



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دیفرانسیل و انتگرال ، مشتق تابع - ۳ سوال

۸۱- خط $y = 4x + a$ بر نمودار تابع $y = x^2 - 2$ مماس است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۶ (۴) -۲

۸۲- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3}{2}$ و $h(x) = f(2x)$ باشد، حاصل $h'(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۳- نقطه $M(x, y)$ روی نمودار تابع $y = \sqrt{7x+4}$ در حال حرکت است. اگر d فاصله نقطه M از مبدأ مختصات باشد، آهنگ

لحظه‌ای تغییر d در نقطه $x = 5$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{17}{16}$ (۳) $\frac{19}{16}$ (۴) $\frac{21}{16}$

دیفرانسیل و انتگرال ، کاربرد مشتق - ۲۱ سوال

۸۴- در مورد تابع $f(x) = \sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{2-x}}$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $f'(0) = 0$ (۲) $f'_-(0) = +\infty$ (۳) $f'_+(0) = +\infty$ (۴) $f'_+(0) = -\infty$

۸۵- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{\sqrt{x}} + 3x & ; x \geq 1 \\ bx^2 + 6 & ; x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

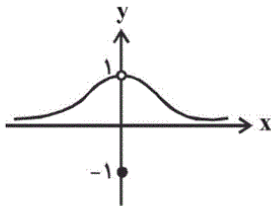
- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۸۶- تابع $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{1+x}{x} \right] - \left[\frac{1-x}{x} \right] & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است).

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) بی شمار (۴) صفر

۸۷- اگر نمودار تابع f مانند شکل زیر باشد، مقدار مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ در $x = 0$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -۱

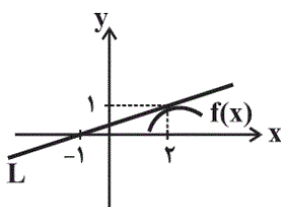
(۴) مشتق پذیر نیست.

۸۸- اگر $f(x) = \sin^2(f'(x))$ و $f'(0) = \frac{\pi}{4}$ باشد، مقدار $f''(0)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$

(۳) π (۴) $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

۸۹- در شکل زیر خط L بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=2$ مماس است. شیب خط مماس بر نمودار تابع



$g(x) = \sqrt{f(\sqrt{x})}$ در $x=4$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{12}$

(۳) $\frac{1}{24}$ (۴) $\frac{1}{48}$

۹۰- اگر $y = (x^2 + x)^{10} - x^{20}$ باشد، حاصل $y^{(27)}$ همواره کدام است؟

(۱) $10 \times 28! x$ (۲) $10 \times 29! x$

(۳) صفر (۴) $10 \times 27! x$

۹۱- با توجه به رابطه $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ ، حاصل $\frac{d^2y}{dx^2}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{x}{2y^5}$

(۱) $\frac{x}{2y^5}$

(۴) $\frac{-x}{y^5}$

(۳) $\frac{x}{y^5}$

۹۲- اگر $f'(x) + 2f(x) = 1$ و f تابعی وارون پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد، $(f^{-1})'(2)$ همواره کدام است؟

(۲) $\frac{1}{1-3f(2)}$

(۱) $1-3f(2)$

(۴) -3

(۳) $-\frac{1}{3}$

۹۳- معادله خط قائم بر نمودار تابع $y = 4 \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \pi$ در نقطه تلاقی آن با محور x ها کدام است؟

(۲) $y = 2x - 2$

(۱) $y = x - 1$

(۴) $y = -x + 1$

(۳) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

۹۴- اگر $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & ; x \leq 0 \\ \ln(x^2 + 1) & ; x > 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $f'_+(0) - f'_-(0)$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) -۲

(۳) -۱

۹۵- تابع $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & ; x \geq 1 \\ x^2 + 2x + b & ; x < 1 \end{cases}$ فقط یک نقطه بحرانی به طول $x = c$ دارد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

(۲) ۱۰

(۱) ۹

(۴) ۱۲

(۳) ۱۱

۹۶- حاصل ضرب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$ برابر با $-\frac{81}{4}$ است. a کدام یک از مقادیر زیر می تواند باشد؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) ۹

۹۷- با ۴۰ متر سیم می خواهیم دور یک زمین به شکل قطاع یک دایره را محصور کنیم. شعاع دایره کدام باشد تا مساحت زمین بیشترین مقدار ممکن باشد؟

- (۱) ۵
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

۹۸- در چند نقطه از نمودار تابع $f(x) = x(x+1)|x-1|$ جهت تقعر تغییر می کند؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۹۹- نمودار تابع $f(x) = x^2 + k^2 \cos x$ نقطه عطف ندارد. حدود k کدام است؟

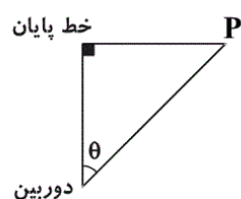
- (۱) $|k| \leq 1$
(۲) $|k| \leq \sqrt{2}$
(۳) $|k| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
(۴) $|k| \geq \frac{1}{2}$

۱۰۰- کدام گزینه در مورد نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 5$ صحیح است؟

- (۱) دو ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی دارد.
(۲) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.
(۳) یک ماکزیمم نسبی و دو عطف دارد.
(۴) یک مینیمم نسبی و دو عطف دارد.

