,۱۲,۱۵}

اگر ۹ عددی که با خط تیره مشخص شده‌اند انتخاب شوند، آنگاه شرط مسئله برقرار نخواهد بود. چنانچه حداقل ۱۰ عدد به تصادف از مجموعهٔ مذکور انتخاب کنیم، با توجه به اصل لانه کبوتری، تفاضل حداقل دو تا از آنها برابر ۳ خواهد بود.

(جبر و احتمال- استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۴- (مرتضی فهیم‌علوی)

مجموعهٔ B شامل دو عضو ۱ و ۲ هست که هر دو به A تعلق دارند، پس $B \subseteq A$ ولی مجموعهٔ C شامل تنها یک عضو به صورت $\{۱,۲\}$ می‌باشد، پس $C \not\subseteq B$. از طرفی مجموعهٔ A دارای عضوی به صورت $\{۱,۲\}$ است، بنابراین $B \in A$.

(جبر و احتمال- مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۵- (امیرحسین ابومحبوب)

گزینهٔ (۱): $(x,y)R(۰,۰) \Rightarrow x+۰=y+۰ \Rightarrow y=x$

گزینهٔ(۲): $(x,y)R(۰,۰) \Rightarrow x+y=۰+۰ \Rightarrow y=-x$

گزینهٔ (۳): $(x,y)R(۰,۰) \Rightarrow x^۲+۰=y^۲+۰ \Rightarrow y=\pm x$

گزینهٔ (۴): $(x,y)R(۰,۰) \Rightarrow x^۲+y^۲=۰ \Rightarrow x=y=۰$

(جبر و احتمال- مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۶- (فرهاد وفایی)

$\forall x \in R : xRx \Leftrightarrow |x-x| < ۲ \Leftrightarrow ۰ < ۲$ خاصیت بازتابی دارد.

$\forall x,y \in R : xRy \Rightarrow |x-y| < ۲$

$\Rightarrow |y-x| < ۲ \Rightarrow yRx$ خاصیت تقارنی دارد.

رابطهٔ R خاصیت تعدی ندارد. به مثال نقض زیر توجه کنید:

$x=۱, y=۰, z=-۱$

$|x-y| < ۲ \Rightarrow xRy$

$|y-z| < ۲ \Rightarrow yRz$

$|x-z| \not< ۲ \Rightarrow x \not R z$

بنابراین رابطهٔ فوق، بازتابی و تقارنی است ولی تعدی نیست.

(جبر و احتمال- مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\Rightarrow \underbrace{\big(P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)\big)}_{1}+2P(a)=\frac{4}{3}$$

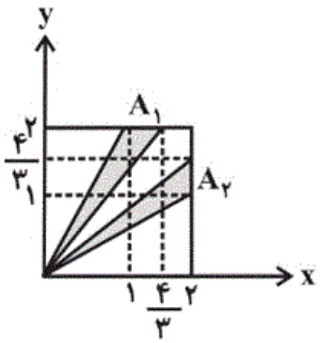
$$\Rightarrow 2P(a)=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}\Rightarrow P(a)=\frac{1}{6}$$

$$P(\{d,e\})=P(\{a,d,e\})-P(a)=\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{13}{30}$$

(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۴۸ (هومن نورائی)



فضای نمونه‌ای، مربعی به طول ضلع ۲ است که مساحت آن برابر ۴ می‌باشد. یکی از اعداد را x و دیگری را y در نظر می‌گیریم؛ پیشامد مطلوب را به ۲ بخش تقسیم می‌کنیم.

(ناحیهٔ A_1 را در شکل مشخص می‌کند.) $\frac{1}{2}<\frac{x}{y}<\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{3}{2}x<y<2x$

(ناحیهٔ A_2 را در شکل مشخص می‌کند.) $\frac{1}{2}<\frac{y}{x}<\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{1}{2}x<y<\frac{2}{3}x$

اگر مساحت ناحیه‌های A_1 و A_2 را به‌ترتیب با S_1 و S_2 نمایش دهیم، داریم:

$$a_A=S_1+S_2=2S_1=2\Big(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2\Big)=\frac{2}{3}$$

(طول قاعده: $\frac{1}{3}$، طول ارتفاع: 2)

$$\Rightarrow P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{2}{3}}{4}=\frac{1}{6}$$

(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۴۹- (امیرحسین ابومحبوب)

درخت مورد نظر قطعاً یک رأس از درجهٔ $\Delta = ۳$ دارد و بنابراین ۳ رأس باقی‌مانده از درجهٔ ۲ خواهند بود. درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲$ همان درجات رئوس گراف هستند که به صورت ۳,۲,۲,۲,۱,۱,۱ می‌باشند و بنابراین حاصل‌ضرب آنها برابر ۲۴ است.

