



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



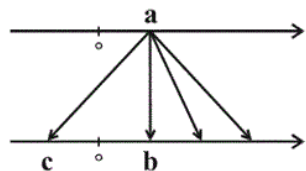
<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۱۰۱- در محورهای روبه‌رو، عدد حقیقی a به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. اگر b برابر



(۲) -0.016

(۴) -0.008

0.016 باشد، مقدار c کدام است؟

(۱) -0.004

(۳) -0.006

۱۰۲- در دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی a_n ، مجموع نه جمله اول برابر ۱۹۲ و مجموع بیست جمله اول برابر ۳۸۰ است. مقدار a_{15} کدام است؟

(۴) $\frac{199}{11}$

(۳) ۱۸

(۲) $\frac{188}{11}$

(۱) ۱۷

۱۰۳- اگر جواب‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ مربع جواب‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل $b + c$ کدام است؟

(۴) -۸

(۳) -۱۰

(۲) -۱۲

(۱) -۱۴

۱۰۴- نمودار تابع $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$ و خط $y = x - 2$ ، چند نقطه مشترک دارند؟

(۴) ۳

(۳) ۱

(۲) صفر

(۱) ۲

۱۰۵- فاصله نقطه A روی خط $y - x = 2$ از نیمساز ربع دوم و چهارم $3\sqrt{2}$ واحد است. مجموع طول و عرض نقطه A کدام می‌تواند باشد؟

(۴) ۸

(۳) ۲

(۲) ۴

(۱) ۶

۱۰۶- اگر بردهای دو تابع $f(x) = x^2 - 2x + a$ و $g(x) = |x - 1| - a$ یکسان باشد، مقدار a کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۰۷- دامنه تابع $y = \sqrt{(\sqrt{2})^{x^2 - x} - (2\sqrt{2})^{x-1}}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

(۴) بی‌شمار

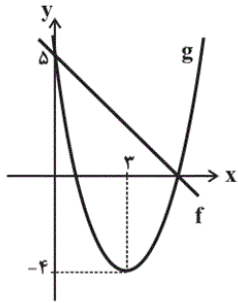
(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۱۰۸- نقطه $A(3, 2)$ روی نمودار تابع f قرار دارد. نقطه متناظر با A روی نمودار تابع $y = 3f(-2x + 1)$ کدام است؟

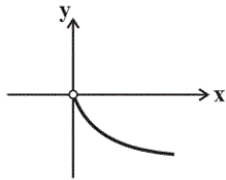
- (۱) $\left(-8, \frac{2}{3}\right)$ (۲) $(-8, 6)$ (۳) $(-1, 6)$ (۴) $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$



۱۰۹- نمودار سهمی g و تابع خطی f به صورت مقابل است. حاصل $g \circ f(7)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۱ (۳) ۲۳ (۴) ۳۲

۱۱۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} a - \sqrt{x+1} & ; x > 0 \\ a - x & ; x \leq 0 \end{cases}$ به صورت شکل زیر است. مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟



- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳

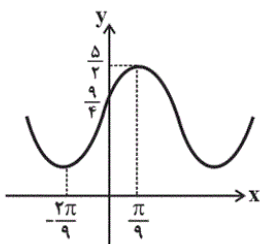
۱۱۱- ضابطه وارون تابع $f(x) = 2^{x+1} - 3$ به صورت $f^{-1}(x) = \log_r \left(\frac{x+a}{b} \right)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۲- رابطه‌های $\sin(2y - x) = \sin x$ و $\cos(y + x) + \sin x = 0$ به ازای هر مقدار دلخواه x برقرار است. y کدام می‌تواند باشد؟

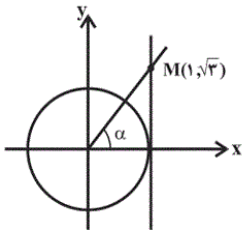
- (۱) π (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $-\frac{3\pi}{2}$

۱۱۳- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin\left(bx + \frac{\pi}{6}\right) + c$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(\pi)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{29}{12}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۱۱۴- با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مجموع جواب‌های معادله $4 \cos \alpha \sin x - 2 \sin \alpha = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



- (۱) π (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) 2π (۴) $\frac{7\pi}{6}$

۱۱۵- اگر تابع f در نقطه $x=0$ دارای حد باشد و داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2x}{x} f(x) \right) = 4$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{|x|} - f(x) \right)$ کدام

است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۵

۱۱۶- به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1-\sqrt{x})}{x^2-x} & ; x > 1 \\ 2ax+1 & ; x \leq 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته می‌باشد؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$

۱۱۷- مجانب‌های نمودار تابع هموگرافیک $f(x) = ax + \frac{x^2+1}{x-2}$ ، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کنند. فاصله مبدأ

مختصات از خط شامل نقاط A و B کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱۸- تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & ; x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & ; x > 1 \end{cases}$ مفروض است. اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ موجود باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۴) $-\frac{3}{4}$

۱۱۹- مشتق تابع $y = \frac{f(x)+x}{g(x)-1}$ در نقطه $x=2$ برابر ۲- است. اگر $g'(2)=0$ و $g(2)=2$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۸ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۲۰- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + kx^2$ در بازه $[5, 10]$ ، با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در انتهای بازه برابر است. k کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{25}$ (۲) $\frac{1}{75}$ (۳) $\frac{1}{100}$ (۴) $\frac{1}{150}$

۱۲۱- اگر $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & ; x \neq 1 \\ k & ; x = 1 \end{cases}$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ و ماکزیمم نسبی تابع $g \circ f$ برابر ۲ باشد، مقدار k کدام است؟

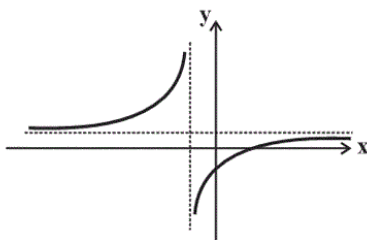
- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۲- روی کدام بازه نمودار تابع $f(x) = x^2|x-1|$ صعودی است و تقعر رو به پایین دارد؟

- (۱) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (۲) $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$

۱۲۳- از نقطه‌ای روی نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ خط مماسی بر آن رسم می‌کنیم، به‌طوری که این خط در نقطه تماس از نمودار عبور می‌کند. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{10}$



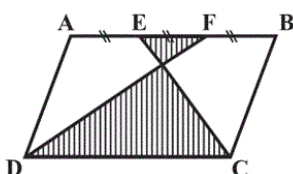
۱۲۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax - b - 2}{x^2 + bx + 4}$ به‌صورت شکل مقابل است. مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) -۱۱ (۴) ۱۱