۱۰۱- یک دوربین تلویزیونی در ۵ متری خط پایان روی یک مسیر مستقیم قرار دارد و در حال تصویربرداری از دوندۀ P است که در

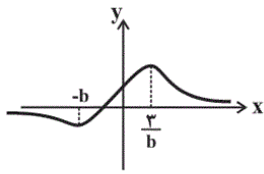
۵ متری خط پایان، دونده با سرعت $10 \frac{m}{s}$ می دود. اندازه سرعت چرخش زاویه دوربین در این لحظه کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۳
(۳) ۱
(۴) ۲

۱۰۲- معادله $x^2 - 6x^2 - k + 1 = 0$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. کمترین مقدار صحیح k کدام است؟

- (۱) -۳۰
(۲) -۳۱
(۳) -۳۲
(۴) -۳۳



۱۰۳- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+a}$ به صورت مقابل باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

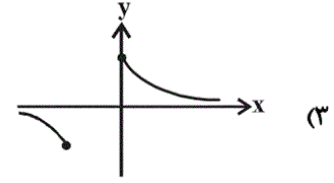
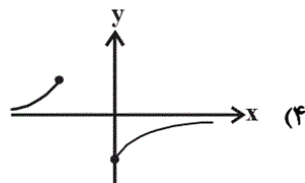
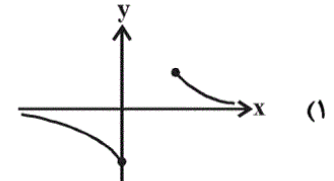
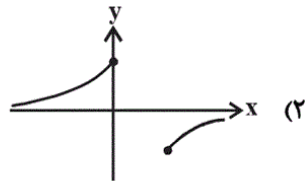
(۲) ۶

(۱) صفر

(۴) -۶

(۳) ۲

۱۰۴- نمودار تابع $f(x) = \sin^{-1} \frac{1}{1-x}$ کدام است؟



دیفرانسیل و انتگرال ، انتگرال - ۶ سوال

۱۰۵- اگر $\sum_{n=1}^{40} \frac{n}{n+1} = A$ باشد، حاصل $\sum_{n=2}^{41} \frac{n+1}{n}$ کدام است؟

(۲) $40-A$

(۱) $40+A$

(۴) $80-A$

(۳) $80+A$

۱۰۶- مجموع بالای تابع $f(x) = e^x$ در بازه $[-2, 2]$ به ازای $n=4$ کدام است؟

(۲) $\frac{e^2 + e^2 + e + 1}{e^2}$

(۱) $\frac{e^2 + 1}{e^2}$

(۴) $\frac{e^2 + e^2 + e + 1}{e}$

(۳) $\frac{e^2 + e + 1}{e}$

۱۰۷- اگر U_n مجموع بالای تابع $f(x) = |x-1|$ در بازه $[0, 2]$ باشد، حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۸- مقدار متوسط تابع فرد و پیوسته f در بازه $[-1, 3]$ برابر ۵ است. با توجه به تساوی $\int_1^3 (a + f(x)) dx = 17$ ، مقدار a کدام است؟
(a مقداری ثابت است.)

(۱) ۱ (۲) -۱

(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۱۰۹- مساحت سطح زیر نمودار $f(x) = \sqrt{(1+\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}$ در بازه $(1, 4)$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) ۱

(۳) ۴ (۴) صفر

۱۱۰- اگر $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

(۱) $y = 2x - 2$ (۲) $y = 2x - 1$

(۳) $2y = x - 2$ (۴) $2y = x - 1$

هندسه‌ی تحلیلی، مقاطع مخروطی - ۲ سوال

۱۱۳- خط $y = 2x + 5$ مجانب یک هذلولی است که محور کانونی آن موازی محور y ها قرار دارد. اگر نقطه $(-2, 1)$ یکی از کانون‌های

این هذلولی باشد، مجانب دیگر این هذلولی از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

(۱) $(3, 2)$ (۲) $(2, 3)$

(۳) $(1, 4)$ (۴) $(4, 1)$

۱۱۴- معادله تصویر مقطع مخروطی $x^2 - xy + y^2 = 1$ تحت اثر ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$x^2 + 3y^2 = 2 \quad (2)$$

$$3x^2 + y^2 = 2 \quad (1)$$

$$3x^2 + y^2 = 1 \quad (4)$$

$$x^2 + 3y^2 = 1 \quad (3)$$

هندسه‌ی تحلیلی، بردار - ۲ سوال

۱۱۱- به ازای کدام مقدار m ، چهار نقطه $A = (1, 0, 2)$ ، $B = (-1, 2, 0)$ ، $C = (3, 1, 1)$ و $D = (0, 1, m)$ روی یک صفحه قرار دارند؟

$$1 \quad (2)$$

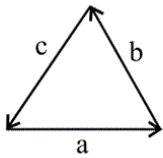
$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

