



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

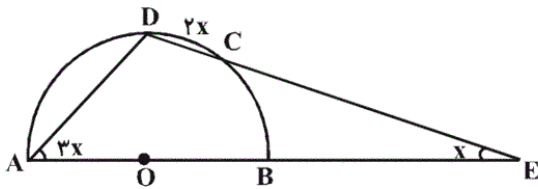
(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

هندسه ۲، دایره - ۴ سوال

۱۲۱- در شکل زیر، AB قطر یک نیم‌دایره است. اگر $\widehat{DC} = 2x$ ، $\hat{E} = x$ و $\hat{A} = 3x$ باشد، x کدام است؟



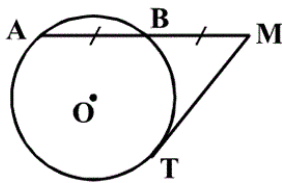
(۱) 30°

(۲) 20°

(۳) 15°

(۴) 10°

۱۲۲- مطابق شکل در دایره $C(O, 4)$ ، وتر AB را به اندازه خود تا نقطه M امتداد می‌دهیم. اگر طول مماس MT برابر $6\sqrt{2}$ باشد،



فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

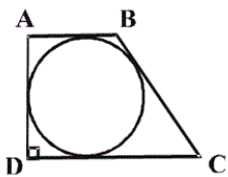
(۲) $\sqrt{7}$

(۱) $\sqrt{5}$

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{10}$

۱۲۳- مطابق شکل، دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ بر دایره‌ای محیط شده است. اگر دایره، ساق بزرگ‌تر را به دو پاره‌خط به اندازه‌های ۲



و ۸ تقسیم کند، طول بزرگ‌ترین قاعده دوزنقه کدام است؟

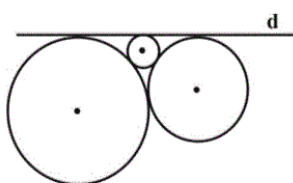
(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

(۴) ۱۶

(۳) ۱۴

۱۲۴- مطابق شکل، سه دایره به شعاع‌های $3, \frac{4}{3}, R$ دو به دو مماس خارج بوده و هر سه بر خط d مماس‌اند. اگر شعاع کوچک‌ترین



دایره نباشد، مقدار آن کدام است؟

(۲) ۱۲

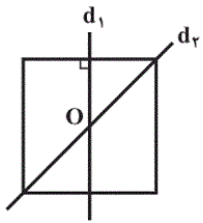
(۱) $\frac{25}{3}$

(۴) ۸

(۳) $6\sqrt{2}$

هندسه ۲، تبدیل‌های هندسی و کاربردها - ۳ سوال

۱۲۵- بازتاب مربع را ابتدا نسبت به خط d_1 و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به خط d_2 رسم می‌کنیم. تبدیلی که مربع اولیه را



به آخرین شکل تصویر می‌کند، چند نقطه ثابت تبدیل دارد؟ (O مرکز مربع است)

- (۱) صفر
(۲) بی‌شمار
(۳) ۱
(۴) ۲

۱۲۶- اگر G مرکز ثقل مثلث ABC و مساحت محصور بین مثلث و تصویر آن تحت انتقال با بردار \overrightarrow{BG} برابر ۶ واحد مربع باشد،

مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۳۶
(۲) ۴۲
(۳) ۴۸
(۴) ۵۴

۱۲۷- مربعی را 45° حول نقطه تلاقی قطرهای آن دوران می‌دهیم. اگر مساحت سطح محصور بین مربع و تصویر آن برابر $4 + 4\sqrt{2}$

باشد، طول ضلع مربع کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{2}$
(۲) $2\sqrt{2} - 1$
(۳) $2 + \sqrt{2}$
(۴) $2(\sqrt{2} - 1)$

هندسه ۲، روابط طولی و مثلث - ۳ سوال

۱۲۸- در مثلث ABC به اضلاع $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $BC = 7$ ، نیمساز زاویه داخلی A، میانه CM را در نقطه I قطع می‌کند.

طول پاره خط MI کدام است؟

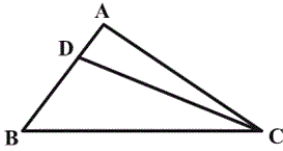
- (۱) $\frac{\sqrt{33}}{5}$
(۲) $\frac{\sqrt{33}}{7}$
(۳) $\frac{2\sqrt{33}}{5}$
(۴) $\frac{2\sqrt{33}}{7}$

۱۲۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، نیمساز زاویه قائمه، وتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر مساحت این مثلث

برابر ۹ باشد، طول نیمساز زاویه داخلی A کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) ۳
(۳) $2\sqrt{3}$
(۴) ۴