۱۲۵- در مثلث ABC ، نقطه هم‌رسمی عمودمنصف‌ها روی ضلع BC قرار گرفته و مجموع فاصله‌های این نقطه از سه رأس مثلث، برابر ۱۵ است. اگر مجموع طول‌های دو ضلع کوچک‌تر این مثلث، $1/2$ برابر طول بزرگ‌ترین ضلع آن باشد، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۸ (۴) ۲۲

۱۲۶- در شکل زیر، اگر مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر ۱۹۲ و $AE = EF = FB$ باشد، مساحت قسمت هاشورزده کدام است؟



- (۱) ۶۰ (۲) ۷۶ (۳) ۷۲ (۴) ۸۰

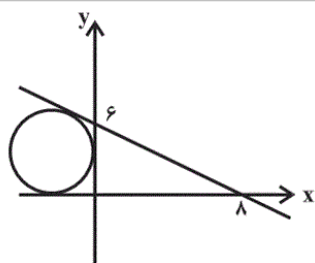
۱۲۷- در دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ ، قطر AC به طول $4\sqrt{3}$ با قاعده AB زاویه 30° می سازد. مساحت دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) $12\sqrt{3}$ (۴) $16\sqrt{3}$

۱۲۸- کدام گزینه در فضا نادرست است؟

- (۱) اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.
 (۲) اگر خطی یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.
 (۳) اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.
 (۴) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، لزوماً دیگری را نیز قطع می‌کند.

۱۲۹- در شکل مقابل، شعاع دایره کدام است؟



- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۴

۱۳۰- در مثلث ABC به طول اضلاع $AB=20$ ، $AC=19$ و $BC=7$ ، اگر دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC در نقطه D بر

این ضلع مماس باشد، آنگاه طول BD کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

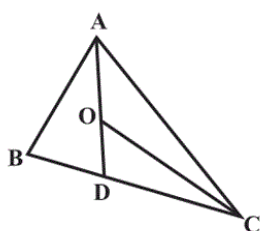
۱۳۱- مساحت سطح محصور بین یک مربع و تبدیل یافته آن تحت تجانس به مرکز یکی از رأس‌های مربع و نسبت $\frac{3}{4}$ ، برابر ۱۵ است.

مساحت مربع اولیه کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۳۲- در شکل زیر، AD و CO به ترتیب نیمسازهای زوایای داخلی A و C در مثلث ABC هستند. اگر $AB=9$ ، $AC=12$ و

$CD=4$ باشد، طول OD کدام است؟



- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) صفر (۴) -۱۰

۱۳۴- اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر از مرتبه ۲ و $3A \cdot A^{-1} = 6I$ باشد، آنگاه $|A|$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۱۳۵- پاره خط AB به طول ۸ واحد در صفحه مختصات به گونه‌ای است که همواره دو سر آن بر روی محورهای مختصات است.

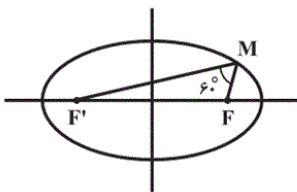
بیشترین فاصله نقطه $M(3, 4)$ از نقاط وسط پاره خط AB کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶

۱۳۶- طول وتری از دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ که موازی محور x ها بوده و از نقطه $A(1, -2)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۳۷- در شکل زیر، F و F' کانون‌های بیضی، $MF = 2$ و $MF' = 6$ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

۱۳۸- اگر طول تصویر قائم بردار $\vec{a} = (1, m-1, 1)$ روی بردار $\vec{b} = (m-1, 1, 0)$ برابر $\sqrt{3}$ باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۳۹- نقطه O محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع ABCD است. اگر $\vec{AO} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{BC} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ باشند، حاصل

$|\vec{AD} \times \vec{AB}|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲

۱۴۰- گزاره $p \Rightarrow (q \vee \sim r)$ هم‌ارز با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟ (T گزاره درست و F گزاره نادرست است).

- (۱) p (۲) T (۳) F (۴) $\sim p$

۱۴۱- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه دارای چند زیرمجموعه است به طوری که بزرگ‌ترین عضو آن، ۴ برابر کوچک‌ترین عضو آن باشد؟

- (۱) ۲۵۲ (۲) ۲۷۲ (۳) ۲۹۲ (۴) ۳۱۲

۱۴۲- اگر A، B و C سه مجموعه دلخواه و رابطه $(A \cap B)' \cap (A \cup B') \cap C = C$ بین آنها برقرار باشد، آنگاه کدام یک از روابط زیر همواره برقرار است؟

- (۱) $B \cap C = \emptyset$ (۲) $B \cap C' = \emptyset$ (۳) $B' \cap C = \emptyset$ (۴) $B' \cap C' = \emptyset$

۱۴۳- در ظرفی سه مهره سفید، سه مهره سیاه و سه مهره سبز وجود دارد و مهره‌های هر رنگ شماره‌های ۱، ۲ و ۳ دارند. اگر سه مهره از این ظرف خارج کنیم، احتمال آن که مجموع عددهای روی سه مهره حداقل ۵ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{20}{21}$ (۲) $\frac{37}{42}$ (۳) $\frac{9}{14}$ (۴) $\frac{11}{12}$

۱۴۴- دو ظرف داریم. در ظرف اول ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و در ظرف دوم، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد. مهره‌ای به تصادف از ظرف اول انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس به صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری دو مهره از ظرف دوم خارج می‌کنیم. احتمال این که دو مهره خارج شده از ظرف دوم هم‌رنگ بوده و رنگ آنها با مهره خارج شده از ظرف اول متفاوت باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{56}$ (۲) $\frac{5}{28}$ (۳) $\frac{3}{14}$ (۴) $\frac{1}{7}$

۱۴۵- یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عددی کوچک‌تر از ۴ رو شود، سه سکه و در غیر این صورت یک سکه پرتاب می‌کنیم. اگر در

این آزمایش تصادفی حداقل یک بار سکه رو آمده باشد، با کدام احتمال نتیجه پرتاب تاس عدد ۲ بوده است؟

- (۱) $\frac{7}{33}$ (۲) $\frac{5}{19}$ (۳) $\frac{6}{31}$ (۴) $\frac{4}{17}$

۱۴۶- ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر ۳ است. تمامی داده‌ها را دو برابر کرده و سپس میانگین داده‌های اولیه را از

تمامی آنها کم می‌کنیم. ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۳ (۳) $4/5$ (۴) ۶

۱۴۷- برای بررسی «میزان آلودگی خودروهای در حال تردد در شهر تهران» کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر اریب نیست؟