۱۱۲- مطابق شکل بردارهای a ، b و c اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. اگر برای این سه بردار، رابطه

$$(a \times b) + (b \times c) + (c \times a) = 36$$



$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس، دترمینان و دستگاه

۱۱۵- اگر برای ماتریس مربعی A از مرتبه ۳، رابطه زیر برقرار باشد، حاصل $m + n$ کدام است؟

$$(I + A)(I + A^t) = \begin{bmatrix} 6 & 1-2m & 1 \\ m-5 & 2 & -1 \\ 2n-1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

۱۱۶- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 1 & b & -2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر AB ماتریسی بالا مثلثی باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

$$-4 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$-8 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

۱۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^T B^T$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

هندسه‌ی تحلیلی، دستگاه‌های معادلات خطی

۱۱۸- اگر $(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل دترمینان ماتریس $A(A - I)^{-1}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۹ (۴) -۸

۱۱۹- دستگاه معادلات $\begin{cases} x + ay - bz = 0 \\ ax - y - cz = 0 \\ bx - cy + z = 0 \end{cases}$ دارای کدام ویژگی است؟

(۱) همواره جواب غیرصفر دارد.

(۲) به ازای بعضی از مقادیر a ، b و c جواب غیرصفر دارد.

(۳) فقط جواب صفر دارد.

(۴) همواره فاقد جواب است.

۱۲۰- در یک دستگاه معادلات خطی، ماتریس افزوده $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ -1 & b & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & c \end{array} \right]$ پس از انجام اعمال سطری مقدماتی به ماتریس

تبدیل شده است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟ $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$

(۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۹ (۴) -۱۱

ریاضیات گسسته، ترکیبات - ۴ سوال

۱۲۱- اگر $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه چند ماتریس مانند X وجود دارد که در رابطه $F < X < E$ صدق می‌کند؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۲۳- چند رابطه هم‌ارزی روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ می‌توان تعریف کرد به طوری که فقط شامل یکی از دو زوج مرتب (a, b) و (a, c) باشند؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۲۴- چه تعداد از اعضای مجموعه $M = \{31, 32, 33, \dots, 300\}$ نسبت به ۲۱ اول‌اند؟

(۱) ۱۴۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۵۵ (۴) ۱۸۰

۱۲۵- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ، چند جواب صحیح با شرط $x_i \geq i+1$ ($i=1, 2, 3$) دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

ریاضیات گسسته ، احتمال - ۵ سوال

۱۲۶- عددی به تصادف از بین اعداد $1, 2, \dots, 99$ انتخاب می‌شود. اگر عدد انتخابی مضرب ۳ باشد، با کدام احتمال مضرب ۴ نیست؟

(۱) $\frac{8}{11}$ (۲) $\frac{8}{33}$ (۳) $\frac{25}{33}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۲۷- یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a, b, c, d است. اگر $P(\{a, b\}) = \frac{1}{3}$ و $P(\{a, c\}) = \frac{2}{5}$ و دو پیشامد $\{a, b\}$ و $\{a, c\}$ مستقل از هم باشند، $P(d)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{4}{15}$

۱۲۸- دو ظرف داریم که در ظرف اول، ۷ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در ظرف دوم، ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی موجود است. از ظرف اول، یک مهره به تصادف بیرون آورده و در ظرف دوم می‌گذاریم، سپس از ظرف دوم مهره‌ای به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره بیرون آورده شده از ظرف دوم، هم‌رنگ مهره بیرون آورده شده از ظرف اول باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{0}{5}$ (۲) $\frac{0}{53}$ (۳) $\frac{0}{54}$ (۴) $\frac{0}{55}$

۱۲۹- یک نقطه به تصادف از محدوده $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که طول این نقطه از نصف عرضش کم‌تر باشد کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۳۰- اگر $x = 1, 2, \dots, 5$, $P(X=x) = \frac{\binom{6}{x}}{a}$ یک تابع احتمال باشد، مقدار $P(X=3)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{2}{9}$ (۳)

$\frac{10}{31}$ (۲)

$\frac{5}{16}$ (۱)

ریاضیات گسسته ، مجموعه ، ضرب دکارتی و رابطه

۱۲۲- چه تعداد نقطه با مختصات صحیح در صفحه مختصات وجود دارد، به گونه‌ای که در رابطه

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x, y \geq -x\}$$
 صدق نماید؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

(عرفان صادقی)

۸۱- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

راه حل اول:

$$y = x^2 - 2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$x = 2: \text{طول نقطه تماس} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = 4$$

$$y = 2: \text{عرض نقطه تماس} \xrightarrow{x=2} y = x^2 - 2 \Rightarrow 2 = 4 - 2 \Rightarrow 2 = 2$$

$$y = 4x + a \xrightarrow[\substack{x=2 \\ y=2}]{\substack{x=2 \\ y=2}} 2 = 8 + a \Rightarrow a = -6$$

راه حل دوم:

چون خط بر سهمی مماس است، معادله $x^2 - 2 = 4x + a$ باید جواب مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow x^2 - 4x - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4a + 24 = 0 \Rightarrow a = -6$$

(مسابان - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(یاسین سپهر)

۸۲- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ را (در صورت وجود) مشتق تابع f نامیده و با $f'(a)$ نشان می‌دهیم.

