۱۲۴- با ارقام ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵ و ۵، چند عدد هفت‌رقمی می‌توان ساخت به طوری که ارقام زوج و فرد در آنها یک در میان قرار گیرند؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

۱۲۵- معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ، چند جواب صحیح با شرط $(i = 1,2,3)$ $x_i \geq i+1$ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۲۶- تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4^3 = 12$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۷۸ ۴) ۹۳

۱۲۷- حاصل $x+y+z$ در مربع لاتین شکل مقابل کدام است؟

			۴
x		۱	
۳	y	۲	
		z	

۱) ۶ ۲) ۸
۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۲۸- چند تابع پوشا از مجموعهٔ $D = \{1,2,3,4,5,6\}$ به مجموعهٔ $R = \{1,2,3,4\}$ می‌توان تعریف کرد که شامل زوج مرتب‌های $(1,1)$ و $(2,2)$ باشند؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

۱۲۹- از مجموعهٔ اعداد دو رقمی مضرب ۳، حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در میان اعداد انتخابی، دست کم دو عضو با مجموع ۹۶ وجود دارند؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

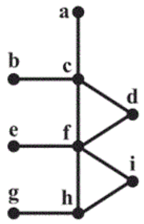
۱۳۰- فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که اعضای آن به جز ۲، ۳ و ۵، بر هیچ عدد اول دیگری بخش‌پذیر نباشند. حداقل چند عضو از مجموعهٔ A انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حاصل‌ضرب حداقل دو عضو از میان آنها، قطعاً مربع کامل است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۵

۱۲۱- در یک گراف از مرتبهٔ ۸ که دارای یک $\gamma-$ مجموعه با اندازهٔ یک باشد، حداکثر تعداد اعضای یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۲۲- با افزودن کدام یال به گراف G در شکل مقابل، عدد احاطه‌گری آن تغییر می‌کند؟



۱) ab ۲) di
۳) fg ۴) fb

۱۲۳- گراف P_8 چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حسابان ۲ - دوازدهم ، مشتق

۸۱- خط $y = 4x + a$ بر نمودار تابع $y = x^2 - 2$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶- ۴) ۲-

۸۲- اگر $f(x) = (x^2 + 2)(x^4 + 4)$ و $g(x) = x^8 - 16$ باشد، حاصل $g'(1)f(1) - f'(1)g(1)$ کدام است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۵۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۵۰۰

۸۳- اگر $\frac{3}{2} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ و $h(x) = f(2x)$ باشد، $h'(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۴- اگر $f(x) = [x]\,|x^2 - x - 2|$ باشد، حاصل $f'_+(-2) - f'_-(2)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۸

۸۵- در مورد تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f'(0)=0$ ۲) $f'(0)=+\infty$ ۳) $f'_{+}(0)=+\infty$ ۴) $f'_{+}(0)=-\infty$

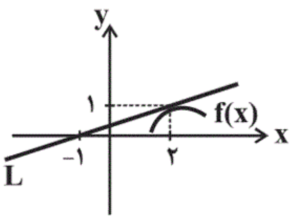
۸۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2a}{\sqrt{x}}+3x & ;x\ge 1\\ bx^2+6 & ;x<1\end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\dfrac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۸۷- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x$ باشد، خط مماس نمودار تابع gof در چند نقطه موازی محور طول‌ها است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۸- در شکل مقابل خط L بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به‌طول $x=2$ مماس است. شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\sqrt{f(\sqrt{x})}$ در $x=4$ کدام است؟



۱) $\dfrac{1}{6}$ ۲) $\dfrac{1}{12}$ ۳) $\dfrac{1}{24}$ ۴) $\dfrac{1}{48}$

۸۹- اگر $f(2x+1)=g(x^2+\sqrt{x})$ و $f'(3)=5$ باشد، $g'(2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۰- اگر $f(x)=\sin^2(f'(x))$ و $f'(0)=\dfrac{\pi}{4}$ باشد، مقدار $f''(0)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{2}$ ۲) $\dfrac{\pi}{4}$ ۳) π ۴) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$

۹۱- در تابع درجهٔ دوم f داریم: $f'(1)=2$ و $f''(3)=4$. مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲

۹۲- مشتق دوم تابع $f(x)=(2x-1)^2\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ در $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

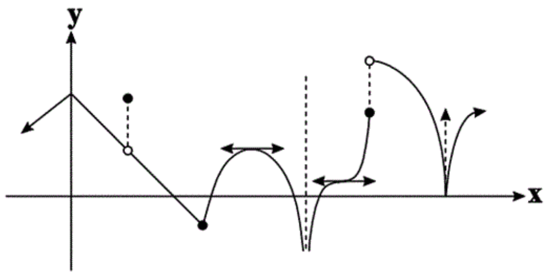
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۹۳- نقطهٔ $M(x,y)$ روی نمودار تابع $y=\sqrt{7x+4}$ در حال حرکت است. اگر d فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر d نسبت به x در نقطهٔ $x=5$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{16}$ ۲) $\frac{17}{16}$ ۳) $\frac{19}{16}$ ۴) $\frac{21}{16}$

حسابان ۲ - دوازدهم ، کاربردهای مشتق

۹۴- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x+2)$ را نمایش می‌دهد. تعداد نقاط بحرانی تابع $y=f(x)$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۰

۹۵- مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^2-1)\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\{-1,1\}$ ۲) $\{-4,0,1\}$

۳) $\{-2,0,2\}$ ۴) $\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$

۹۶- تابع $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x} & ;x\geq ۱ \\ x^۲+۲x+b & ;x<۱ \end{cases}$ فقط یک نقطهٔ بحرانی به طول $x=c$ دارد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۹۷- اگر $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=-x^۳+۳x^۲-۲x$ باشد، مجموع طول نقاط ماکزیمم نسبی نمودار تابع f کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۸- تابع $f(x)=[\sqrt{x}]-x$ در بازهٔ $(۰,۹)$ به ترتیب از راست به چپ چند ماکزیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲، صفر ۲) ۱، ۱ ۳) صفر، ۲ ۴) ۲، ۱

۹۹- کدام گزینه در مورد نمودار تابع $f(x)=-\frac{۱}{۴}x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۲x^۲+۵$ صحیح است؟

۱) دو ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی دارد.

۲) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

۳) یک ماکزیمم نسبی و دو عطف دارد.

۴) یک مینیمم نسبی و دو عطف دارد.