(۱) نمونه‌گیری از خودروهای موجود در یک تعمیرگاه

(۲) نمونه‌گیری از خودروهای عبوری از یکی از خیابانهای شهر

(۳) نمونه‌گیری از خودروهای تولیدی یکی از کارخانه‌های داخلی

(۴) نمونه‌گیری از خودروهایی که شماره سمت راست پلاک آنها عدد ۹ است (از طریق تماس تلفنی با مالک اتومبیل)

۱۴۸- به ازای کدام مقدار a ، دو عدد صحیح $3n+5$ و $11n+a$ همواره نسبت به هم اول هستند؟ ($n \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

۱۴۹- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b ، باقی‌مانده ۱۵ و خارج قسمت ۲۲ است. اگر a مضرب عدد ۷ باشد، مجموع ارقام

کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی a کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

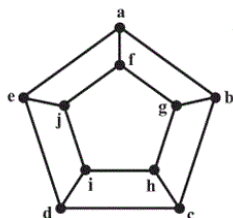
۱۵۰- باقی‌مانده تقسیم عدد $11^{50} - 13^{50}$ بر عدد ۲۲ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۵۱- اگر در گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۹، $\Delta = \delta + 1$ باشد، آنگاه δ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۵۲- گراف G مطابق شکل مقابل مفروض است. این گراف چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a دارد؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵۳- تعداد جواب‌های طبیعی معادله $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 35$ کدام است؟

۲۴۰ (۴)

۱۸۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۶۰ (۱)

۱۵۴- اگر A مربع لاتین چرخشی 4×4 باشد، آنگاه چند مربع لاتین مانند B وجود دارد که با مربع A متعامد بوده و درایه سطر

اول ستون اول آن برابر یک باشد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

هیچ (۱)

۱۵۵- از سه رنگ سفید، زرد و قرمز در مجموع ۵۵ شاخه گل موجود است. این شاخه‌های گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا

اطمینان داشته باشیم گلدانی وجود دارد که در آن حداقل ۴ شاخه گل هم رنگ وجود دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۰۱- ریاضی ۱

(یاسر ارشدری)

با توجه به اینکه یکی از ریشه‌های a برابر $۰/۰۰۱۶$ است، a عددی در بازه $(۰,۱)$ خواهد بود. در این صورت بزرگ‌ترین ریشه مثبت آن، ریشه پنجم و کوچک‌ترین ریشه مثبت آن ریشه سوم است. پس b ریشه سوم a است.

$$b = \sqrt[3]{a} = ۰/۰۰۱۶ = ۲^۴ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow a = ۱۰^{-۱۲} \times ۲^{۱۲}$$

هم‌چنین عدد حقیقی c ، $-\sqrt[4]{a}$ است و داریم:

$$c = -\sqrt[4]{a} = -\sqrt[4]{۱۰^{-۱۲} \times ۲^{۱۲}} = -۱۰^{-۳} \times ۲^۳ = -۰/۰۰۸$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۰۲- ریاضی ۱

(میلاد منصوری)

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_9 = ۱۹۲ \\ a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{۱۰} + \dots + a_{۲۰} = ۳۸۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{۱۰} + a_{۱۱} + \dots + a_{۲۰} = ۳۸۰ - ۱۹۲ = ۱۸۸$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$a_{۱۰} + a_{۱۱} + \dots + a_{۲۰} = ۱۱ \left(\frac{a_{۱۰} + a_{۲۰}}{۲} \right) = ۱۱a_{۱۵} = ۱۸۸$$

$$\Rightarrow a_{۱۵} = \frac{۱۸۸}{۱۱}$$

(مسایان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

جواب‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 6 \quad \text{و} \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 4 \quad \text{داریم:}$$

باید معادله درجهٔ دومی بنویسیم که ریشه‌هایش α^2 و β^2 باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6^2 - 2(4) = 28 \\ P' = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 4^2 = 16 \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به صورت زیر است:

$$x^2 - 28x + 16 = 0 \Rightarrow b = -28, c = 16 \Rightarrow b + c = -12$$

(مسئله ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲✓

۱

برای به‌دست آوردن تعداد نقاط تلاقی دو نمودار، کافی است معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

۴

۳✓

۲

۱

نقطه A روی خط $y = x + 2$ است، پس می‌توانیم مختصات آن را به صورت $A = (\alpha, \alpha + 2)$ در نظر بگیریم.

$$\text{فاصله } A \text{ از خط } y = -x = \frac{|\alpha + 2 + \alpha|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |2\alpha + 2| = 6 \Rightarrow |\alpha + 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(2, 4) \Rightarrow x_A + y_A = 6 \\ \text{یا} \\ A(-4, -2) \Rightarrow x_A + y_A = -6 \end{cases}$$

(مسایان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

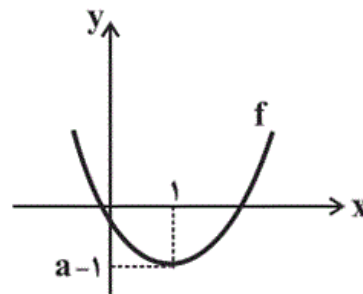
۴

۳

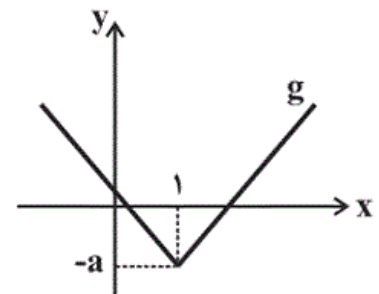
۲

۱ ✓

شکل کلی نمودارهای دو تابع را رسم می‌کنیم:



$$R_f = [a-1, +\infty)$$



$$R_g = [-a, +\infty)$$

$$R_f = R_g \Rightarrow a-1 = -a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶ و تابع: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$(\sqrt{2})^{x^2-x} - (2\sqrt{2})^{x-1} \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{2})^{x^2-x} \geq (2\sqrt{2})^{x-1}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^{x^2-x} \geq (\sqrt{2})^{3x-3} \xrightarrow[\text{تابع نمایی صعودی}]{\sqrt{2} > 1}$$

$$x^2 - x \geq 3x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3$$

$$\Rightarrow D_y = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

این بازه فقط شامل عدد صحیح $x = 2$ نیست.