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = \frac{3}{2}$$

$$h(x) = f(2x) \Rightarrow h'(x) = 2f'(2x)$$

$$\xrightarrow{x=1} h'(1) = 2f'(2) \Rightarrow h'(1) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

(مسابان - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۹ و ۱۸۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شهرابی)

$$d = \sqrt{x^2 + (\sqrt{7x+4})^2} = \sqrt{x^2 + 7x + 4}$$

$$\Rightarrow d \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر } = d'(x) = \frac{2x+7}{2\sqrt{x^2+7x+4}}$$

$$\xrightarrow{x=5} d'(x) = \frac{10+7}{2\sqrt{25+35+4}} = \frac{17}{16}$$

(مسابان- مشتق توابع: صفحه‌های ۱۷۵ تا ۱۸۲)

۴

۳

۲✓

۱

$$\Rightarrow D_f = [0, 2]$$

پس تنها مشتق راست f در $x=0$ قابل محاسبه است. در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sqrt{2} - \sqrt{2-x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2-x}}} = +\infty$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶)

۴

۳✓

۲

۱

$$\text{شرط پیوستگی: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\Rightarrow 2a + 3 = b + 6 \Rightarrow 2a - b = 3 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 - \frac{a}{\sqrt{x^3}} & ; x \geq 1 \\ 2bx & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\text{شرط مشتق پذیری: } f'_+(1) = f'_-(1)$$

$$\Rightarrow 3 - a = 2b \Rightarrow a + 2b = 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a = \frac{9}{5}, b = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = 3$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۳۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(محمدرضا شوکتی بیرق)

$$\left[\frac{1+x}{x}\right] - \left[\frac{1-x}{x}\right] = \left[\frac{1}{x} + 1\right] - \left[\frac{1}{x} - 1\right] = \left[\frac{1}{x}\right] + 1 - \left[\frac{1}{x}\right] + 1 = 2$$

بنابراین تابع داده شده همان تابع ثابت $y = 2$ بوده که در تمام نقاط

مشتق پذیر است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

چون f در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است، با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عرفان صادقی)

$$f(x) = \sin^2(f'(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = f''(x) \times 2 \sin(f'(x)) \times \cos(f'(x))$$

$$= f''(x) \times \sin(2f'(x)) \xrightarrow{x=0} f'(0) = f''(0) \times \sin(2f'(0))$$

$$\xrightarrow{f'(0)=\frac{\pi}{4}} f'(0) = f''(0) \times \underbrace{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}_1$$

$$\Rightarrow f''(0) = f'(0) = \frac{\pi}{4}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

شیب خط L ، برابر است با مشتق تابع f در $x = 2$:

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(f(\sqrt{x}))'}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}}$$

$$\Rightarrow g'(4) = \frac{\frac{1}{4} f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = \frac{1}{8} f'(2) = \frac{1}{24}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عمید ستاری)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$\Rightarrow y = (x^{28} + x)^{10} - x^{30}$$

$$= (x^{30} + 10x^{28} + 45x^{26} + \dots + x^{10}) - x^{30}$$

$$\Rightarrow y = 10x^{28} + 45x^{26} + \dots + x^{10}$$

$$\Rightarrow y^{(27)} = 10 \times 28! x + 0$$

نکته: اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، داریم:

$$y = x^n \Rightarrow \begin{cases} y^{(n)} = n! \\ y^{(n-1)} = n!x \end{cases}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{-3x^2}{2y^2} \Rightarrow y' = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$y'' = -\left(\frac{2xy^2 - 2yy'x^2}{y^4}\right)$$

$$y'' = \frac{-2xy^2 + 2x^2y\left(\frac{-x^2}{y^2}\right)}{y^4} = \frac{-2xy^3 - 2x^3}{y^4}$$

$$= \frac{-2x(y^3 + x^2)}{y^4} = \frac{-2x\left(\frac{1}{2}\right)}{y^4} = \frac{-x}{y^4}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

☐ ۴ ✓

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(قاسم کتابچی)

۹۲ - فصل ۳

$$(2, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, 2) \in f$$

$$f'(x) + 2f(x) = 1 \Rightarrow f'(a) + 2f(a) = 1 \xrightarrow{f(a)=2} f'(a) = -3$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(a)} \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{-1}{3}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

☐ ۴

☒ ۳ ✓

☐ ۲

☐ ۱

$$y = 4 \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \pi$$

$$y = 0 \Rightarrow \tan^{-1}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$\Rightarrow A(1, 0)$: محل تلاقی منحنی و محور x ها

$$y' = \frac{4}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} y'(1) = 1 \Rightarrow m = 1$$
 شیب خط مماس: $m = 1$

$\Rightarrow m' = -1$: شیب خط قائم

$$\Rightarrow \text{معادله خط قائم: } y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x^2} + x \times 2x \times e^{x^2} & ; x < 0 \Rightarrow f'_-(0) = e^0 + 0 = 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & ; x > 0 \Rightarrow f'_+(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(0) - f'_-(0) = 0 - 1 = -1$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۵)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & ; x \geq 1 \\ 2x+2 & ; x < 1 \end{cases}$$

چون $f'(-1) = 0$ است، $x = -1$ حتماً بحرانی است. در نتیجه $c = -1$.