۱۳۰- در شکل زیر اگر $AD=1$ ، $BD=3$ ، $CD=5$ و $BC=7$ باشد، آنگاه مساحت مثلث ABC کدام است؟



$$\frac{21\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$5\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\frac{25\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

$$6\sqrt{3} \quad (3)$$

ریاضیات گسسته دوازدهم، ترکیبیات (شمارش) -

۱۱۱- شهری دارای ۷ دبیرستان است که ۶ تای آنها دارای ۴ پایه درسی و یکی از آنها دارای ۳ پایه درسی است. اگر ۸۵ دانش آموز دبیرستانی از این شهر را به تصادف انتخاب کنیم، حداقل چند نفر از آنها هم مدرسه‌ای و هم پایه هستند؟

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۱۱۲- فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۵ و بخش پذیر بر ۳ باشد. اگر هر زیر مجموعه k عضوی از مجموعه A ، دست کم دارای دو عضو با مجموع ۳۳ باشد، آن گاه کم‌ترین مقدار k کدام است؟

$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

۱۱۳- در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۵ مهره آبی و ۶ مهره سبز موجود است. دست کم چند مهره از کیسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم ۲ مهره قرمز یا ۳ مهره آبی یا تمام مهره‌های سبز بیرون آمده‌است؟

$$10 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

۱۱۴- در دو کیسه، مهره‌هایی با رنگ‌های قرمز، آبی و سفید ریخته‌ایم. حداقل تعداد مهره‌ها چقدر باید باشد تا مطمئن باشیم حداقل در یکی از کیسه‌ها، دست کم ۳ مهره هم‌رنگ داریم؟

$$19 \quad (4)$$

$$15 \quad (3)$$

$$13 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

۱۱۵- از بین ۱۰ نفر در هر مرحله به تصادف ۴ نفر را انتخاب می‌کنیم و به هر یک از آنها ۵۰ سکه می‌دهیم. این عمل باید حداقل چند بار انجام شود تا مطمئن شویم بین آنها فردی وجود دارد که به او حداقل ۴۰۰ سکه رسیده است؟

$$20 \quad (4)$$

$$19 \quad (3)$$

$$18 \quad (2)$$

$$17 \quad (1)$$

۱۱۶- درون مکعب مستطیلی به ابعاد ۲، ۳ و ۴، حداقل چند نقطه انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم فاصله حداقل دو نقطه از آنها کم‌تر از $\sqrt{3}$ است؟

$$13 \quad (4)$$

$$49 \quad (3)$$

$$37 \quad (2)$$

$$25 \quad (1)$$

۱۱۷- چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که نه مربع کامل باشند و نه مکعب کامل؟

$$874 \quad (4)$$

$$836 \quad (3)$$

$$742 \quad (2)$$

$$706 \quad (1)$$

۱۱۸- چند عضو از مجموعه $S = \{50, 51, 52, \dots, 80\}$ نسبت به ۶ اول هستند؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

۱۱۹- چند تابع غیر یک به یک از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{5, 6, 7, 8\}$ می توان یافت که شامل زوج مرتب $(1, 7)$ باشند؟

- ۴۸ (۱) ۵۲ (۲) ۵۶ (۳) ۵۸ (۴)

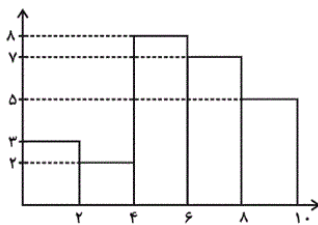
۱۲۰- چند عدد طبیعی n به طوری که $1 \leq n \leq 100$ وجود دارد که تنها بر یکی از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر باشد؟

- ۳۹ (۱) ۴۲ (۲) ۴۵ (۳) ۴۸ (۴)

آمار و احتمال ، احتمال - ۱ سوال

۱۳۸- کدام یک از متغیرهای تصادفی زیر کیفی ترتیبی است؟
(۱) میزان دمای هوا (۲) میزان رضایت از شغل (۳) جنسیت فرد (۴) تعداد فرزندان یک خانواده

آمار و احتمال ، آمار توصیفی



۱۳۱- نمودار مستطیلی نمره های آزمون عملی دانشجویان در شکل زیر داده شده است. اگر سه دانشجو که نمره های آنها به ترتیب $7/5$ ، ۱ و ۳ است، از این کلاس حذف گردیده و به جای آنها ۲ دانشجو با نمره های $2/5$ و ۹ به این کلاس اضافه شوند، زاویه مربوط به دسته $10-8$ در نمودار دایره ای چند درجه تغییر می کند؟

- ۱۸ (۲) ۹ (۴) ۱۰/۸ (۳) صفر (۱)

۱۳۲- میانگین و میانه نمرات امتحانی ۶ درس دانش آموزی با هم مساوی و برابر ۱۴ است. اگر بالاترین نمرات این دانش آموز، ۱۶ و ۱۵ باشد، مجموع نمرات دو درس که در آن ها کمترین نمره را گرفته است، کدام می تواند باشد؟