(مسایان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۳ و مسایان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$A(3, 2) \in f \Rightarrow f(3) = 2$$

برای یافتن نقطه متناظر روی نمودار تابع $y = 3f(-2x + 1)$ ، عبارت ورودی

f را برابر با ۳ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 1 = 3 \Rightarrow x = -1 \\ y = 3f(-2x + 1) = 3f(3) = 3 \times 2 = 6 \end{cases}$$

(مسایان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰ و مسایان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$g(x) = a(x-3)^2 - 4, \quad g(0) = 5$$

$$\Rightarrow 9a - 4 = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow g(x) = (x-3)^2 - 4$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 4 \Rightarrow x-3 = \pm 2 \Rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

محل‌های برخورد خط f با محورهای مختصات $A \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow m_{AB} = -1$

$$\Rightarrow y - 5 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 5 \Rightarrow f(x) = -x + 5$$

$$\Rightarrow g(f(7)) = g(-2) = 25 - 4 = 21$$

(مسابقان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

مطابق نمودار داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (a - \sqrt{x+1}) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

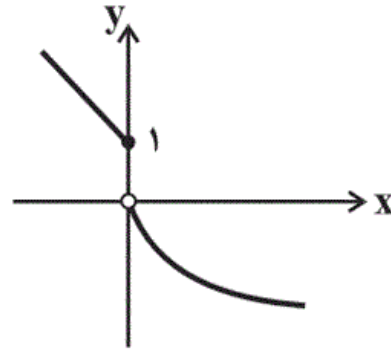
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x+1} & ; x > 0 \\ 1 - x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(2) = m \Rightarrow f(m) = 1 - m = 2 \Rightarrow m = -1$$

دقت کنید که نمودار تابع f در $\mathbb{R}$ به صورت شکل زیر خواهد بود که بر

اساس آن، واضح است برای پیدا کردن $f^{-1}(2)$ باید از ضابطه خطی تابع

f استفاده کنیم.



(مسابقان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$y = f(x) = 2^{x+1} - 3 \Rightarrow 2^{x+1} = y + 3 \Rightarrow \log_2(y + 3) = x + 1$$

$$\Rightarrow x = \log_2(y + 3) - 1$$

$$\xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y} y = f^{-1}(x) = \log_2(x + 3) - 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(x + 3) - \log_2 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x + 3}{2}\right)$$

از برابری این ضابطه با ضابطه f^{-1} در صورت سؤال به نتایج زیر خواهیم

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5 \quad \text{رسید:}$$

(مسابقان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۶)

۴

۳✓

۲

۱

(سیرمحمودرضا اسلامی)

-۱۱۲

با جای‌گذاری مقادیر گزینه‌ها، درمی‌یابیم که این دو رابطه به ازای

$$y = -\frac{3\pi}{2} \text{ برقرار است.}$$

توجه کنید که:

$$y = -\frac{3\pi}{2} : \begin{cases} \sin(2y - x) = \sin(-3\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(y + x) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \end{cases}$$

تذکر: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، این سؤال قابل حل نیست؛ بنابراین باید

به عددگذاری (با توجه به گزینه‌ها) متوسل شویم.

(مسابقان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴✓

۳

۲

۱

با توجه به نمودار: (۱) $f(0) = a \sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) + c = \frac{a}{2} + c = \frac{9}{4}$

هم‌چنین بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{5}{2}$ است.

(۲) $\Rightarrow a + c = \frac{5}{2}$

$\xrightarrow{(1),(2)} a - \frac{a}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, c = 2$

اختلاف طول دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی در چنین توابعی نصف دورهٔ تناوب است.

$\Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$

$\xrightarrow{T = \frac{2\pi}{|b|}} |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$

☐ ۴ ✓

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

آزمون ۱۷ خرداد دبیر: عزیز اسدی

ابتدا مقدار زاویهٔ α را پیدا می‌کنیم.

$\tan \alpha = \sqrt{3} \xrightarrow{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 4 \cos \alpha \sin x - 2 \sin \alpha = 4 \cos \frac{\pi}{3} \sin x - 2 \sin \frac{\pi}{3} = 0$

$\Rightarrow 2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

(مسئله ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

آزمون ۱۷ خرداد دبیر: عزیز اسدی

(کازم ابلالی)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

تابع f در $x = 0$ حد دارد، پس $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ است و در نتیجه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{|x|} - f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$= -1 - 2 = -3$$

(مسئله ۱- هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(میلاد سبازی لاریبانی)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(1 - \sqrt{x})}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(1 - \sqrt{x})}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(1 - \sqrt{x})}{x(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-a}{x(\sqrt{x} + 1)} = \frac{-a}{1(\sqrt{1} + 1)} = \frac{-a}{2}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax + 1 = 2a + 1$$

$$\text{شرط پیوستگی: } 2a + 1 = -\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow 2a + \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a \left(2 + \frac{1}{2} \right) = -1 \Rightarrow a = -\frac{2}{5}$$

(مسئله ۱- هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۵۱)

۴

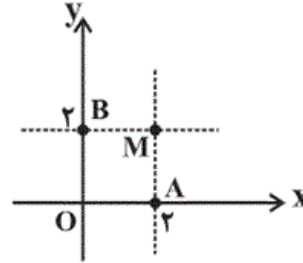
۳

۲ ✓

۱

$$f(x) = \frac{(a+1)x^2 - 2ax + 1}{x-2} \xrightarrow[\text{است}]{\text{تابع هموگرافیک}} a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانِب افقی: } y = 2 \\ \text{مجانِب قائم: } x = 2 \end{cases}$$



چهارضلعی AOBM مربع است، پس فاصله مبدأ از خط AB نصف قطر آن یعنی $\sqrt{2}$ خواهد بود.

(مسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه ۱۴۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

حد داده شده همان تعریف مشتق در $x=1$ است، بنابراین $f'(1)$ موجود است.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \end{array} \right.$$

شرط پیوستگی $\rightarrow a + b = 1$ (۱)

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & ; x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} & ; x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'_-(1) = 2a \\ f'_+(1) = -1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{شرط مشتق پذیری}} f'_-(1) = f'_+(1)$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \xrightarrow{(1)} b = \frac{3}{2} \Rightarrow ab = -\frac{3}{4}$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه های ۸۴ تا ۹۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$y' = \frac{(f'(x)+1)(g(x)-1) - g'(x)(f(x)+x)}{(g(x)-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(f'(2)+1)(g(2)-1) - g'(2)(f(2)+2)}{(g(2)-1)^2} = -2$$

$$\frac{g(2)=2}{g'(2)=0} \rightarrow (f'(2)+1) = -2 \Rightarrow f'(2) = -3$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه ۹۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5} = \frac{3 + 10 \cdot k - (2 + 25k)}{5} = \frac{75k + 1}{5}$$

$$x = 10 : \text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 2kx \Big|_{x=10}$$

$$= \frac{1}{6} + 20k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + 20k = 15k + \frac{1}{5} \Rightarrow 5k = \frac{1}{30} \Rightarrow k = \frac{1}{150}$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