پس تابع f نباید نقطه بحرانی دیگری داشته باشد، بنابراین f در $x = 1$ باید پیوسته و مشتق مخالف صفر داشته باشد:

$$\xrightarrow{\text{پیوستگی}} a = 1 + 2 + b \Rightarrow a - b = 3 \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق پذیری}} f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 + 2 \Rightarrow a = 8$$

$$\xrightarrow{(*)} b = 5$$

$$\Rightarrow a + b + c = 8 + 5 + (-1) = 12$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۷۰ و ۱۷۱)

۴

 ✓

۳

۲

۱

(جهانبفش نیکنام)

$$D_f = [-|a|, |a|]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{|a|}{\sqrt{2}}, \frac{-|a|}{\sqrt{2}} : \text{نقاط بحرانی}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(|a|) = f(-|a|) = 0 \\ f\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a^2}{2} : \text{ماکزیمم مطلق} \\ f\left(-\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{a^2}{2} : \text{مینیمم مطلق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{2}\right)\left(-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{-81}{4} \Rightarrow a^4 = 81 \Rightarrow a = \pm 3$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۶۸ تا ۱۷۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}x^2\theta \xrightarrow{\theta = \frac{y}{x}} S = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}xy$$

$$= \frac{1}{2}x(2(20 - x)) = -x^2 + 20x$$

رأس سهمی $S(x)$ نقطه $(10, 100)$ است؛ یعنی به ازای شعاع $x = 10$ ، مساحت قطاع حداکثر مقدار ممکن خواهد بود.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$f(x) = x(x+1)|x-1| = \begin{cases} x(x+1)(x-1) & ; x \geq 1 \\ -x(x+1)(x-1) & ; x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^3 - x & ; x \geq 1 \\ -x^3 + x & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & ; x > 1 \\ -3x^2 + 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x & ; x > 1 \\ -6x & ; x < 1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن نقاط مورد نظر، باید معادله $f''(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \Rightarrow x = 0 > 1 \\ -6x = 0 \Rightarrow x = 0 < 1 \end{cases} \text{ غ.ق.}$$

		۰		۱	
f''	+	۰	-	۰	+
f	∪	∩	∪	∩	∪

با تعیین علامت f'' داریم:

بنابراین جهت تقعر نمودار f ، در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ عوض می‌شود.

تابع در $x = 1$ ، مشتق اول و دوم ندارد.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

توجه کنید که:

$$f'(x) = 2x - k^2 \sin x \Rightarrow f''(x) = 2 - k^2 \cos x$$

چون نمودار تابع f نقطه عطف ندارد پس علامت $f''(x)$ باید همواره نامنفی باشد یا باید همواره نامثبت باشد.

$$-1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow -k^2 \leq -k^2 \cos x \leq k^2$$

$$2 - k^2 \leq 2 - k^2 \cos x \leq 2 + k^2$$

برای این که $f''(x)$ همواره نامنفی باشد باید داشته باشیم:

$$2 - k^2 \geq 0 \Rightarrow |k| \leq \sqrt{2}$$

برای این که $f''(x)$ همواره نامثبت باشد باید داشته باشیم:

$$2 + k^2 \leq 0 \Rightarrow |k| \leq \sqrt{2}$$

که این رابطه امکان پذیر نیست.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳

۲✓

۱

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x = 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f''(x) = -3x^2 + 8x - 4 = -(3x-2)(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

با تعیین علامت f' و f'' داریم:

x		0		$\frac{2}{3}$		2	
f''	-	⋮	-	∘	+	∘	-
f'	+	∘	-	⋮	-	∘	-
f	↗	⋮	↘	⋮	↘	⋮	↘
		max نسبی		عطف		عطف	

بنابراین نمودار تابع f دارای یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ عطف است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

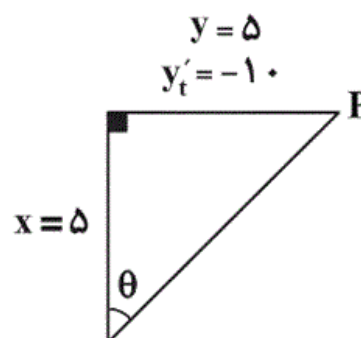
☐ ۱

با توجه به شکل، در لحظه‌ای که دونده در فاصله ۵ متری خط پایان است، سه نقطه موردنظر تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه می‌دهند. پس

$\theta = 45^\circ$. بنابراین داریم:

$$\tan \theta = \frac{y}{5} \Rightarrow \theta'_t (1 + \tan^2 \theta) = \frac{y'_t}{5} \xrightarrow{\hat{\theta}=45^\circ}$$

$$\theta'_t (1 + \tan^2 45^\circ) = \frac{-1}{5} \Rightarrow 2\theta'_t = -2 \Rightarrow \theta'_t = -1 \Rightarrow |\theta'_t| = 1$$