۱۰۰- حاصل‌ضرب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x\sqrt{a^۲-x^۲}$ برابر با $-\frac{۸۱}{۴}$ است. a کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

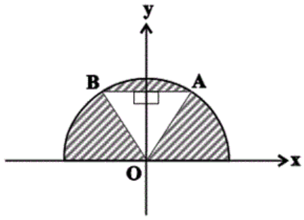
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۰۱- با ۴۰ متر سیم می‌خواهیم دور یک زمین به شکل قطاع یک دایره را محصور کنیم. شعاع دایره کدام باشد تا مساحت زمین بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۰۲- مثلث $\mathbf{OAB}$ مطابق شکل، زیر نمودار $y=\sqrt{۲-x^{۲}}$ محاط شده‌است، به گونه‌ای که یک رأس آن روی مبدأ مختصات و ۲ رأس دیگر آن روی نمودار قرار دارند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده در شکل کم‌ترین مقدار ممکن باشد، اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع $\mathbf{AB}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۳- به ازای چه مقادیری از m، تابع $y=۲x^{۳}+۳mx^{۲}+۲۴x+۹$ اکیداً یکنواست؟

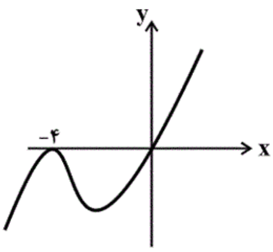
۱) $-۴\sqrt{۲}\le m\le ۴\sqrt{۲}$

۲) $-۸\le m\le ۸$

۳) $۰<m\le ۸$

۴) $-۴\le m\le ۴$

۱۰۴- نمودار تابع $y=xf(x-۱)=ax^{۳}+bx^{۲}+۸x$ مطابق شکل زیر است. بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع $y=xf(x)$ نزولی باشد، کدام است؟



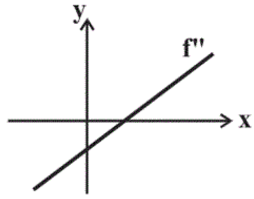
۱) $[-۲,-۱]$

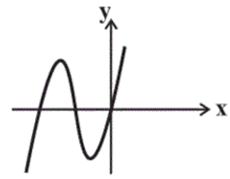
۲) $\left[-۵,-\frac{۵}{۳}\right]$

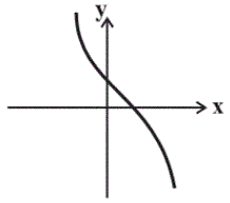
۳) $\left[\frac{۵}{۳},۵\right]$

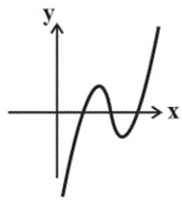
۴) $[۱,۲]$

۱۰۵- شکل مقابل نمودار تابع f'' است. نمودار تابع f کدام می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰۶- در چند نقطه از نمودار تابع $f(x)=x(x+1)|x-1|$، جهت تقعر تغییر می‌کند؟

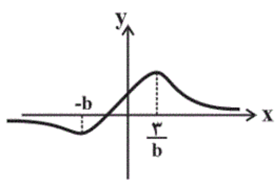
۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۰۷- نمودار تابع $f(x)=x^2+k^2\cos x$ نقطهٔ عطف ندارد. حدود k کدام است؟

۱) $|k|\le 1$　　۲) $|k|\le\sqrt{2}$

۳) $|k|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$　　۴) $|k|\ge\frac{1}{2}$

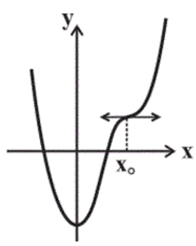
۱۰۸- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2+a}$ به‌صورت مقابل باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) صفر　　۲) ۶

۳) ۲　　۴) ۶-

۱۰۹- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=2x^4-8x^3+ax^2+b$ را نمایش می‌دهد. مقدار a کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$　　۲) ۸

۳) ۹　　۴) ۱۸

۱۱۰- معادلهٔ $x^3 - 6x^2 - k + 1 = 0$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. کم‌ترین مقدار صحیح k کدام است؟

۱) ۳۰-
۲) ۳۱-
۳) ۳۲-
۴) ۳۳-

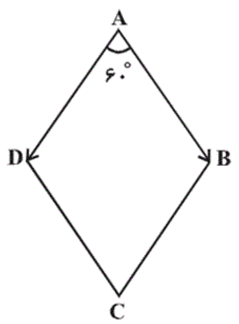
هندسه ۳- دوازدهم ، بردار -

۱۱۴- وجه‌های یک مکعب مستطیل، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=1$ ، $x=3$ ، $y=-1$ ، $y=3$ ، $z=-2$ و $z=2$ هستند.

کدام‌یک از نقاط زیر روی یکی از وجه‌های این مکعب و غیر واقع بر یال‌های آن است؟

۱) $A=(1,3,2)$
۲) $B=(3,1,-2)$
۳) $C=(0,-1,1)$
۴) $D=(2,0,-2)$

۱۱۵- مطابق شکل، لوزی ABCD با طول ضلع ۲ واحد و زاویهٔ $\hat{A} = 60^\circ$ مفروض است. طول بردار $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ کدام است؟

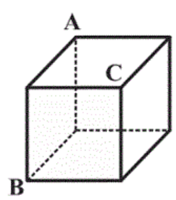


۱) ۲
۲) ۴
۳) $2\sqrt{3}$
۴) $4\sqrt{3}$

۱۱۶- اگر $|\vec{a}|=2$ ، $|\vec{b}|=\sqrt{5}$ و $|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{85}$ باشد، طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر راستای بردار $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
۳) $\sqrt{2}$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۷- شکل مقابل مکعبی به ضلع ۲ است. حاصل $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ کدام است؟



۱) ۴-
۲) $-2\sqrt{2}$
۳) $-4\sqrt{2}$
۴) ۸-

۱۱۸- دو بردار $\vec{a}=(1,2,m)$ و $\vec{b}=(n,1,2)$ مفروض‌اند. تصویر بردار $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ روی محور xها برابر ۱ و طول تصویر بردار $\vec{c}$ روی صفحهٔ xz برابر ۲ است. مجموع مقادیر n کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

۱۱۹- مساحت مثلث ABC با سه رأس $A=(2,3,1)$، $B=(-1,0,4)$ و $C=(1,2,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
۳) $3\sqrt{2}$
۴) $3\sqrt{3}$

۱۲۰- به ازای کدام مقدار m، چهار نقطهٔ $A=(1,0,2)$، $B=(-1,2,0)$، $C=(3,1,1)$ و $D=(0,1,m)$ روی یک صفحه قرار دارند؟

۱) صفر
۲) ۱-
۳) ۱
۴) $\frac{1}{2}$

هندسه ۳- دوازدهم ، آشنايي با مقاطع مخروطي

۱۱۱- خط هادی یک سهمی، خط $y=1$ و کانون آن نقطهٔ $F(3,5)$ است. این سهمی محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) $\frac{31}{3}$
۴) $\frac{33}{8}$