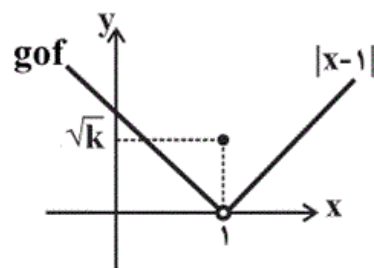
برای تابع gof داریم:

$$x \neq 1 : (gof)(x) = g(f(x)) = g((x-1)^2) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

$$x = 1 : (gof)(x) = g(f(x)) = g(k) = \sqrt{k}$$

برای این که gof ماکزیمم نسبی داشته باشد، نمودار آن باید به صورت شکل

زیر باشد:



با توجه به نمودار، واضح است که تابع gof در $x = 1$ ماکزیمم نسبی برابر

$$\sqrt{k} = 2 \Rightarrow k = 4$$

$\sqrt{k}$ دارد. پس:

(مسئله ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$x \leq 1: -3x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \xrightarrow{x \leq 1} x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$x \geq 1: 3x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq \frac{2}{3} \xrightarrow{x \geq 1} x \in [1, +\infty)$$

تابع f روی بازه $\left[0, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$ صعودی است.

$$f''(x) = \begin{cases} -6x + 2 & ; x < 1 \\ 6x - 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

برای اینکه f تابع f رو به پائین باشد، باید داشته باشیم $f'' \leq 0$.

$$x \leq 1: -6x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \xrightarrow{x \leq 1} x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$x \geq 1: 6x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \quad \text{غیرممکن}$$

$$\left(\left[0, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)\right) \cap \left[\frac{1}{3}, 1\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

صعودی و f در بازه $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ رو به پایین است.

(مسابقه ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سعید علم‌پور)

۱۲۳- کانون ریاضی

می‌دانیم در نقطه عطف، خط مماس از نمودار عبور می‌کند. داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \text{طول نقطه عطف} = 1$$

$$\Rightarrow \text{نقطه عطف} = (1, f(1)) = (1, 2)$$

فاصله نقطه $(1, 2)$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ است.

(مسابقه ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

چون تابع فقط در یک نقطه تعریف نشده است (فقط یک مجانب قائم دارد)،

$$\Delta_{\text{مخرج}} = b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b = \pm 4$$

از آنجا که مجانب قائم، طولی منفی دارد، پس $b = 4$ خواهد بود.

$$\text{نمودار تابع } f(x) = \frac{x^2 + ax - 6}{(x+2)^2} \text{ فقط در یک نقطه محور طولها را قطع}$$

کرده است. بنابراین با توجه به شکل نمودار که (شبیه به) نمودار تابع

هموگرافیک است و همچنین عبارت مخرج، صورت نیز باید عامل $x+2$

داشته باشد، یعنی به ازای $x = -2$ مقدار آن صفر شود، بنابراین:

$$x^2 + ax - 6 = 0 \xrightarrow{x=-2} 4 - 2a - 6 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow a - b = -5$$

(مسائل ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

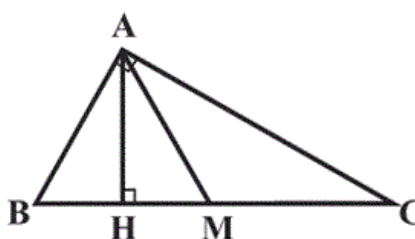
۴

۳

۲✓

۱

(امیرمسین ابومحبوب)



تنها در مثلث قائم‌الزاویه، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها روی یکی از اضلاع قرار می‌گیرد که محل آن وسط وتر است. نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است، بنابراین داریم:

$$AM + BM + CM = 15 \Rightarrow 3BM = 15 \Rightarrow \frac{3BC}{2} = 15 \Rightarrow BC = 10$$

$$AB + AC = \frac{6}{5}BC \Rightarrow (AB + AC)^2 = \left(\frac{6}{5}BC\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{AB^2 + AC^2}_{BC^2} + 2AB \times AC = \frac{36}{25}BC^2 \Rightarrow 2AB \times AC = \frac{11}{25}BC^2$$

$$\xrightarrow{\div 4} \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{11}{100}BC^2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{11}{100} \times 100 = 11$$

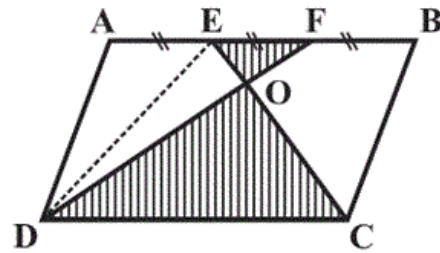
(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

۳

۲✓

۱



در مثلث‌های متشابه OEF و ODC ، نسبت مساحت‌ها با توان دوم نسبت

$$\frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle ODC}} = \left(\frac{EF}{DC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle ODC}} = \frac{1}{9}$$

تشابه برابر است:

اگر $S_{\triangle OEF} = S$ باشد، $S_{\triangle ODC} = 9S$ است. حال از E به D وصل می‌کنیم، داریم:

$$\frac{OD}{OF} = 3 \Rightarrow OD = 3OF \Rightarrow S_{\triangle EOD} = 3S_{\triangle EOF} \Rightarrow S_{\triangle EOD} = 3S$$

مساحت مثلث DEC ، نصف مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است، زیرا هر دو ارتفاع و قاعده یکسانی دارند.

$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow 12S = \frac{1}{2} \times 192 \Rightarrow S = 8$$

$$10S = 80 = \text{مساحت قسمت رنگی}$$

(هندسه ۱ - قضیه تالس و تشابه: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$AB = AH + HB = 6 + x$$

$$CD = HH' = AH - AH' = 6 - x$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CH(AB + CD) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}(6 + x + 6 - x) = 12\sqrt{3}$$

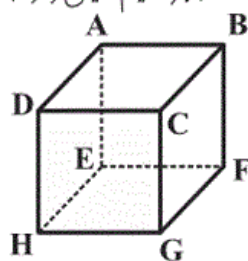
(هندسه ۱ - پند ضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱



در شکل مقابل دو خط AB و CD موازی یکدیگرند و خط AE ، خط AB را قطع می‌کند ولی با خط CD متنافر است. بنابراین گزینه «۴» نادرست است.