- ۲۵ (۱) ۲۶ (۲) ۲۷ (۳) ۲۸ (۴)

۱۳۳- در داده های آماری ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۸، ۶، ۳، ۵، ۲۳، ۹، میانگین داده های بزرگ تر از چارک اول و کوچک تر از چارک سوم کدام است؟

- ۱۰/۵ (۱) ۹ (۲) ۱۱/۲ (۳) ۹/۴ (۴)



۱۳۴- با توجه به نمودار میله ای روبه رو برای داده های ۱، ۲، ۳ و ۴، واریانس کدام است؟

- ۱/۵ (۱) ۰/۷۵ (۳) ۱/۲۵ (۲) ۱ (۴)

۱۳۵- اگر ۱۵ داده آماری را سه برابر کرده و ۸ واحد از هر یک کم کنیم، ضریب تغییرات ۵۰ درصد افزایش می یابد. مجموع داده های جدید کدام است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۶۰

۱۳۶- میانگین و انحراف معیار ۱۳ داده آماری به ترتیب برابر ۶ و ۲ است. اگر داده های ۵، ۵ و ۸ را از این داده ها حذف کنیم، واریانس داده های باقی مانده کدام است؟

- (۱) ۴/۲ (۲) ۴/۴ (۳) ۴/۵ (۴) ۴/۶

آمار و احتمال ، آمار استنباطی -

۱۳۷- کدام یک از موارد زیر در مورد نمونه گیری های خوشه ای و طبقه ای نادرست است؟

- (۱) نمونه گیری خوشه ای، هزینه و زمان را نسبت به نمونه گیری طبقه ای کاهش می دهد.
 (۲) در نمونه گیری خوشه ای، همه واحدهای آماری خوشه های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می گیریم.
 (۳) در نمونه گیری خوشه ای بهتر است ویژگی مورد بررسی درون خوشه ها تفاوت بیشتری داشته باشد.
 (۴) همواره اندازه طبقات در نمونه گیری طبقه ای برابر یکدیگر است.

۱۳۹- در کدام یک از موضوعات زیر، از دادگانها برای جمع آوری داده ها نمی توان استفاده کرد؟

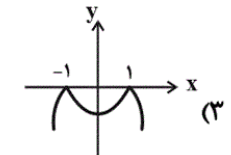
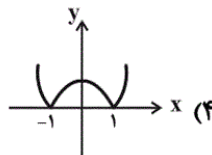
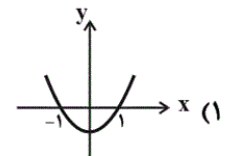
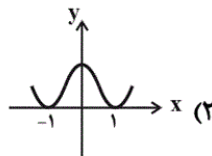
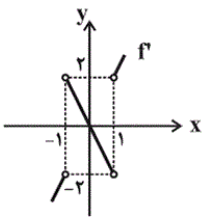
- (۱) تیراژ روزنامه های کشور
 (۲) تعداد مجروحان در تصادفات رانندگی سال ۹۷ در کل کشور
 (۳) تعداد پروازهای خروجی فرودگاه مهرآباد در یک روز خاص
 (۴) تعداد ابرانی که در یک روز خاص از یک پل عابر استفاده می کنند.

۱۴۰- از جامعه $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ یک نمونه ۶ تایی انتخاب می کنیم. با چه احتمالی این نمونه، میانگین جامعه را دقیقاً درست برآورد می کند؟

- (۱) $\frac{1}{28}$ (۲) $\frac{3}{28}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{4}$

حسابان ۲ - دوازدهم ، کاربردهای مشتق

۸۱- اگر شکل مقابل مربوط به نمودار تابع f' باشد، کدام نمودار می تواند نمودار تابع f باشد؟



۸۲- اگر تابع $f(x) = ax + \cos x$ یک تابع اکیداً یکنوا روی \mathbb{R} باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $(-2, -1] \cup [1, 2)$ (۲) $[-1, 1]$
 (۳) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

۸۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2 & ; x > 1 \\ m & ; x = 1 \\ x - 4 & ; x < 1 \end{cases}$ اکسترمم نسبی نداشته باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $-3 \leq m \leq 2$ (۲) $-4 < m < 2$
 (۳) $m \leq -3$ یا $m \geq 2$ (۴) $m > 2$ یا $m < -3$

۸۴- اگر شیب خط گذرنده از نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$ برابر ۶ باشد، a کدام یک از مقادیر زیر می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ($a \neq 0$)

۸۵- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + kx - k}$ فقط یک نقطه بحرانی دارد. k چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴
 (۳) ۵ (۴) ۶

۸۶- به ازای کدام مقدار k ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در بازه $[1, 3]$ قرینه یکدیگرند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
 (۳) ۳ (۴) ۴