(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۴

۳ ✓

۲

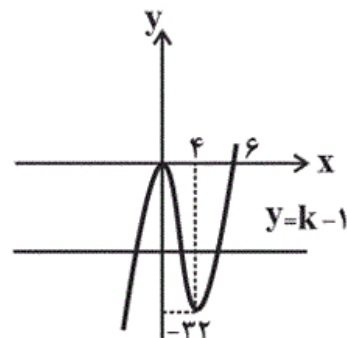
۱

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow f(0)=0 \\ x=4 \Rightarrow f(4)=-32 \end{cases}$$

با تعیین علامت f' داریم:

		۰		۴	
f'	+	۰	-	۰	+
	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

بنابراین نمودارهای موردنظر، مطابق شکل زیر هستند:



برای این که این دو نمودار، سه نقطه برخورد داشته باشند کافی است نامعادله

$$-32 < k-1 < 0$$

برقرار باشد:

$$\Rightarrow -31 < k < 1$$

بنابراین کمترین مقدار صحیح k ، برابر -30 است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f'(x) = \frac{(x^2 + a) - 2x(x+1)}{(x^2 + a)^2} = \frac{-x^2 - 2x + a}{(x^2 + a)^2}$$

طول اکسترمم‌های نمودار تابع، جواب‌های معادله $f'(x) = 0$ هستند.

$$\Rightarrow x^2 + 2x - a = 0 \quad (*)$$

با توجه به نمودار، این مقادیر $-b$ و $\frac{3}{b}$ هستند.

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب طول نقاط} = (-b) \left(\frac{3}{b} \right) = -3 = -a \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{(*)} x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 = -b \Rightarrow b = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 6$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴

۳

۲✓

۱

چون $f(0) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$ است، گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست هستند.

برای دامنه تابع خواهیم داشت:

$$\left| \frac{1}{1-x} \right| \leq 1 \Rightarrow |1-x| \geq 1 \Rightarrow |x-1| \geq 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (0, 2)$$

پس فقط گزینه (۲) می‌تواند درست باشد.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{40} \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{40} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{40} 1 - \sum_{n=1}^{40} \frac{1}{n+1} \\ &= 40 - \sum_{n=1}^{40} \frac{1}{n+1} = 40 - \sum_{n=2}^{41} \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{41} \frac{1}{n} = 40 - A \quad (*) \\ \sum_{n=2}^{41} \frac{n+1}{n} &= \sum_{n=2}^{41} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{41} 1 + \sum_{n=2}^{41} \frac{1}{n} \\ &\stackrel{(*)}{=} 40 + 40 - A = 80 - A \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

f صعودی اکید است: $f'(x) = e^x > 0$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2

$$U_4(f) = \left(\frac{1}{e} + 1 + e + e^2\right)(1) = \frac{e^3 + e^2 + e + 1}{e}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۳۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(محمدرضا شوکتی بیرق)

می‌دانیم $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \int_0^2 |x-1| dx$ است، پس کافی است حاصل انتگرال

یا مساحت بین نمودار تابع f و محور x ها را در بازه $[0, 2]$ حساب کنیم.

مطابق شکل رسم شده این مساحت برابر ۱ می‌باشد.

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\bar{f} = \frac{\int_{-1}^3 f(x) dx}{4} = 5 \Rightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx = 20$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 20 \xrightarrow{f \text{ فرد}} \int_1^3 f(x) dx = 20$$

$$\int_1^3 (a + f(x)) dx = 17 \Rightarrow \int_1^3 a dx + \int_1^3 f(x) dx = 17$$

$$\Rightarrow a(3-1) + 20 = 17 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۵ تا ۲۳۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(هادی پلور)

-۱۰۹

$$f(x) = \sqrt{1+x+2\sqrt{x}-4\sqrt{x}} = \sqrt{1-2\sqrt{x}+x} = \sqrt{(1-\sqrt{x})^2} \\ = |1-\sqrt{x}|$$

$$S = \int_1^4 \sqrt{(1+\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}} dx = \int_1^4 |1-\sqrt{x}| dx$$

$$= \int_1^4 (\sqrt{x}-1) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{3} (4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) - (4-1) = \frac{5}{3}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۵ تا ۲۳۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{شیب خط مماس: } m = f'(x) = 1 \times \frac{1}{1+x^3} \xrightarrow{x=1} m = \frac{1}{2} \\ f(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^3} = 0 \Rightarrow A(1, 0): \text{نقطه تماس} \end{array} \right.$$

بنابراین معادله خط مماس برابر است با:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y = x - 1$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{یادآوری:}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۴۱ تا ۲۴۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

$W = (1, 7)$ مرکز هذلولی است. از طرفی شیب مجانب‌ها قرینه هم

است، پس $m = -2$ شیب مجانب دیگر هذلولی است.