(هندسه ۱- تبسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۱۲)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

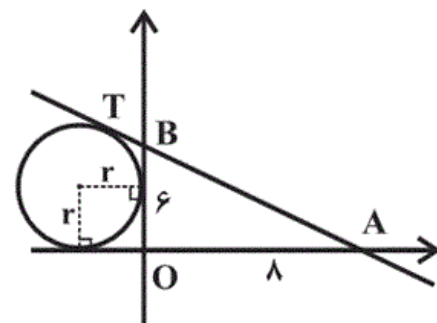
☐ ۱

مطابق شکل، دایره مورد نظر دایره محاطی خارجی نظیر ضلع OB در مثلث قائم‌الزاویه OAB است. داریم:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow AB = 10$$

$$P = \frac{6 + 8 + 10}{2} = 12$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$



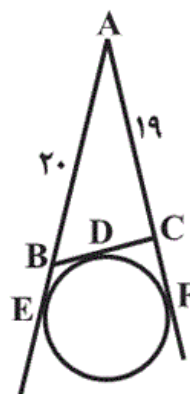
$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{24}{12 - 6} = \frac{24}{6} = 4$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱


$$2P = 20 + 19 + 7 = 46 \Rightarrow P = 23$$

در مثلث ABC داریم:

بنابراین تمرین ۶ صفحه ۳۰ کتاب درسی، $AE = P$ است، بنابراین

$$BE = 23 - 20 = 3$$

$AE = 23$ بوده و در نتیجه داریم:

$$BD = BE \Rightarrow BD = 3$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

☒ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

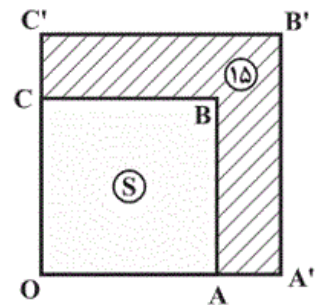
فرض کنید مربع $OA'B'C'$ مجانس مربع $OABC$ به مرکز O و با

نسبت $\frac{3}{2}$ باشد. داریم:

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S+15}{S} = \frac{9}{4} \Rightarrow S = 12$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)



۴ ✓

۳

۲

۱

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{4} = \frac{9}{12} \Rightarrow BD = 3$$

طول نیمساز AD از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 9 \times 12 - 3 \times 4 = 96 \Rightarrow AD = 4\sqrt{6}$$

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ADC داریم:

$$CO \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{OD}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{OD}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{OD}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{4} \Rightarrow OD = \sqrt{6}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

می‌دانیم اگر $B = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد، آنگاه

$$B^n = \begin{bmatrix} r_1^n & 0 & 0 \\ 0 & r_2^n & 0 \\ 0 & 0 & r_3^n \end{bmatrix} \text{ است. بنابراین اگر } n \text{ فرد باشد،}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و در صورتی که } n \text{ زوج باشد،}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

است. یعنی مجموع درایه‌های ماتریس A^n در صورت زوج یا فرد بودن عدد n ، به ترتیب برابر ۳ و (-1) است. در نتیجه داریم:

$$A + A^2 + \dots + A^{10} = \underbrace{(-1) + 3 + 0 + \dots + 0}_{2} + \underbrace{(-1) + 3}_{2} = 5 \times 2 = 10$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$|3A| A^{-1} = 6I \Rightarrow |3A| A^{-1}| = |6I|$$

$$\Rightarrow |3A|^2 |A^{-1}| = 6^2 |I| \Rightarrow |9A^2| |A^{-1}| = 36 \times 1$$

$$\Rightarrow 9^2 |A|^2 \times \frac{1}{|A|} = 36 \Rightarrow 81 |A| = 36 \Rightarrow |A| = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$$

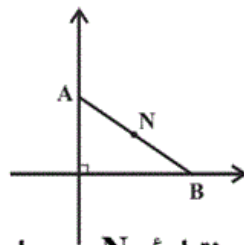
(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۴

۳

۲ ✓

۱



وقتی A و B روی محورهای مختصات حرکت می‌کنند (به جز حالت‌هایی که A یا B روی مبدأ مختصات واقع شوند)، همواره یک مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر ۸ بوجود می‌آید.

می‌دانیم طول میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است، پس نقطه N وسط پاره خط AB به فاصله ۴ واحد از مبدأ مختصات قرار دارد، یعنی مکان هندسی نقطه N، دایره‌ای به مرکز (۰،۰) و شعاع ۴ است.

بیشترین فاصله نقطه M از نقاط روی این دایره برابر است با:

$$|OM| + R = \sqrt{9 + 16} + 4 = 9$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۴۲)

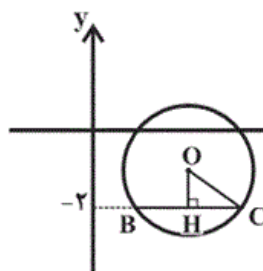
۴

۳✓

۲

۱

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 2^2 - 4(3)} = \sqrt{2}$$



معادله خطی که شامل وتر وتری از این دایره (وتر

BC) است که موازی محور x ها بوده و از

نقطه A(۱، -۲) عبور می‌کند، به صورت

$y = -2$ است. فاصله مرکز دایره از این خط

مطابق شکل برابر ۱ است. بنابراین داریم:

$$\Delta OHC: CH^2 = OC^2 - OH^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow CH = 1 \Rightarrow BC = 2$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲✓

۱

بنا به قضیه کسینوس‌ها در مثلث $MF'F$ داریم:

$$FF'^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF \cdot MF' \cos \hat{M}$$

$$\Rightarrow FF'^2 = 4 + 36 - 2 \times 2 \times 6 \times \frac{1}{2} = 28 \Rightarrow FF' = 2\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow 2c = 2\sqrt{7} \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

از طرفی مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر بیضی از دو کانون آن، برابر طول قطر بزرگ بیضی است، پس داریم:

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|(m-1) + (m-1) + 0|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2|m-1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1}} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(m-1)^2 = 3(m-1)^2 + 3$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 = 3 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 3 \Rightarrow m^2 - 2m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m \text{ مجموع مقادیر} = -\frac{-2}{1} = 2$$

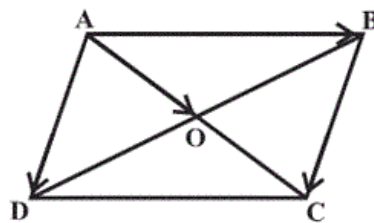
(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱



با توجه به این که $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ است، داریم:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} |(2, -1, 1) \times (-1, 1, -1)|$$

$$= \frac{1}{2} |(0, 1, 1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}| \Rightarrow |\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۴

۳✓

۲

۱

(سیدعادل حسینی)

اگر p درست باشد، گزاره همواره درست است، زیرا در صورت درست بودن تالی، ترکیب شرطی همواره درست خواهد بود.