۱۱۲- در یک سهمی، خط هادی و محور تقارن به‌ترتیب خطوط $x=4$ و $y=4$ بوده و نقطهٔ $A(9,7)$ نقطه‌ای از آن سهمی است. کدام یک از نقاط زیر می‌تواند رأس سهمی باشد؟

۱) $S\left(\frac{9}{2},4\right)$
۲) $S\left(\frac{11}{2},4\right)$
۳) $S\left(\frac{13}{2},4\right)$
۴) $S\left(\frac{15}{2},4\right)$

۱۱۳- عمق دو آینهٔ سهموی در مرکز آنها به‌ترتیب ۳۰ و ۴۰ سانتی‌متر و قطر قاعدهٔ این آینه‌ها به‌ترتیب ۶۰ و ۱۰۰ سانتی‌متر اســت. اگر فاصلهٔ کانونی آینه دوم برابر a باشد، فاصلهٔ کانونی آینهٔ اول کدام است؟

۱) ۰/۴a
۲) ۰/۴۸a
۳) ۰/۵۴a
۴) ۰/۶a

-۱۲۴ (علی ایمانی)

$$\frac{۱}{\text{فرد}} \times \frac{۱}{\text{زوج}} \times \frac{۲}{\text{فرد}} \times \frac{۲}{\text{زوج}} \times \frac{۳}{\text{فرد}} \times \frac{۳}{\text{زوج}} \times \frac{۴}{\text{فرد}}$$

مطابق شکل تعداد حالت‌هایی که ۴ رقم فرد و ۳ رقم زوج می‌تواند به‌صورت یک در میان قرار گیرند، برابر $۳! \times ۴!$ است. با توجه به این که هر یک از ارقام ۲، ۳ و ۵، دو بار تکرار شده‌اند، تعداد اعداد هفت رقمی مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۴! \times ۳!}{۲! \times ۲! \times ۲!} = \frac{۲۴ \times ۶}{۸} = ۳ \times ۶ = ۱۸$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

-۱۲۵ (کاظم باقرزاده‌چهره)

با توجه به شرط $(i = ۱,۲,۳)$ $x_i \ge i + ۱$، سه متغیر $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ را می‌توان در معادله جایگزین کرد:

$$x_۱ = y_۱ + ۲, x_۲ = y_۲ + ۳, x_۳ = y_۳ + ۴$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۱ \Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۲$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر است با:

$$\binom{۲+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

$x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 11$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{11-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$

$x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$\Rightarrow$ تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی معادله برابر است با: $45 + 3 = 48$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(کیوان دارابی)

		۳	۴
۴		۱	
۳	۴	۲	
		۴	

درایهٔ واقع در سطر اول ستون سوم این مربع لاتین قطعاً برابر ۳ است، چون در سطر اول عدد ۴ و در ستون سوم اعداد ۱ و ۲ موجود هستند. در نتیجه درایهٔ واقع در سطر چهارم ستون سوم یعنی z، قطعاً برابر ۴ است. در سطر سوم یکی از درایه‌ها باید برابر ۴ باشد که چون در ستون چهارم، عدد ۴ وجود دارد، لزوماً ۴ باید در ستون دوم این سطر قرار داده شود، یعنی $y=۴$ است. همچنین در سطر دوم نیز یکی از درایه‌ها باید برابر ۴ باشد که چون در ستون‌های دوم تا چهارم، عدد ۴ موجود است، فقط درایهٔ ستون اول از این سطر می‌تواند برابر ۴ شود، پس $x=۴$ است. در نتیجه $x+y+z=۱۲$ است.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

هر کدام از این توابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۰),(۴,۰),(۵,۰),(۶,۰)\}$$

اگر مجموعهٔ این دسته از توابع را با S و زیر مجموعه‌هایی از S که برد آنها به‌ترتیب فاقد ۳ و فاقد ۴ باشد را با A و B نمایش دهیم، داریم:

$$|S|=۴^۴=۲۵۶$$

$$|A|=|B|=۳^۴=۸۱$$

$$|A\cap B|=۲^۴=۱۶$$

در این صورت مجموعهٔ توابع پوشا معادل مجموعهٔ $\bar{A}\cap\bar{B}$ است. داریم:

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-\left(|A|+|B|-|A\cap B|\right)$$

$$=۲۵۶-(۸۱+۸۱-۱۶)=۲۵۶-۱۴۶=۱۱۰$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۹)

✓ $\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

اعداد دو رقمی مضرب ۳ عبارت‌اند از ۱۲، ۱۵، ۱۸، ... ، ۹۶ و ۹۹، که در مجموع ۳۰ عدد هستند.

حالت‌هایی که مجموع دو عدد از میان این اعداد برابر ۹۶ است، عبارت‌اند از (۱۲,۸۴)، (۱۵,۸۱)، ... و (۴۵,۵۱) که شامل ۱۲ گروه است. همچنین اعداد ۴۸، ۸۷، ۹۰، ۹۳، ۹۶ و ۹۹ در هیچ گروهی نیستند.

در بدترین حالت از هر گروه یک عضو و تمام اعداد بدون گروه را انتخاب می‌کنیم (روی هم $۱۸ = ۶ + ۱۲$ عضو) و در انتخاب نوزدهم مطمئن هستیم که قطعاً دو عدد با مجموع ۹۶ وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

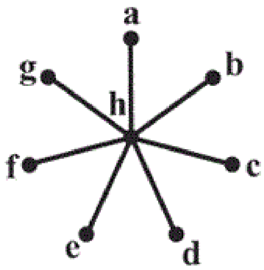
اگر a و b دو عضو از اعضای مجموعهٔ A باشند، آنگاه می‌توان آنها را به‌صورت $a = ۲^{\alpha_۱} \times ۳^{\beta_۱} \times ۵^{\gamma_۱}$ و $b = ۲^{\alpha_۲} \times ۳^{\beta_۲} \times ۵^{\gamma_۲}$ نمایش داد. در این‌صورت حاصل‌ضرب آنها به‌صورت $ab = ۲^{\alpha_۱+\alpha_۲} \times ۳^{\beta_۱+\beta_۲} \times ۵^{\gamma_۱+\gamma_۲}$ بوده و زمانی مربع کامل است که تمامی توان‌های آن زوج باشد و این موضوع در حالتی ممکن است که توان‌های پایه‌های مشابه در a و b، همزمان هر دو زوج و یا هر دو فرد باشند. چون سه پایهٔ مختلف وجود دارد پس در مجموع $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$ حالت مختلف برای زوج یا فرد بودن توان‌ها در هر کدام از اعداد a یا b وجود دارد. در نتیجه با انتخاب ۹ عضو از مجموعهٔ A، قطعاً حداقل دو عضو وجود دارند که توان‌های هر سه پایه از نظر زوج یا فرد بودن، دقیقاً مانند یکدیگر بوده و در نتیجه حاصل‌ضرب آنها مربع کامل است.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(کیوان دارابی)