۸۷- می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۴۸ واحد، یک مکعب مستطیل بسازیم. بیش‌ترین حجم این مکعب مستطیل، در صورتی

که یکی از بعدها ۳ برابر بعد دیگر باشد، کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۴۸ (۲) | ۴۰ (۱) |
| ۶۴ (۴) | ۶۰ (۳) |

۸۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 16\sqrt{x}$ در اطراف نقطهٔ عطفش، شبیه کدام نمودار است؟

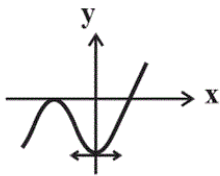


۸۹- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + bx^2 + cx + 20$ در نقطهٔ $A(2, -26)$ روی آن، از نمودار عبور می‌کند. مقدار ماکزیمم

نسبی نمودار f کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۲۴ (۱) | ۲۶ (۲) |
| ۲۸ (۳) | ۳۰ (۴) |

۹۰- نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax^2 + bx - 4$ در شکل مقابل نشان داده شده است. a کدام است؟



- | | |
|--------|--------|
| ۲ (۱) | ۳ (۲) |
| -۲ (۳) | -۳ (۴) |

هندسه ۳- دوازدهم، بردار - ۱۰ سوال -

۱۰۱- سه بردار $\vec{a} = (1, 3, -1)$ ، $\vec{b} = (2, m, 1)$ و $\vec{c} = (1, m-1, 1)$ در یک صفحه قرار دارند. m کدام است؟

- | | | | |
|-------|---------|-------|--------|
| ۲ (۱) | صفر (۲) | ۱ (۳) | -۱ (۴) |
|-------|---------|-------|--------|

۱۰۲- نقاط $A = (2, 3, 4)$ و $B = (-2, -5, 0)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ M بر روی پاره‌خط AB چنان قرار داشته باشد

که $\vec{MA} = -3\vec{MB}$ ، مختصات نقطهٔ M کدام است؟

- | | | | |
|-----------------|---------------|------------------|-----------------|
| (-۱, -۳, ۱) (۴) | (۲, ۳, ۱) (۳) | (-۲, -۳, -۱) (۲) | (-۱, -۴, ۱) (۱) |
|-----------------|---------------|------------------|-----------------|

۱۰۳- مثلث ABC ، مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ است. حاصل عبارت $(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB})\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC})\overrightarrow{AC}$ کدام است؟

- (۱) $2\overrightarrow{CB}$ (۲) $2\overrightarrow{BC}$ (۳) $4\overrightarrow{CB}$ (۴) $4\overrightarrow{BC}$

۱۰۴- طول تصویر قائم بردار $\vec{u} = (3\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{j} - \vec{k})$ بر صفحه xy ، چند برابر طول تصویر قائم آن بر صفحه yz است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۰۵- اگر مبدأ مختصات ابتدای سه بردار غیر صفر و متمایز \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} و نقاط A ، B و C (با همین ترتیب) انتهای سه بردار مذکور در فضای R^3 باشند به طوری که $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ ، آنگاه $\vec{a} \times \vec{b}$ کدام است؟

- (۱) $\vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}$ (۲) $\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (۳) $\vec{c} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{c}$ (۴) $\vec{c} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c}$

۱۰۶- اگر $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ باشد، طول تصویر قائم \vec{a} بر راستای \vec{b} ، چند برابر $|\vec{a}|$ است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۰۷- اگر \vec{a} و \vec{b} دو بردار و $|\vec{a} + \vec{b}| = 8$ باشد، بیشترین مقدار ضرب داخلی دو بردار \vec{a} و \vec{b} کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۰۸- اگر a ، b و c سه عدد حقیقی باشند، حداکثر مقدار عبارت $\frac{(4a+b+c)^2}{4a^2+b^2+c^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۰۹- نقاط $M = (1, 2, 3)$ ، $N = (6, 5, 4)$ و $P = (7, 8, 9)$ وسط‌های اضلاع مثلث ABC هستند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{6}$ (۲) $24\sqrt{6}$ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۱۱۰- بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} بردارهایی به طول واحد هستند و $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 9$ می‌باشد. اندازه بردار

$2\vec{a} + 5\vec{b} + 5\vec{c}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

- ۹۵- اگر $f(x) = a^{1-x} + \frac{2}{ab}$ ، $f(1) = 1/2$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3/2$ باشد، حاصل $2a - 9b$ کدام است؟
- (۱) ۹ (۲) -۸ (۳) ۱۸ (۴) ۸

- ۹۶- اگر $5^{(\log x)^{-1}} - 3^{(\log x)^{-1}} = 3^{(\log x)^{+1}} - 5^{(\log x)^{-1}}$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{3}}(x-1)$ کدام است؟
- (۱) ۱۶ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۴