اگر p نادرست باشد، گزاره $(p \Rightarrow (q \vee \sim r))$ به انتفای مقدم درست خواهد بود. حال گزاره اصلی صورت سؤال نادرست خواهد بود، زیرا فرض آن درست اما حکم نادرست است.

بنابراین گزاره $(p \Rightarrow (q \vee \sim r)) \Rightarrow p$ هم‌ارز با گزاره p است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱✓

مسئله را به حالت‌های زیر تقسیم می‌کنیم:

(۱) کوچک‌ترین عضو ۱ و بزرگ‌ترین عضو ۴ باشد. در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{2, 3\}$ یعنی $2^2 = 4$ است، چرا که هر یک از اعضای ۲ و ۳ می‌توانند در زیرمجموعه حضور داشته باشند یا نداشته باشند.

(۲) کوچک‌ترین عضو ۲ و بزرگ‌ترین عضو ۸ باشد. در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ یعنی $2^5 = 32$ می‌باشد.

(۳) کوچک‌ترین عضو ۳ و بزرگ‌ترین عضو ۱۲ باشد در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ یعنی $2^8 = 256$ می‌باشد.

تعداد کل زیرمجموعه‌های مطلوب برابر است با: $4 + 32 + 256 = 292$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳✓

۲

۱

(ممدعلی نادرپور)

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$(A \cap B)' \cap (A \cup B') \cap C = [(A' \cup B') \cap (A \cup B')] \cap C$$

$$= \left[\underbrace{(A' \cap A)}_{\emptyset} \cup B' \right] \cap C = B' \cap C$$

بنابراین با توجه به فرض سؤال داریم: $B' \cap C = C \Rightarrow C - B = C$

در نتیجه دو مجموعه C و B جدا از هم هستند، یعنی $B \cap C = \emptyset$ است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱✓

از احتمال متمم استفاده می‌کنیم و احتمال آن را می‌یابیم که مجموع اعداد سه مهره، ۳ یا ۴ باشد. مجموع اعداد سه مهره تنها زمانی برابر ۳ است که مهره‌های با شماره ۱ از هر سه رنگ خارج شوند. مجموع اعداد سه مهره زمانی برابر ۴ است که یک مهره با شماره ۲ و دو مهره با شماره ۱ خارج شوند. به ازای خروج هر مهره با شماره ۲، سه حالت وجود دارد، مثلاً اگر مهره سفید شماره ۲ خارج شود، مهره‌های شماره ۱ می‌توانند به رنگ‌های سفید و سیاه یا سفید و سبز و یا سیاه و سبز باشند، پس در مجموع ۹ حالت وجود دارد که مجموع برابر ۴ باشد.

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1+9}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{10}{84} = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

در نتیجه داریم:

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۴

۳

۲✓

۱

اگر مهره خارج شده از ظرف اول سفید باشد، آنگاه باید دو مهره خارج شده از ظرف دوم سیاه باشند و برعکس اگر مهره خارج شده از ظرف اول سیاه باشد، آنگاه دو مهره خارج شده از ظرف دوم سفید هستند. بنابراین اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، داریم:

$$P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{60}{8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{28}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

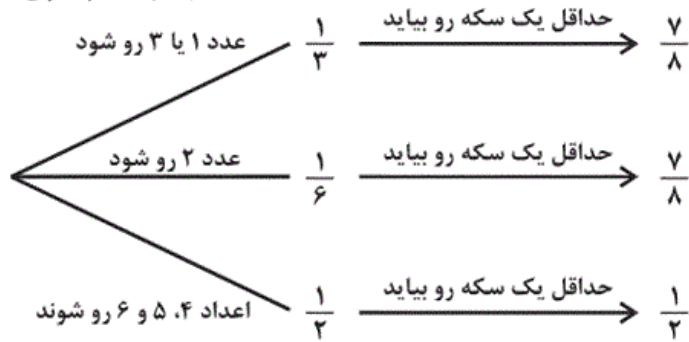
۴

۳

۲✓

۱

(سید عادل رضا مرتضوی)



اگر پیشامدهای رو شدن عدد ۱ یا ۳ را با B_1 ، رو شدن عدد ۲ را با B_2 و رو شدن اعداد ۴ تا ۶ را با B_3 نمایش دهیم و A پیشامد آن باشد که حداقل یک سکه رو بیاید، آنگاه داریم:

$$P(B_2 | A) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{7}{8}}{\frac{1}{3} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{48}}{\frac{7}{24} + \frac{7}{48} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{7}{48}}{\frac{33}{48}} = \frac{7}{33}$$

تذکر: در پرتاب سه سکه، پیشامد آن که حداقل یک سکه رو بیاید، متمم پیشامدی است که هر سه سکه پشت بیایند و در نتیجه احتمال آن برابر است

$$1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \quad \text{با:}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱✓

(امیر حسین ابومصوب)

اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های اولیه را به ترتیب با $\bar{x}$ و σ نمایش

$$CV_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 3 \quad \text{دهیم، آنگاه ضریب تغییرات داده‌های اولیه برابر است با:}$$

با دو برابر کردن داده‌ها، میانگین و انحراف معیار هر کدام دو برابر می‌شوند ولی کاستن میانگین داده‌ها از هر کدام از آنها، تأثیری روی انحراف معیار نداشته ولی میانگین داده‌های جدید را به اندازه $\bar{x}$ کاهش می‌دهد. بنابراین ضریب تغییرات داده‌های جدید برابر است با:

$$CV_2 = \frac{2\sigma}{2\bar{x} - \bar{x}} = \frac{2\sigma}{\bar{x}} = 2 \times 3 = 6$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴، ۸۵ و ۹۳ تا ۹۷)

۴✓

۳

۲

۱

در نمونه‌گیری از خودروهای موجود در یک تعمیرگاه، درصد خودروهای آلاینده بیشتر از واقعیت نشان داده خواهد شد و همچنین سایر خودروها امکان حضور در نمونه را ندارند. در نمونه‌گیری از خودروهای عبوری از یک خیابان، خودروهایی که از آنها بیشتر استفاده می‌شود، احتمال بیشتری دارد که به عنوان نمونه انتخاب شوند.