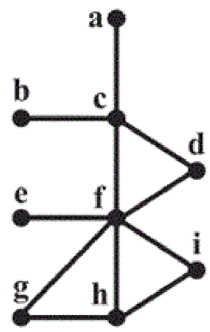
چون گراف دارای یک $\gamma-$ مجموعه با اندازهٔ یک است، پس قطعاً رأسی در گراف وجود دارد که با تمام رئوس دیگر گراف مجاور باشد. حال اگر هیچ دو رأس دیگری در گراف مجاور یکدیگر نباشند، آنگاه مطابق شکل، مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است، یعنی حداکثر تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای برابر ۷ است.



(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۱   ۲   ۳✓   ۴

-۱۲۲ (امیرحسین ابومحبوب)



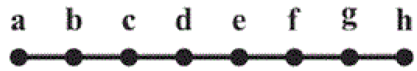
مجموعهٔ $\{c,f,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف G است، پس عدد احاطه‌گری گراف برابر ۳ است. حال با افزودن یال fg، مجموعهٔ $\{c,f\}$ قادر به احاطهٔ تمام رئوس گراف است. پس عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ خواهد بود. در صورت افزودن هر یک از یال‌های ab، di و fb به گراف G، عدد احاطه‌گری گراف باز هم برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۲۳ (امیرحسین ابومحبوب)

عدد احاطه‌گری گراف P_8، برابر $\left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil = 3$ است.



مطابق شکل، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف P_8 عبارت‌اند از:

$\{a,d,g\},\{b,d,g\},\{b,e,g\},\{b,e,h\}$

دقت کنید که در هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم این گراف، یک رأس از میان a و b و یک رأس از میان g و h باید موجود باشد

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۱- (عرفان صادقی)

راه حل اول:

$$y = x^{۲} - ۲ \Rightarrow y' = ۲x$$

شیب خط مماس $= ۴ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow$ طول نقطهٔ مماس : $x = ۲$

$y = x^{۲} - ۲ \xrightarrow{x=۲}$ عرض نقطهٔ تماس : $y = ۲$

خط مماس : $y = ۴x + a \xrightarrow[y=۲]{x=۲} ۲ = ۸ + a \Rightarrow a = -۶$

راه حل دوم:

چون خط بر سهمی مماس است، معادلهٔ $x^{۲} - ۲ = ۴x + a$ باید جواب مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow x^{۲} - ۴x - a - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴a + ۲۴ = ۰ \Rightarrow a = -۶$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۲ تا ۸۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۲- (سیدعادل حسینی)

$$A = g'(۱)f(۱) - f'(۱)g(۱) = \frac{g'(۱)f(۱) - f'(۱)g(۱)}{(f(۱))^{۲}}(f(۱))^{۲}$$

$$= \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'\Bigg|_{x=۱}(f(۱))^{۲}$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^{۸} - ۱۶}{(x^{۲}+۲)(x^{۴}+۴)} = x^{۲} - ۲ \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = ۲x$$

$$\Rightarrow A = ۲(۱)(f(۱))^{۲} = ۲(۱)(۱۵^{۲}) = ۴۵۰$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۳ (یاسین سپهر)

حاصل حد $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (در صورت وجود) را مشتق تابع f نامیده و با $f'(a)$ نشان می‌دهیم.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=\frac{3}{2}$$

$$h(x)=f(2x)\Rightarrow h'(x)=2f'(2x)$$

$$\xrightarrow{x=1} h'(1)=2f'(2)\Rightarrow h'(1)=2\times\frac{3}{2}=3$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۷۷ و ۹۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۸۴ (محمدامین روانبخش)

برای مشتق‌گیری یک طرفه در چنین توابعی، کافی است در همسایگی نقطهٔ موردنظر، مقدار عبارت جزء صحیح و علامت عبارت قدرمطلقی را تعیین کنیم و از تابع به‌دست آمده مشتق بگیریم. بنابراین در این سؤال داریم:

$$x\to(-2)^+ : f(x)=-2x^2+2x+4$$

$$\Rightarrow f'_+(-2)=-4x+2\Big|_{x=-2}=10$$

$$x\to 2^- : f(x)=-x^2+x+2\Rightarrow f'_-(2)=-2x+1\Big|_{x=2}=-3$$

$$\Rightarrow f'_+(-2)-f'_-(2)=10-(-3)=13$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(طاهر دارستانی) -۸۵

$$\begin{cases} ۲-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۲ \\ \text{و} \\ \sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}\ge ۰ \Rightarrow \sqrt{۲-x}\le \sqrt{۲} \Rightarrow ۲-x\le ۲ \Rightarrow x\ge ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=[۰,۲]$$

پس تنها مشتق راست f در $x=۰$ قابل محاسبه است. در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}=+\infty$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(میلاد سجادی‌لاریجانی) -۸۶

$$\text{شرط پیوستگی}: \lim_{x\to ۱^+}f(x)=f(۱)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)$$

$$\Rightarrow ۲a+۳=b+۶\Rightarrow ۲a-b=۳ \qquad (۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳-\dfrac{a}{\sqrt{x^۳}} & ;x\ge ۱ \\ ۲bx & ;x<۱ \end{cases}$$

$$\text{شرط مشتق‌پذیری}: f'_+(۱)=f'_-(۱)$$

$$\Rightarrow ۳-a=۲b\Rightarrow a+۲b=۳ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=\frac{۹}{۵}\,,\, b=\frac{۳}{۵}\Rightarrow \frac{a}{b}=۳$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۸۴ تا ۹۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

(عرفان صادقی)

برای آنکه خط مماس بر منحنی $gof(x)$ موازی محور طول‌ها باشد، باید شیب آن برابر صفر باشد. بنابراین معادلهٔ $(gof)'(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$(gof)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))=۰$$

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} \\ g'(x)=x^{۲}-x-۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times\left(f^{۲}-f-۶\right)=۰ \xrightarrow{f=\sqrt{x}} \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\left(x-\sqrt{x}-۶\right)=۰$$

$$\Rightarrow x-\sqrt{x}-۶=۰ \Rightarrow x-۶=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^{۲}-۱۲x+۳۶=x$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x-۹)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۹ \\ x=۴ \ \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$x=۴$ در معادله صدق نمی‌کند.