- ۹۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+1} - 3}{4-x^2} = b$ باشد، مقدار $a - 18b$ کدام است؟ ($b \in \mathbb{R}$)
- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

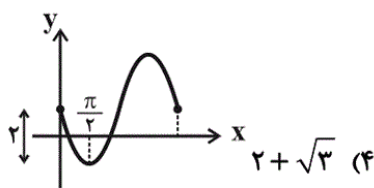
- ۱۰۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \left[x + \frac{3}{2}\right] + 3a & ; x > 0 \\ 2b & ; x = 0 \\ \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} & ; x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟ (، []، نماد جزء صحیح است.)
- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

ریاضی پایه - دوازدهم ، تابع -

- ۹۳- محل برخورد وارون تابع $f(x) = 2x - |x| + 3$ با محور y ها از نیمساز ربع اول و سوم چقدر فاصله دارد؟
- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

- ۹۴- اگر $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 1 - 3x$ باشد، ضابطه تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟
- (۱) $-3x^2 + 12x - 14$ (۲) $x^2 - 6x + 8$ (۳) $-2x^2 - 5x + 10$ (۴) $4x^2 - 6x + 3$

ریاضی پایه - دوازدهم ، مثلثات



- ۹۷- شکل مقابل بخشی از نمودار تابع $f(x) = 1 - b \sin x$ است. مقدار $f\left(\frac{94\pi}{3}\right)$ کدام است؟
- (۱) $1 - \sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $1 + \sqrt{3}$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

۹۸- مقدار عبارت $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{2\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14}$ کدام است؟

$\frac{1}{16}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

ریاضی پایه - دوازدهم ، جبر و معادله

۹۱- اگر اعداد غیر صفر a و b جواب‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ باشند، کم‌ترین مقدار عبارت $x^2 + ax + b$ کدام است؟

۱ (۴)

$-\frac{9}{4}$ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۹۲- معادله $\sqrt{2x+1} + x = |x+2|$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۲۱- هندسه ۲

(داریوش ناظمی)

$$\hat{E} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2x \quad (1)$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{DC} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} + \widehat{BC} = 6x \xrightarrow{\widehat{DC}=2x} \widehat{BC} = 4x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{AD} = 6x$$

$$\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 15^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۴

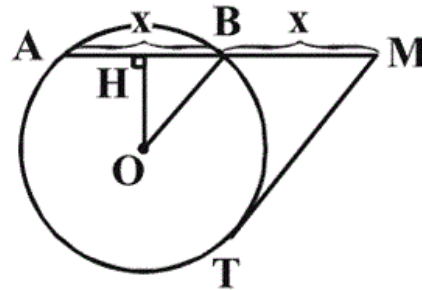
۳ ✓

۲

۱

۱۲۲- هندسه ۲

(مهرداد ملوندی)



با توجه به فرض سؤال $AB = BM = x$ و $MT = 6\sqrt{2}$ ، در نتیجه طبق

روابط طولی در دایره داریم:

$$MB \cdot MA = MT^2 \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow AB = x = 6$$

از مرکز دایره، عمود OH را بر وتر AB فرود می‌آوریم. داریم:

$$BH = \frac{AB}{2} = 3, \quad OB = R = 4$$

$$\xrightarrow{\text{فیتاغورس}} OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳، ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

چنانچه از O عمودهای OH_۲ و OH_۱ را بر CD و AD وارد کنیم آنگاه چون $\hat{D} = 90^\circ$ ، پس $H_1D = OH_2 = R = 4$. از طرفی $CH_1 = CH = 8$ ، در نتیجه داریم:

$$CD = CH_1 + H_1D = 8 + 4 = 12$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳

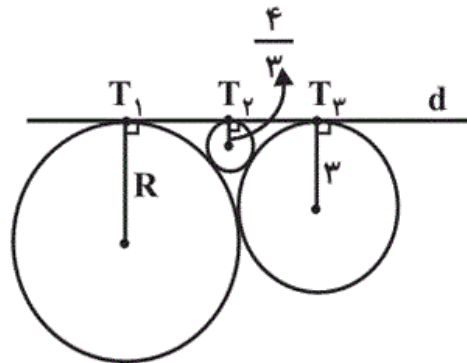
۲ ✓

۱

(مهرداد ملوندی)

۱۲۴- دایره

تذکر: برای دو دایره مماس خارج C_1 و C_2 به شعاع‌های R_1 و R_2 ، طول مماس مشترک خارجی برابر است با $TT' = 2\sqrt{R_1R_2}$.