همچنین در نمونه‌گیری از خودروهای تولیدی یکی از کارخانه‌های داخلی، انواع دیگر خودروهای موجود در سطح شهر امکان انتخاب در نمونه را ندارند. بنابراین نمونه‌گیری‌های گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» همگی اریب هستند.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

فرض کنید $d = (5n + 3, an + 11)$ باشد. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 5n + 3 \xrightarrow{\times a} d \mid 5an + 3a \\ d \mid an + 11 \xrightarrow{\times 5} d \mid 5an + 55 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 3a - 55$$

برای این که $d = 1$ باشد، $3a - 55$ لزوماً باید برابر با ۱ یا (-1) شود.

$$3a - 55 = 1 \Rightarrow a = \frac{56}{3} \quad \text{غ.ق.ق داریم:}$$

$$3a - 55 = -1 \Rightarrow a = 18$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$a = 22b + 15 \xrightarrow{r < b} b > 15$$

عدد a مضرب ۷ است، بنابراین داریم:

$$a \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 22b + 15 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 22b \equiv -15 \pmod{7} \Rightarrow b \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow b = 7q - 1$$

$$\xrightarrow{b > 15} b_{\min} = 20$$

$$a_{\min} = 22(20) + 15 = 455 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 14$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۲)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

طبق تمرین ۷ صفحه ۲۹ کتاب درسی $(a+b)^n - a^n - b^n \equiv 0 \pmod{ab}$ ، بنابراین داریم:

$$(11+2)^{50} - 11^{50} - 2^{50} \equiv 0 \pmod{22} \Rightarrow 13^{50} - 11^{50} \equiv 2^{50} \pmod{22}$$

در نتیجه کافی است باقی‌مانده تقسیم 2^{50} را بر ۲۲ پیدا کنیم:

$$2^{22} \equiv 64 \equiv -2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{50} = (2^{22})^2 \times 2^6 \equiv (-2)^2 \times 2^6 = 2^{10} \pmod{22}$$

$$2^{22} \equiv 2^6 \times 2^4 \equiv -2 \times 16 \equiv -32 \equiv 12 \pmod{22}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه تمرین‌های ۷ و ۸ صفحه ۲۹)

☐ ۴ ✓

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

در این سؤال چون اختلاف δ و Δ برابر با یک می‌باشد، پس درجه هر رأس Δ یا δ است. پس اگر x رأس از درجه Δ باشد، آنگاه $7-x$ رأس از درجه δ وجود دارد و داریم:

$$\underbrace{\Delta, \Delta, \dots, \Delta}_x, \underbrace{\delta, \delta, \dots, \delta}_{7-x}$$

$$\text{مجموع درجات رئوس گراف} = 2q \Rightarrow x(\Delta) + (7-x)(\delta) = 2 \times 9$$

$$\Rightarrow x(\delta + 1) + (7-x)(\delta) = 18$$

$$\Rightarrow x(\delta) + x + 7(\delta) - x(\delta) = 18 \Rightarrow x + 7\delta = 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta = 1, x = 11 \text{ غ.ق.} \\ \delta = 2, x = 4 \end{cases} \quad (\text{زیرا باید } x < 7 \text{ باشد})$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱ ✓

(امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به این که مرتبه گراف برابر ۱۰ و درجه هر رأس گراف برابر ۳ و برابر ماکسیمم درجه رئوس گراف است، پس مجموعه احاطه گر مینیمم این گراف نمی‌تواند کمتر از $\left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3$ عضو داشته باشد. رأس a در گراف G قادر به احاطه رأس‌های مجموعه $\{a, b, e, f\}$ است. اکنون باید حداقل دو رأس دیگر در این گراف انتخاب نمود که بتوانند ۶ رأس باقی‌مانده گراف را احاطه نمایند.

☐ ۴

☒ ۳ ✓

☐ ۲

☐ ۱

با توجه به این که $۳۵ = ۵ \times ۷$ است، پس حالت‌های ممکن برای جواب‌های این معادله عبارت‌اند از:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = ۱۵ \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۵-1}{۴-1} = \binom{۴}{۳} = ۴ \\ x_1 + x_2 + x_3 = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۵-1}{۳-1} = \binom{۴}{۲} = ۶ \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = ۷ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۷-1}{۴-1} = \binom{۶}{۳} = ۲۰ \end{array} \right.$$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی معادله برابر است با:

$$۱۵ \times ۴ + ۶ \times ۲۰ = ۶۰ + ۱۲۰ = ۱۸۰$$

تذکر: واضح است که اگر ۳۵ را به صورت ۱×۳۵ بنویسیم، معادلات

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۱ \text{ و } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = ۱ \text{ فاقد جواب طبیعی هستند.}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

مربع لاتین چرخشی مرتبه ۴ به صورت مقابل است:

اگر دو مربع لاتین A و B متعامد باشند، در مربع حاصل از ترکیب آنها، هیچ عدد دو رقمی تکراری ای وجود ندارد. درایه سطر اول ستون اول مربع B برابر یک است، بنابراین برای حفظ متعامد بودن A و B ، اعداد روی قطر اصلی مربع B نمی‌توانند ۱ باشند. از طرفی در هر سطر و ستون یک مربع لاتین، عدد تکراری وجود ندارد. بنابراین اعداد سطر اول و ستون اول، مربع لاتین B نیز نمی‌توانند ۱ باشند. بنابراین چهار عدد ۱ تنها به یکی از دو حالت زیر می‌توانند در مربع لاتین B قرار بگیرند. اما در حالت B_1 ، درایه‌های مشخص شده با عدد ۱ در سطرهای سوم و چهارم و در حالت B_2 ، درایه‌های مشخص شده با عدد ۱ در سطرهای دوم و سوم در مربع A یکسان هستند و در نتیجه مربع حاصل از ترکیب A و B غیر متعامد می‌شود. پس هیچ مربع لاتینی با شرایط گفته شده وجود ندارد.

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & & \\ \hline \times & & \times & \\ \hline \times & & & \times \\ \hline \end{array} \rightarrow B_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & & 1 \\ \hline \times & 1 & \times & \\ \hline \times & & 1 & \times \\ \hline \end{array} \quad B_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & 1 & \\ \hline \times & & \times & 1 \\ \hline \times & 1 & & \times \\ \hline \end{array}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

اگر ۵۵ شاخه گل را ۵۵ کبوتر و ۳ رنگ مختلف را ۳ لانه فرض کنیم، آنگاه چون $55 = 18 \times 3 + 1$ ، پس طبق اصل لانه کبوتری از یکی از رنگ‌ها حداقل $18 + 1 = 19$ شاخه گل موجود است. حال اگر ۱۹ شاخه گل هم رنگ را ۱۹ کبوتر فرض کنیم، با توجه به این که $19 = 6 \times 3 + 1$ ، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری اگر ۶ گلدان (۶ لانه) موجود باشد، گلدانی وجود خواهد داشت که در آن حداقل $3 + 1 = 4$ شاخه گل هم رنگ موجود است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۴

۳

۲ ✓

۱