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۰ تا ۹۷)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

۸۸- (جهانبخش نیکنام)

شیب خط L، برابر است با مشتق تابع f در $x = ۲$:

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{۱}{۳} \quad و \quad f(۲) = ۱$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)'}{۲\sqrt{f\left(\sqrt{x}\right)}} = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}} f'\left(\sqrt{x}\right)}{۲\sqrt{f\left(\sqrt{x}\right)}}$$

$$\Rightarrow g'(۴) = \frac{\frac{۱}{۴} f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}} = \frac{۱}{۸} f'(۲) = \frac{۱}{۲۴}$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۹- (عرفان صادقی)

$$f(۲x+۱) = g\left(x^۲ + \sqrt{x}\right) \Rightarrow \left(f(۲x+۱)\right)' = \left(g\left(x^۲ + \sqrt{x}\right)\right)'$$

$$\Rightarrow ۲f'(۲x+۱) = \left(۲x + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right) g'\left(x^۲ + \sqrt{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x=۱} ۲f'(۳) = \left(۲ + \frac{۱}{۲}\right) g'(۲)$$

$$\xrightarrow{f'(۳)=۵} ۱۰ = \frac{۵}{۲} g'(۲) \Rightarrow g'(۲) = ۴$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۰ تا ۹۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۰ (عرفان صادقی)

$$f(x)=\sin^{۲}(f'(x))$$

$$\Rightarrow f'(x)=f''(x)\times ۲\sin(f'(x))\times\cos(f'(x))$$

$$=f''(x)\times\sin(۲f'(x))\xrightarrow{x=۰}f'(۰)=f''(۰)\times\sin(۲f'(۰))$$

$$\xrightarrow{f'(۰)=\frac{\pi}{۴}}f'(۰)=f''(۰)\times\underbrace{\sin\left(۲\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right)}_{۱}$$

$$\Rightarrow f''(۰)=f'(۰)=\frac{\pi}{۴}$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۰ تا ۹۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۱ (عرفان صادقی)

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲ax+b\ ,\ f''(x)=۲a$$

$$f''(۳)=۴\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

$$f'(۱)=۲\Rightarrow ۲a+b=۲\xrightarrow{a=۲}b=-۲$$

$$\Rightarrow f'(x)=۴x-۲$$

$$\Rightarrow f'(۲)=۴(۲)-۲=۶$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحهٔ ۹۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۲- (رسول محسنی‌منش)

$$f'(x) = ۴(۲x-۱)\sqrt{x+\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{x+\frac{۱}{۲}}}(۲x-۱)^{۲}$$

حال باید از f' مشتق بگیریم برای محاسبهٔ مقدار مشتق در یک نقطـهٔ خـاص، اگر عامل صفرکننده داشته‌باشیم کافی است فقط از آن عامل مشتق بگیـریم. اگر توان عامل صفرکننده بیش از یک باشد، مشتق در آنجا صفر اسـت. پـس داریم:

$$f''(\frac{۱}{۲}) = ۸\sqrt{x+\frac{۱}{۲}}\Big|_{x=\frac{۱}{۲}} = ۸$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحهٔ ۹۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۳- (علی شهرابی)

$$d = \sqrt{x^{۲} + \left(\sqrt{۷x+۴}\right)^{۲}} = \sqrt{x^{۲}+۷x+۴}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر } d = d' = \frac{۲x+۷}{۲\sqrt{x^{۲}+۷x+۴}}$$

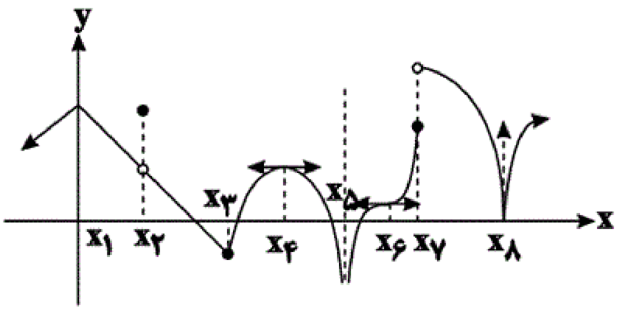
$$\xrightarrow{x=۵} d' = \frac{۱۰+۷}{۲\sqrt{۲۵+۳۵+۴}} = \frac{۱۷}{۱۶}$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(آریان حیدری)

می‌دانیم نقاط بحرانی یک تابع، نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مشتق تـابع در آن‌ها یا صفر است یا موجود نیست. از طرفی انتقال افقی تأثیری بر روی تعداد نقاط بحرانی تابع ندارد، پس کافی است نقاط بحرانی همین نمـودار داده‌شـده را بیابیم.



x_1, x_3 : نقطهٔ گوشه‌ای $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

x_2, x_7 : ناپیوسته $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

x_4, x_6 : دارای خط مماس افقی $\Leftarrow$ f' در آن‌ها برابر صفر است.

x_8 : دارای خط مماس قائم $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

ضمناً دقت کنید که x_5 متعلق به دامنه نبوده و بحرانـی نیسـت. پـس تعـداد نقاط بحرانی ۷ است: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحهٔ ۱۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۵ (محمد ساسانی)

$$f(x)=\left(x^{۲}-۱\right)\sqrt[۳]{x^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=(۲x)\sqrt[۳]{x^{۲}}+\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(x^{۲}-۱)=\frac{۸x^{۲}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۸x^{۲}-۲=۰\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}$$

هم‌چنین در $x=۰$ مشتق وجود ندارد.

پس مجموعهٔ نقاط بحرانی تابع برابر $\left\{-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲}\right\}$ است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحهٔ ۱۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۶ (علی شهرابی)

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{۲\sqrt{x}} & ;x\geq ۱\\ ۲x+۲ & ;x<۱\end{cases}$$

چون $f'(-۱)=۰$ است، $x=-۱$ حتماً بحرانی است. در نتیجه $c=-۱$.

پس تابع f نباید نقطهٔ بحرانی دیگری داشته باشد، بنـابراین f در $x=۱$ باید مشتق مخالف صفر داشته باشد:

$$\text{شرط اول}\xrightarrow{\text{پیوستگی}}a=۱+۲+b\Rightarrow a-b=۳\ (*)$$

$$\text{شرط دوم}\xrightarrow{\text{مشتق‌پذیری}}f'_{+}(۱)=f'_{-}(۱)\Rightarrow\frac{a}{۲}=۲+۲\Rightarrow a=۸$$

$$\xrightarrow{(*)}b=۵$$

$$\Rightarrow a+b+c=۸+۵+(-۱)=۱۲$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحهٔ ۱۱۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۹۷ (کاظم اجلالی)

$$f'(x)=x\left(-x^{۲}+۳x-۲\right)=x(x-۱)(-x+۲)$$

با تعیین علامت f' داریم:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+ ↗	۰ max	− ↘	۰ min	+ ↗	۰ max	− ↘	

بنابراین نمودار تابع f در $x=۰$ و $x=۲$ ماکزیمم نسبی و در $x=۱$ مینیمم نسبی دارد. پس مجموع طول نقاط ماکزیمم نسبی برابر ۲ است.