بنابراین معادله مجانب دیگر هذلولی که از W نیز می‌گذرد عبارت است از:

$$y - 7 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 9$$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه $(4, 1)$ روی این مجانب واقع است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر $M = (x, y)$ نقطه‌ای از این مقطع مخروطی و $M' = (x', y')$ تصویر آن تحت ماتریس A باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = x' \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y = \sqrt{2}x' \\ x+y = \sqrt{2}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - x') \end{cases}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{تحت ماتریس } A} \frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(x' + y')(y' - x') + \frac{1}{2}(y' - x')^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3x'^2 + y'^2 = 2$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

شرط آن که چهار نقطه A, B, C و D روی یک صفحه باشند آن است که سه بردار $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ هم‌صفحه باشند، به عبارتی $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0$ باشد.

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0 \Rightarrow (-2, 2, -2) \cdot ((2, 1, -1) \times (-1, 1, m-2)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m-2 \end{vmatrix} = -6m + 6 = 0 \Rightarrow m = 1$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به شکل، مجموع سه بردار که اضلاع یک مثلث هستند برابر بردار صفر است ($a + b + c = 0$)، پس $a \times b = b \times c = c \times a$ (تمرین ۷ صفحه ۳۳). بنابراین هر جمله سمت چپ تساوی داده شده برابر است با:

$$(a \times b) \cdot (a \times b) = |a \times b|^2$$

لذا داریم:

$$3 |a \times b|^2 = 36 \Rightarrow |a \times b| = 2\sqrt{3} \Rightarrow |a| |b| \sin \alpha = 2\sqrt{3}$$

از آنجا که $|a| = |b|$ و $\alpha = 120^\circ$ (زاویه بین دو بردار a و b)، نتیجه می شود که:

$$\Rightarrow |a|^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow |a| = 2$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه های ۲۵ تا ۳۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

داریم:

$$(I + A)(I + A^t) = I + A + A^t + AA^t$$

ماتریس‌های I ، $A + A^t$ و AA^t هر سه متقارن‌اند و مجموع چند ماتریس

مقارن، ماتریسی متقارن است، پس ماتریس

$$\begin{bmatrix} 6 & 1-2m & 1 \\ m-5 & 2 & -1 \\ 2n-1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مقارن

است و داریم:

$$\begin{cases} 1-2m = m-5 \Rightarrow m=2 \\ 2n-1 = 1 \Rightarrow n=1 \end{cases} \Rightarrow m+n = 2+1 = 3$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۴

۳✓

۲

۱

می دانیم که هر ماتریس بالامثلثی 3×3 به صورت $\begin{bmatrix} x & m & n \\ 0 & y & p \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ است، پس

کافی است تنها درایه‌هایی که باید برابر صفر شوند را حساب کنیم. برای این

منظور سطرهای دوم و سوم ماتریس A را در ستون اول B و سطر سوم A را

در ستون دوم B ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 1 & b & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ a-6 & \bigcirc & \bigcirc \\ 0 & 6+3b & \bigcirc \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط بالامثلثی بودن}} \begin{cases} a-6=0 \Rightarrow a=6 \\ 6+3b=0 \Rightarrow b=-2 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=6-2=4$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

ماتریس‌های A و B به ترتیب ماتریس‌های دوران $-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ هستند.

داریم:

$$A = R_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = R_{\frac{\pi}{4}} = R_{-\pi}$$

$$B = R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = R_{-\frac{\pi}{6}} = R_{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow A^T B^T = R_{-\pi} \cdot R_{\frac{\pi}{2}} = R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\Rightarrow A(A-I)^{-1} = (A-I)^{-1} + I$$

$$\Rightarrow A(A-I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 داریم:

$$\left| A(A-I)^{-1} \right| = (0 + 2 + 0) - (-3 + 0 - 4)$$

$$= 2 + 3 + 4 = 9$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل می دهیم و حاصل آن را به دست می آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ a & -1 & -c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر اول}} 1(-1 - c^2) - a(a + bc) - b(-ac + b)$$

$$= -(a^2 + b^2 + c^2 + 1) < 0$$

حاصل این دترمینان هیچ وقت برابر صفر نمی شود، پس این دستگاه معادلات خطی همگن، فقط جواب صفر دارد.

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات فضا؛ صفحه های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(نصیر ممبئی نژاد)

$$\begin{cases} -x = 2 \Rightarrow x = -2 \\ 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -x + by - 2z = -2 \\ y + 3z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 4 - 3 = a \Rightarrow a = -1 \\ 2 + 2b - 6 = -2 \Rightarrow b = 1 \\ 2 + 9 = c \Rightarrow c = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 11$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات فضا؛ صفحه های ۱۴۶ تا ۱۴۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} << \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_X << \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=c=e=f=1 \\ g=i=0 \end{cases}$$

هر یک از درایه‌های b ، d و h می‌توانند ۰ یا ۱ باشند، بنابراین طبق اصل

ضرب، تعداد کل حالات برابر $2^3 = 8$ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

برای مجموعه A ، هر افراز متناظر با یک رابطه هم‌ارزی روی A است.