چون R شعاع کوچک‌ترین دایره نیست، پس شعاع یکی از دو دایره کناری است. طبق نکته داریم:

$$T_1T_2 = 2\sqrt{\frac{4R}{3}} = \frac{4\sqrt{3R}}{3}, \quad T_2T_3 = 2\sqrt{3 \times \frac{4}{3}} = 4, \quad T_1T_3 = 2\sqrt{3R}$$

$$T_1T_3 = T_1T_2 + T_2T_3 \Rightarrow 2\sqrt{3R} = \frac{4\sqrt{3R}}{3} + 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{3R}\left(2 - \frac{4}{3}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{3R} = 4 \Rightarrow \sqrt{3R} = 6 \Rightarrow 3R = 36 \Rightarrow R = 12$$

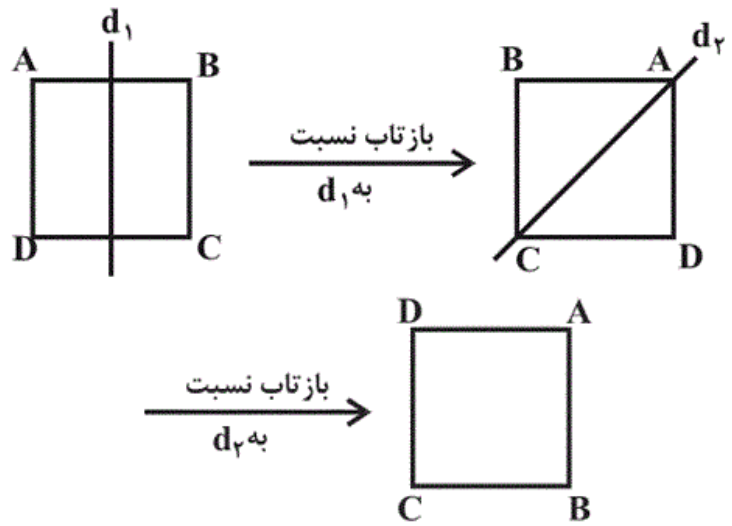
(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱



در واقع مربع نسبت به دو خط متقاطع بازتاب یافته است، پس مطابق شکل، مربع به اندازه دو برابر زاویه بین دو خط یعنی به اندازه ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران یافته است. در نتیجه تنها نقطه ثابت تبدیل، مرکز دوران (محل برخورد خطوط d_1 و d_2 یعنی مرکز مربع) است.

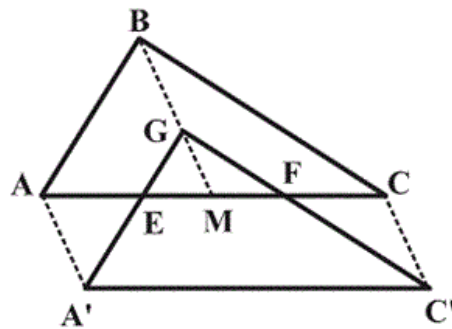
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰ و ۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱



مثلث‌های ABC و EGF به حالت تساوی زاویه‌هایشان متشابه‌اند و

داریم:

$$\frac{S_{\Delta EGF}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{GM}{BM}\right)^2 \Rightarrow \frac{6}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 54$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

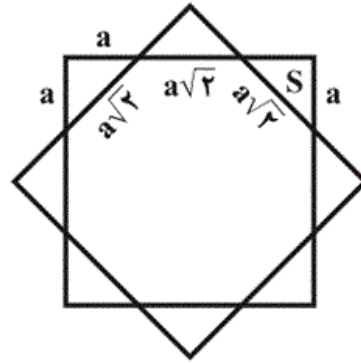
۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به شکل زیر، شکل محصور بین مربع و تصویر آن یک هشت ضلعی منتظم است و داریم:



$4S - \text{مساحت مربع} = \text{مساحت هشت ضلعی}$

$$= (2a + a\sqrt{2})^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}a^2\right)$$

$$\Rightarrow 4(1 + \sqrt{2}) = 4a^2(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a = 1$$

$$\text{ضلع مربع} = 2a + a\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{MI}{CI} = \frac{AM}{AC} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{MI}{CM} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow MI = \frac{2\sqrt{33}}{7}$$

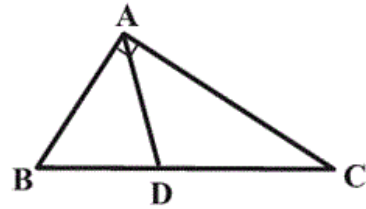
(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۹ و ۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



طبق قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی، نیمساز هر زاویه داخلی در یک مثلث، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند، بنابراین داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2AB$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \Rightarrow 9 = \frac{1}{2} AB \times 2AB$$

$$\Rightarrow AB^2 = 9 \Rightarrow AB = 3 \Rightarrow AC = 6$$

$$\Delta ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 36 = 45$$

$$\Rightarrow BC = 3\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} BD = \sqrt{5} \\ DC = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

طبق رابطه طول نیمساز زاویه داخلی داریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 3 \times 6 - \sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$$

$$= 18 - 10 = 8 \Rightarrow AD = 2\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