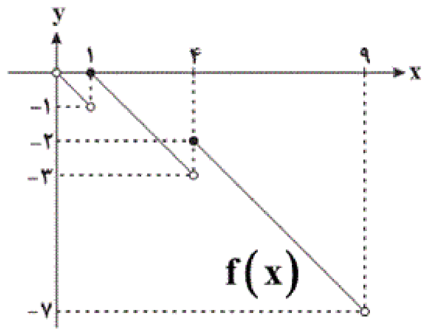
(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۹۸ (میثم فلاح)

می‌توان تابع را در بازهٔ مذکور به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}-x & ;۰<x<۱\\ ۱-x & ;۱\le x<۴\\ ۲-x & ;۴\le x<۹\end{cases}$$



نمودار دارای ۲ ماکزیمم نسبی در $x=۴$ و $x=۱$ و فاقد مینیمم نسبی است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-2x^2+5 \Rightarrow f'(x)=-x^3+4x^2-4x=0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -x(x-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f''(x)=-3x^2+8x-4=-(3x-2)(x-2)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ x=2 \end{cases}$$

با تعیین علامت f' و f'' داریم:

x		0		$\frac{2}{3}$		2	
f''	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$
f	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	عطف	$\searrow$	عطف	$\searrow$

بنابراین نمودار تابع f دارای یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ عطف است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(جوانبخش نیکنام)

$D_f = [-a, a]$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{a^۲ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} = \frac{a^۲ - ۲x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

نقاط بحرانی: $f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{۲}}, \frac{-a}{\sqrt{۲}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(a) = f(-a) = ۰ \\ f\left(\frac{a}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{a^۲}{۲} : \text{ماکزیمم مطلق} \\ f\left(-\frac{a}{\sqrt{۲}}\right) = -\frac{a^۲}{۲} : \text{مینیمم مطلق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^۲}{۲}\right)\left(-\frac{a^۲}{۲}\right) = \frac{-۸۱}{۴} \Rightarrow a^۴ = ۸۱ \Rightarrow a = \pm ۳$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

$$۲x + y = ۴۰ \Rightarrow y = ۲(۲۰ - x)$$

مساحت قطاعی با زاویهٔ θ رادیان از دایره‌ای به شعاع r برابر است با $\frac{۱}{۲}\theta r^۲$. بنابراین داریم:

$$\Rightarrow S(x) = \frac{۱}{۲}x^۲\theta = \frac{۱}{۲}x^۲\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{۱}{۲}xy$$

$$= \frac{۱}{۲}x(۲(۲۰ - x)) = -x^۲ + ۲۰x$$

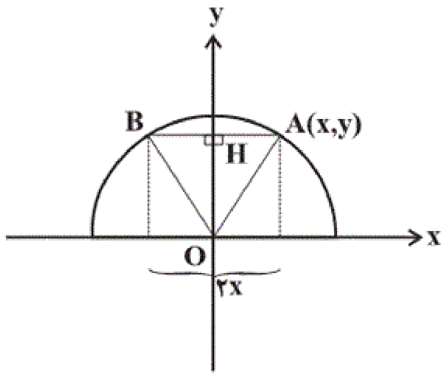
رأس سهمی $S(x)$ نقطهٔ $(۱۰, ۱۰۰)$ است؛ یعنی به ازای شعاع $x = ۱۰$، مساحت قطاع حداکثر مقدار ممکن خواهد بود.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

 (آریان حیدری)

با توجه به ثابت‌بودن کل مساحت سطح محصور بین نمودار تابع و محور xها، برای آن که مساحت قسمت هاشورخورده، کم‌ترین مقدار ممکن شود، لازم است که مساحت مثلث OAB بیش‌ترین مقدار باشد.



اگر مختصات رأس A از مثلث را (x,y) در نظر بگیریم، قاعدهٔ مثلث (AB) برابر ۲x و ارتفاع مثلث (OH) برابر y خواهد بود. پس مساحت این مثلث متساوی‌الساقین برابر است با: $S = \frac{۱}{۲}(AB)(OH) = \frac{۱}{۲}(۲x)(y) = xy$

$$\Rightarrow S(x) = x\sqrt{۲ - x^۲}$$

$$\Rightarrow S'(x) = ۰ \Rightarrow ۱ \times \sqrt{۲ - x^۲} + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۲ - x^۲}} \times x = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(۲ - x^۲) - x^۲}{\sqrt{۲ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲x^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow[\text{مختصات است}]{\text{A در ربع اول}} x = ۱$$

$$\Rightarrow OH = y = \sqrt{۲ - x^۲} \xrightarrow{x=۱} y = ۱$$

حال از آن جا که در مثلث متساوی‌الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند، مقدار میانه نیز برابر ۱ خواهدبود.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

-۱۰۳ (محمدجواد محسنی)

یک تابع پیوسته هنگامی یکنواست که علامت مشتق در آن تغییر نکند.

$$y' = ۶x^{۲} + ۶mx + ۲۴$$

پس باید مشتق عبارت که در اینجا یک تابع درجه دوم است تغییر علامت ندهد، یعنی $۰ \le \Delta$ باشد.

$$\Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow ۳۶\left(m^{۲} - ۱۶\right) \le ۰ \Rightarrow m^{۲} \le ۱۶ \Rightarrow -۴ \le m \le ۴$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۶)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$✓

 (میلاد منصوری)

واضح است که نمودار تـابع $y = xf(x-1)$ در $x = -4$ بـر محـور x هـا مماس است. بنابراین داریم:

$$xf(x-1) = ax^3 + bx^2 + 8x = ax(x+4)^2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + 8 = a(x^2 + 8x + 16)$$

$$= ax^2 + 8ax + 16a \Rightarrow \begin{cases} b = 8a \\ 8 = 16a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 4$$

$$\Rightarrow xf(x-1) = \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 8x \Rightarrow f(x-1) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 4(x+1) + 8 = \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow xf(x) = \frac{1}{2}x^3 + 5x^2 + \frac{25}{2}x$$

$$\Rightarrow (xf(x))' = \frac{3}{2}x^2 + 10x + \frac{25}{2}$$

برای اینکه تابع $y = xf(x)$ نزولی باشد، مشتق آن باید نامثبت باشد:

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + 10x + \frac{25}{2} \le 0 \Rightarrow x \in \left[-5, -\frac{5}{3}\right]$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(عرفان صادقی)

با توجه به نمودار f''، جواب معادلهٔ $f''=0$، مثبت است. بنابراین باید طول نقطهٔ عطف f مثبت باشد. پس گزینهٔ «۱» نادرست است.