تذکر: اگر درخت فاقد رأسی از درجهٔ بزرگ‌تر از ۲ باشد، آنگاه فقط دو رأس از درجهٔ یک خواهد داشت و در صورتی که رأسی با درجهٔ بزرگ‌تر از ۳ داشته و یا تعداد رأس‌های درجهٔ ۳ آن، بیش تر از یک باشد، آنگاه بیش‌تر از ۳ رأس درجهٔ یک خواهد داشت.

(ریاضیات گسسته- گراف: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۵۰- (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

$$\left.\begin{array}{l} a\in[b]_۶ \Rightarrow a\overset{۶}{\equiv}b \\ b\in[-a]_۶ \Rightarrow b\overset{۶}{\equiv}-a \end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{۶}{\equiv}-a \Rightarrow ۲a\overset{۶}{\equiv}۰ \xrightarrow[(۲,۶)=۲]{\div ۲} a\overset{۳}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow a=۳k \quad (k\in\mathbb{Z}) \qquad (۱)$$

$$b\overset{۶}{\equiv}a \xrightarrow{۳\mid ۶} b\overset{۳}{\equiv}a \xrightarrow{(۱)} b\overset{۳}{\equiv}۰ \Rightarrow b=۳k' \left(k'\in\mathbb{Z}\right) \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ab=۹kk'$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ab بر ۹، برابر صفر است.

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰ و ۴۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

a می‌تواند مقادیر ۰ و ۹ را بپذیرد. داریم:

$$a\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow -b-۱۳\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow b\overset{۹}{\equiv}-۱۳\overset{۹}{\equiv}-۱۳+۲\times ۹\overset{۹}{\equiv}۵ \Rightarrow b=۵$$

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۴ و ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۲- (مرتضی فهیم‌علوی)

$$۷x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۷ \Rightarrow ۷x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۰ \xrightarrow[(۷,۱۱)=۱]{\div ۷} x \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow x = ۱۱k + ۱۰ \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$۷(۱۱k + ۱۰) - ۱۱y = ۳۷ \Rightarrow ۷۷k + ۷۰ - ۳۷ = ۱۱y \Rightarrow y = ۷k + ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۱k + ۱۰ + ۷k + ۳ = ۱۸k + ۱۳ \overset{۱۸}{\equiv} ۱۳ \\ x - y = ۱۱k + ۱۰ - ۷k - ۳ = ۴k + ۷ \overset{۴}{\equiv} ۷ \overset{۴}{\equiv} ۳ \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۳- (حمیدرضا امیری)

کافی است تعداد اعداد چهاررقمی فرد را از کل اعداد چهاررقمی که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ ساخته می‌شود، کم کنیم. داریم:

تعداد کل چهاررقمی‌ها $= ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$

تعداد چهاررقمی‌های فرد $= ۳ \times ۳ \times ۲ \times \underset{\text{ارقام ۱ یا ۳}}{۲} = ۳۶$

بنابراین تعداد اعداد چهاررقمی زوج با ارقام داده شده برابر است با:

$۹۶ - ۳۶ = ۶۰$

(ریاضی ۲- ترکیبیات: صفحه‌های ۱۷۶ تا ۱۸۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۴- (امیرحسین ابومحبوب)

تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = \{(۱,□),(۲,□),(۳,□),(۴,d)\}$$

چون تعداد اعضای A و B برابر یکدیگر است، پس هر تابع پوشا از A به B، لزوماً یک‌به‌یک نیز می‌باشد. با توجه به وجود زوج مرتب $(۴,d)$ در این تابع، کافی است تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ به $\{a,b,c\}$ را به‌دست آورده و توابعی که شامل زوج مرتب $(۳,b)$ هستند را از آنها کم کنیم. تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی برابر $۳! = ۶$ است. توابعی که شامل زوج مرتب $(۳,b)$ هستند، عبارت‌اند از:

$$f_۱ = \{(۱,a),(۲,c),(۳,b)\}$$

$$f_۲ = \{(۲,a),(۱,c),(۳,b)\}$$

پس به تعداد $۶ - ۲ = ۴$ تابع پوشا از A به B می‌توان تعریف کرد که شامل $(۴,d)$ و فاقد $(۳,b)$ باشد.

(ریاضیات گسسته- مباحثی دیگر از ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir

۱۵۵- (سیرامیر ستوده)

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}\Rightarrow P(A'\cap B')=\frac{۲۶}{۶۳}\times\frac{۶۳}{۱۰۰}=\frac{۲۶}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=۱-P(A'\cap B')=۱-\frac{۲۶}{۱۰۰}=\frac{۷۴}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{۴۸}{۱۰۰}+\frac{۳۷}{۱۰۰}-\frac{۷۴}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱۱}{۱۰۰}}{\frac{۳۷}{۱۰۰}}=\frac{۱۱}{۳۷}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا
www.kanoon.ir