طبق قضیه هرون برای مثلث BDC داریم:

$$P = \frac{3+5+7}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_{\Delta BDC} = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 3 \right) \left(\frac{15}{2} - 5 \right) \left(\frac{15}{2} - 7 \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

با توجه به این که ارتفاع رسم شده از رأس C در دو مثلث ABC و BDC یکسان است، پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آنها است. داریم:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{\frac{15\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 5\sqrt{3}$$

(هنرسه ۲-، روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سیرمسن فاطمی)

هر پایه در هر مدرسه به منزله یک لانه کبوتر است. در نتیجه تعداد لانه‌ها برابر است با:

$$6 \times 4 + 1 \times 3 = 27$$

خارج قسمت تقسیم ۸۵ بر ۲۷ برابر است با ۳، پس حداقل $3+1=4$ دانش‌آموز وجود دارند که هم مدرسه و هم پایه باشند.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(نوید مهیدی)

مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۳ که کوچک‌تر از ۳۵ هستند، برابر است با $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\}$. حال عدد ۳۳ را از A کنار می‌گذاریم، در این صورت مجموع جفت‌های $\{3, 30\}$ ، $\{6, 27\}$ ، $\{9, 24\}$ ، $\{12, 21\}$ ، $\{15, 18\}$ برابر ۳۳ است. اکنون اگر از هر کدام از این جفت اعداد، فقط یکی را انتخاب کنیم و عدد ۳۳ را به آنها اضافه نماییم، آنگاه با انتخاب هر کدام از عضوهای باقی‌مانده در بین جفت اعداد مورد نظر، به‌طور حتم یکی از جفت اعداد با مجموع ۳۳ وجود خواهد داشت. پس کم‌ترین تعداد عضوهای زیر مجموعه‌های k عضوی باید برابر با $6+1=7$ باشد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(علی‌اکبر علیزاده)

هر یک از حالات خارج شدن ۲ مهره قرمز یا ۳ مهره آبی یا هر ۶ مهره سبز رخ دهد، مطلوب است. بنابراین اگر ۱ مهره قرمز و ۲ مهره آبی و ۵ مهره سبز (جمعاً ۸ مهره) خارج کنیم، هنوز مطلوب مسئله رخ نداده است. با خارج کردن مهره بعدی یعنی مهره نهم، قطعاً یکی از حالات مطلوب اتفاق خواهد افتاد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سیروس زوالفقاری)

اگر در هر یک از کیسه‌ها ۶ مهره (۲ مهره از هر رنگ) داشته باشیم، هدف مسئله برآورده نشده است، اما با اضافه کردن مهره بعدی (مهره سیزدهم)، قطعاً در یکی از دو کیسه، حداقل ۳ مهره هم‌رنگ وجود خواهد داشت.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(رضا پورعسینی)

طبق اصل لانه کبوتری در بدترین حالت این امکان وجود دارد که هر ۱۰ نفر دارای دقیقاً ۳۵۰ سکه باشند که این حالت مستلزم آن است که هر نفر ۷ بار انتخاب شده باشد که روی هم می‌شود $70 = 10 \times 7$ انتخاب.

اما چون در هر مرحله ۴ نفر انتخاب می‌شوند، پس در بدترین حالت طبق اصل لانه کبوتری می‌توان ۱۷ بار این عمل را تکرار کرد. در هجدهمین دور انتخاب افراد $(70 > 18 \times 4)$ ، حتماً فردی وجود خواهد داشت که برای بار هشتم انتخاب شده باشد و در نتیجه حداقل ۴۰۰ سکه به او رسیده است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴

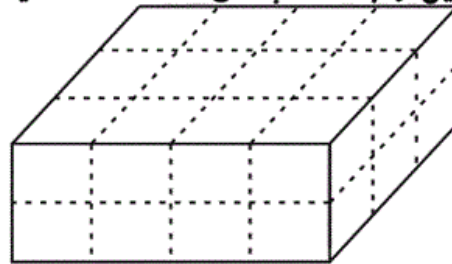
۳

۲ ✓

۱

(سروش موئینی)

باید این مکعب مستطیل را به مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ تفکیک کرد:



در این شکل ۲۴ مکعب به ضلع ۱ داریم که بیش‌ترین فاصله نقطه‌ها در هر مکعب، برابر قطر آن یعنی $\sqrt{3}$ است، بنابراین اگر ۲۵ نقطه درون این مکعب انتخاب کنیم، مطمئن هستیم که فاصله حداقل دو نقطه از میان آنها کم‌تر از $\sqrt{3}$ است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهدی عزیزی)