هم‌چنین بعد از نقطهٔ عطف، $f''>0$ و تقعر f رو به بالاست و قبل از آن، $f''<0$ و تقعر f رو به پایین است. بنابراین گزینه‌های «۲» و «۴» نیز نادرست و گزینهٔ «۳» پاسخ صحیح خواهد بود.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۶)

۱	۲	۳✓	۴

$$f(x)=x(x+1)|x-1|=\begin{cases} x(x+1)(x-1) & ;x\geq 1 \\ -x(x+1)(x-1) & ;x<1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^3-x & ;x\geq 1 \\ -x^3+x & ;x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & ;x>1 \\ -3x^2+1 & ;x<1 \end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases} 6x & ;x>1 \\ -6x & ;x<1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن نقاط موردنظر، باید معادلهٔ $f''(x)=0$ را حل کنیم:

$$f''(x)=0\Rightarrow\begin{cases} 6x=0\Rightarrow x=0\not>1 \ \text{غ.ق.ق} \\ -6x=0\Rightarrow x=0<1 \end{cases}$$

با تعیین علامت f'' داریم:

		0		1	
f''	+	0	−		+
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$

بنابراین جهت تقعر نمودار f، در نقاط $x=0$ و $x=1$ عوض می‌شود.

تابع در $x=1$، مشتق اول و دوم ندارد.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$-1 \le -\cos x \le 1 \Rightarrow -k^2 \le -k^2 \cos x \le k^2$$

$$2-k^2 \le 2-k^2 \cos x \le 2+k^2$$

برای این که $f''(x)$ همواره نامنفی باشد باید داشته باشیم:

$$2-k^2 \ge 0 \Rightarrow |k| \le \sqrt{2}$$

برای این که $f''(x)$ همواره نامثبت باشد باید داشته باشیم:

$$2+k^2 \le 0$$

که این رابطه امکان‌پذیر نیست.

$$\Rightarrow |k| \le \sqrt{2}$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$✓ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$$f'(x)=\frac{(x^{۲}+a)-۲x(x+۱)}{(x^{۲}+a)^{۲}}=\frac{-x^{۲}-۲x+a}{(x^{۲}+a)^{۲}}$$

طول اکسترمم‌های نمودار تابع، جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ است.

$$\Rightarrow x^{۲}+۲x-a=۰ \qquad (*)$$

با توجه به نمودار، این مقادیر $-b$ و $\frac{۳}{b}$ هستند.

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب طول نقاط}=(-b)\left(\frac{۳}{b}\right)=-۳=-a\Rightarrow a=۳$$

$$\xrightarrow{(*)} x^{۲}+۲x-۳=(x+۳)(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۳=-b\Rightarrow b=۳\\ x=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=۶$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

۱   ۲✓   ۳   ۴

تابع f'، حتماً باید به‌صورت زیر باشد:

$$f'(x)=۸x^{۳}-۲۴x^{۲}+۲ax=۸x(x-x_{۰})^{۲}$$

$$=۸x^{۳}-۱۶x_{۰}x^{۲}+۸x_{۰}^{۲}x$$

که از برابری این دو ضابطه به سادگی نتیجه می‌شود:

$$x_{۰}=\frac{۳}{۲}\ ,\ a=۹$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۴}$

-۱۱۰ *(جهانبخش نیکنام)*

معادله را به‌صورت $x^{۳}-۶x^{۲}=k-۱$ بازنویسی می‌کنیم. برای بررسی جواب‌های این معادله، کافی است نقاط برخورد نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}$ و خط $y=k-۱$ را بررسی کنیم.

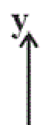
$$f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}=x^{۲}(x-۶)$$

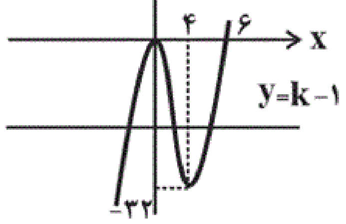
$$f'(x)=۳x^{۲}-۱۲x=۳x(x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow f(۰)=۰\\ x=۴\Rightarrow f(۴)=-۳۲\end{cases}$$

با تعیین علامت f' داریم:

		۰		۴	
f'	+	۰	−	۰	+
	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

بنابراین نمودارهای موردنظر، مطابق شکل زیر هستند:





برای این‌که این دو نمودار، سه نقطهٔ برخورد داشته باشند؛ کافی است

نامعادلهٔ $-۳۲ < k - ۱ < ۰$ برقرار باشد:

$\Rightarrow -۳۱ < k < ۱$

کم‌ترین مقدار صحیح k، -۳۰ است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۴- *(امیرحسین ابومحبوب)*

نقطهٔ $D(۲,۰,-۲)$ بر روی یکی از وجه‌های مکعب به معادلهٔ

$\begin{cases} ۱ \le x \le ۳ \\ -۱ \le y \le ۳ \\ z = -۲ \end{cases}$ قرار دارد ولی روی هیچ‌یک از یال‌های مکعب واقع نیست.

نقطهٔ $A(۱,۳,۲)$ یکی از رأس‌های مکعب (محل تقاطع سه یال) است. نقطهٔ

$B(۳,۱,-۲)$ نیز روی یکی از یال‌های مکعب واقع شده که محل تقاطع دو

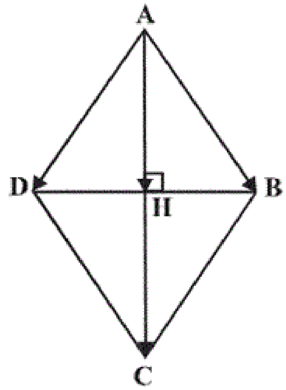
وجه به معادلات $\begin{cases} x = ۳ \\ -۱ \le y \le ۳ \\ -۲ \le z \le ۲ \end{cases}$ و $\begin{cases} ۱ \le x \le ۳ \\ -۱ \le y \le ۳ \\ z = -۲ \end{cases}$ است. نقطهٔ

$C = (۰,-۱,۱)$ خارج مکعب واقع شده است.

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۱۵- (مهرداد ملوندی)



مطابق شکل، قطر بزرگ لوزی حاصل برآیند دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ می‌باشد.