افرازهایی دارای ویژگی موردنظر سؤال هستند که در آنها a و b در یک

زیرمجموعه قرار داشته و c در آن زیرمجموعه نباشد یا a و c در یک

زیرمجموعه بوده و b در آن زیرمجموعه قرار نداشته باشد. این افرازها

عبارت‌اند از:

$\{\{a,b\},\{c,d\}\},\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\},\{\{a,b,d\},\{c\}\}$

$\{\{a,c\},\{b,d\}\},\{\{a,c\},\{b\},\{d\}\},\{\{a,c,d\},\{b\}\}$

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر عددی نسبت به ۲۱ اول باشد، نسبت به عوامل اول ۲۱ یعنی ۷ و ۳ اول

است. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه M باشند که اعضای آنها

به ترتیب بر ۳ و ۷ بخش پذیرند مطلوب مسئله $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ است، داریم:

$$|S| = 300 - 30 = 270$$

$$|A| = \left[\frac{300}{3} \right] - \left[\frac{30}{3} \right] = 90$$

$$|B| = \left[\frac{300}{7} \right] - \left[\frac{30}{7} \right] = 42 - 4 = 38$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{300}{21} \right] - \left[\frac{30}{21} \right] = 14 - 1 = 13$$

بنابراین طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 270 - (90 + 38 - 13) = 155$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به شرط $x_i \geq i+1$ ($i=1,2,3$)، سه متغیر y_1 ، y_2 و y_3 را می‌توان در معادله جایگزین کرد:

$$x_1 = y_1 + 2, x_2 = y_2 + 3, x_3 = y_3 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 2$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر است با:

$$\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

اگر $S = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ و A و B زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اعضای آنها به ترتیب مضرب ۳ و مضرب ۴ هستند، داریم:

$$|A| = \left[\frac{99}{3} \right] = 33$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{99}{12} \right] = 8$$

باید احتمال $P(B' | A)$ را بیابیم. داریم:

$$\begin{aligned} P(B' | A) &= \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = 1 - \frac{8}{33} = \frac{25}{33} \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(مهرداد ملونری)

۱۲۷ - ریاضیات گسسته

دو مجموعه $\{a, b\}$ و $\{a, c\}$ مستقل از یکدیگرند، پس داریم:

$$P(\{a, b\} \cap \{a, c\}) = P(\{a, b\})P(\{a, c\}) = \frac{2}{15}$$

$$P(d) = 1 - P(\{a, b, c\}) = 1 - P(\{a, b\} \cup \{a, c\})$$

$$\Rightarrow P(d) = 1 - (P(\{a, b\}) + P(\{a, c\}) - P(\{a, b\} \cap \{a, c\}))$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \right) = 1 - \frac{9}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

$$\text{احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره} = \frac{3}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{5}{10}$$

$$= \frac{18}{100} + \frac{35}{100} = \frac{53}{100} = 0.53$$

(ریاضیات گسسته - احتمال؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳

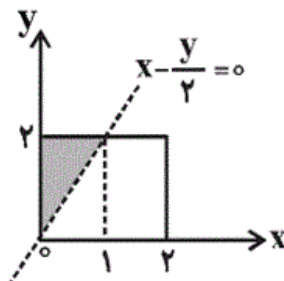
۲ ✓

۱

(هومن نورائی)

۱۲۹ -

فضای نمونه‌ای، مربعی به ضلع ۲ است و پیشامد مطلوب، نقاطی است که در



شرط $x < \frac{y}{2}$ صدق کنند. $(x - \frac{y}{2} < 0)$

ابتدا خط $x - \frac{y}{2} = 0$ را رسم می‌کنیم، نقاطی از فضای نمونه‌ای که بالای این

خط هستند، پیشامد مطلوب را تشکیل می‌دهند.

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

(پیپر و احتمال - احتمال؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به فرض داریم:

$$\sum_{x=1}^5 P(X=x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^5 \frac{\binom{6}{x}}{a} = \frac{\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{5}}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2^6 - \binom{6}{0} - \binom{6}{6}}{a} = 1 \Rightarrow \frac{62}{a} = 1 \Rightarrow a = 62$$

$$\Rightarrow P(X=3) = \frac{\binom{6}{3}}{a} = \frac{20}{62} = \frac{10}{31}$$

نکته: اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

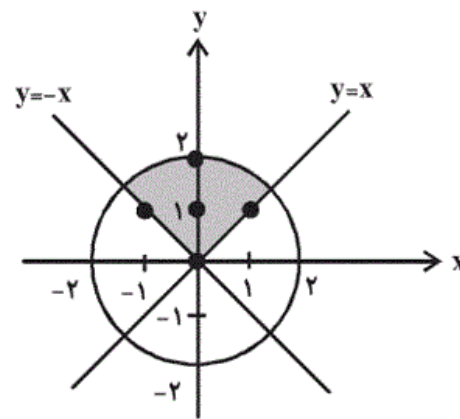
(ریاضیات گسسته - توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۴

۳

۲ ✓

۱



ناحیه هاشورخورده، نمودار رابطه R است که شامل ۵ نقطه

$(-1,1), (1,1), (0,2), (0,1), (0,0)$ با مختصات صحیح می باشد.

دقت کنید که نمودار $x^2 + y^2 \leq 4$ ، نقاط روی محیط و داخل دایره ای به

مرکز مبدأ و شعاع ۲ است.

(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه های ۶۰ تا ۶۵)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