اگر H محل برخورد قطرهای کوچک و بزرگ لوزی باشد، آنگاه داریم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=۲\overrightarrow{AH}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=۲|\overrightarrow{AH}|$$

مثلث ABD مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ واحد است که طول ارتفاع

آن برابر $|\overrightarrow{AH}|=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲)=\sqrt{۳}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=۲|\overrightarrow{AH}|=۲\sqrt{۳}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۶- (رضا عباسی اصل)

$$|۲\vec{a}+۳\vec{b}|=\sqrt{۸۵}\Rightarrow|۲\vec{a}+۳\vec{b}|^{۲}=۸۵$$

$$\Rightarrow ۴|\vec{a}|^{۲}+۱۲\vec{a}.\vec{b}+۹|\vec{b}|^{۲}=۸۵$$

$$\Rightarrow ۱۶+۱۲\vec{a}.\vec{b}+۴۵=۸۵\Rightarrow ۱۲\vec{a}.\vec{b}=۲۴\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=۲$$

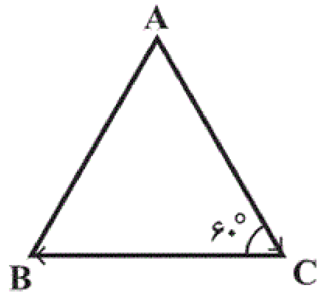
اگر بردار $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر راستای بردار $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۷ (سروش موئینی)



BC، AC و AB، هر سه قطر وجه‌های مکعب هستند، پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و زاویهٔ ACB برابر ۶۰° خواهد بود. چون انتهای بردار $\overrightarrow{AC}$ بر ابتدای بردار $\overrightarrow{CB}$ منطبق است، پس زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$، مکمل زاویهٔ ACB یعنی برابر ۱۲۰° است و داریم:

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CB}|\cos ۱۲۰^\circ$$

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۱۸ (رضا عباسی‌اصل)

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (۴ - m, mn - ۲, ۱ - ۲n)$$

تصویر بردار $\vec{c}$ روی محور x ها برابر ۱ است، بنابراین داریم:

$$۴ - m = ۱ \Rightarrow m = ۳$$

طول تصویر بردار $\vec{c}$ روی صفحهٔ xz برابر ۲ است، در نتیجه داریم:

$$۲ = \sqrt{(۴ - m)^۲ + (۱ - ۲n)^۲} \xrightarrow{m=۳} (۱ - ۲n)^۲ = ۳$$

$$\Rightarrow ۱ - ۴n + ۴n^۲ = ۳ \Rightarrow ۴n^۲ - ۴n - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow n \text{ مجموع مقادیر } = -\frac{(-۴)}{۴} = ۱$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۱۹- (سیدامیر ستوده)

ابتدا دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-۳,-۳,۳)\\ \overrightarrow{AC}=(-۱,-۱,۰)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(۳,-۳,۰)$$

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳^۲+(-۳)^۲}=\frac{۱}{۲}\times۳\sqrt{۲}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۸۱ تا ۸۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۰- (حسین خزایی)

شرط آن‌که چهار نقطهٔ A ، B ، C و D روی یک صفحه باشند آن است که سه بردار $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم‌صفحه باشند، به عبارتی $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=۰$ باشد.

$$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=۰\Rightarrow(-۲,۲,-۲).((۲,۱,-۱)\times(-۱,۱,m-۲))=۰$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-۲ & ۲ & -۲\\ ۲ & ۱ & -۱\\ -۱ & ۱ & m-۲\end{vmatrix}=-۶m+۶=۰\Rightarrow m=۱$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۸۳ و ۸۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

خط هادی سهمی، خطی افقی است، بنابراین سهمی قائم است و با توجه به مختصات کانون، دهانهٔ سهمی رو به بالا است. فاصلهٔ کانون تا خط هادی سهمی، دو برابر فاصلهٔ کانونی سهمی است، بنابراین داریم:

$$۲a = ۵ - ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

با توجه به این که رأس سهمی دقیقاً وسط خط هادی و کانون سهمی قرار دارد، پس $S(۳,۳)$ رأس سهمی است و در نتیجه داریم:

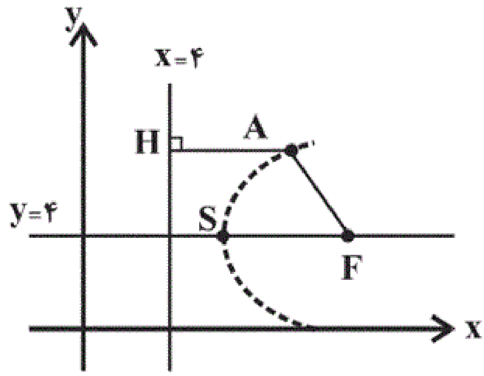
$$\text{معادلهٔ سهمی}: (x-۳)^۲ = ۸(y-۳) \xrightarrow{x=۰} ۹ = ۸(y-۳)$$

$$\Rightarrow y - ۳ = \frac{۹}{۸} \Rightarrow y = \frac{۳۳}{۸}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

(حسین خزایی)



خط هادی سهمی، خطی قائم است، بنابراین سهمی افقی است و چون نقطهٔ A در سمت راست خط هادی است، پس دهانهٔ سهمی رو به راست باز می‌شود. می‌دانیم هر نقطهٔ روی سهمی از خط هادی و کانون آن به یک فاصله است و در ضمن کانون همواره روی محور تقارن سهمی قرار دارد. پس با فرض $F(x,۴)$ داریم:

$$|AH| = |AF| \Rightarrow ۹-۴ = \sqrt{(۹-x)^۲ + (۷-۴)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵ = (۹-x)^۲ + ۹ \Rightarrow ۹-x = \pm ۴ \Rightarrow x = ۱۳ \text{ یا } ۵$$

✓ $\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

اگر a فاصلهٔ کانونی، d قطر قاعده و h عمق (گودی) یک آینهٔ سهموی

باشد، آنگاه رابطهٔ $a=\frac{d^۲}{۱۶h}$ برقرار است. داریم:

$$\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{\frac{d_۱^۲}{۱۶h_۱}}{\frac{d_۲^۲}{۱۶h_۲}}=\left(\frac{d_۱}{d_۲}\right)^۲\times\left(\frac{h_۲}{h_۱}\right)=\left(\frac{۶۰}{۱۰۰}\right)^۲\times\frac{۴۰}{۳۰}$$

$$=\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲\times\frac{۴}{۳}=\frac{۹}{۲۵}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۱۲}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{a_۲=a}\frac{a_۱}{a}=۰/۴۸\Rightarrow a_۱=۰/۴۸a$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۵۸)

۱   ۲✓   ۳   ۴