اعداد مکعب کامل ۳ رقمی B و اعداد مربع کامل ۳ رقمی A

$$100 \leq k^2 \leq 999 \Rightarrow 10 \leq k \leq 31 \xrightarrow{\text{تعداد}} |A| = 22$$

$$100 \leq k^3 \leq 999 \Rightarrow 5 \leq k \leq 9 \xrightarrow{\text{تعداد}} |B| = 5$$

$$100 \leq k^6 \leq 999 \Rightarrow k = 3 \xrightarrow{\text{تعداد}} |A \cap B| = 1$$

$$|A \cap B| = |A \cup B| = |S| - |A \cup B|$$

بنابراین داریم:

$$= 900 - (22 + 5 - 1) = 874$$

↓
کل اعداد ۳ رقمی

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علیرضا شریف‌فطیپی)

عددی نسبت به ۶ اول است که نه مضرب ۲ باشد و نه مضرب ۳. اگر مجموعه اعدادی که مضرب ۲ هستند را با A و مجموعه اعدادی که مضرب ۳ هستند را با B نمایش دهیم $(A, B \subseteq S)$ ، آنگاه داریم:

$$|A| = \left[\frac{80}{2} \right] - \left[\frac{49}{2} \right] = 40 - 24 = 16$$

$$|B| = \left[\frac{80}{3} \right] - \left[\frac{49}{3} \right] = 26 - 16 = 10$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{80}{6} \right] - \left[\frac{49}{6} \right] = 13 - 8 = 5$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 10 - 5 = 21$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 31 - 21 = 10$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا تعداد توابعی از مجموعه A به مجموعه B که شامل زوج مرتب

$$f = \{(1, 7), (2, \square), (3, \square), (4, \square)\}$$
 باشند را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد توابع} = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

سپس تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه A به مجموعه B با شرط داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\text{تعداد توابع یک‌به‌یک} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

بنابراین تعداد توابع غیر یک‌به‌یک برابر است با:

$$64 - 6 = 58$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۷۸ و ۷۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(امیرحسین ابومصوب)

اگر A ، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که اعضای آنها به ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر هستند، تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ که بر ۲ بخش پذیر بوده ولی بر ۳ و ۵ بخش پذیر نباشند، برابر است با:

$$\begin{aligned} |A - (B \cup C)| &= |A| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\ &= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

به طریق مشابه می‌توان تعداد اعدادی که فقط بر ۳ یا فقط بر ۵ بخش پذیر هستند را به دست آورد، بنابراین تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ که تنها بر یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ بخش پذیرند، برابر است با:

$$|A| + |B| + |C| - 2(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + 3|A \cap B \cap C|$$

حال مقدار هر یک از عبارتها را به دست می‌آوریم:

$$|A| = \left[\frac{100}{2} \right] = 50 \quad \text{و} \quad |B| = \left[\frac{100}{3} \right] = 33 \quad \text{و} \quad |C| = \left[\frac{100}{5} \right] = 20$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{100}{6} \right] = 16 \quad \text{و} \quad |A \cap C| = \left[\frac{100}{10} \right] = 10$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{100}{15} \right] = 6 \quad \text{و} \quad |A \cap B \cap C| = \left[\frac{100}{30} \right] = 3$$

در نتیجه تعداد اعضای مجموعه مورد نظر برابر است با:

$$(50 + 33 + 20) - 2(16 + 10 + 6) + 3 \times 3 = 103 - 64 + 9 = 48$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میلاد منصوری)

میزان رضایت از شغل به صورت کم، متوسط و زیاد، دسته‌بندی می‌شود و متغیر کیفی ترتیبی است، تعداد فرزندان یک خانواده، متغیر کمی گسسته، جنسیت فرد، متغیر کیفی اسمی و میزان دمای هوا، متغیر کمی پیوسته است.

(ریاضی ۱ - آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

پس از ایجاد تغییرات، تعداد اعضای دسته‌ها به این شکل خواهد بود:

دسته	$[0, 2)$	$[2, 4)$	$[4, 6)$	$[6, 8)$	$[8, 10)$
تعداد اولیه	۳	۲	۸	۷	۵
تعداد فعلی	۲	۲	۸	۶	۶

اگر x' زاویه جدید و x زاویه قدیم دسته $10-8$ در نمودار دایره‌ای

$$\frac{6}{24} = \frac{x'}{360} \Rightarrow x' = 90^\circ$$

باشند، آن‌گاه:

$$\frac{5}{25} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 72^\circ$$

بنابراین داریم: $|x' - x| = 18^\circ$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عباس اسدی امیرآباری)

چون شش داده داریم، پس میانه برابر است با: $14 = \frac{\text{داده چهارم} + \text{داده سوم}}{2}$

بنابراین مجموع داده‌های سوم و چهارم برابر ۲۸ است. از طرفی میانگین نیز برابر ۱۴ خواهد بود و در نتیجه داریم: $14 \times 6 = 84 = \text{مجموع داده‌ها}$

$$a + b + 28 + 15 + 16 = 84 \Rightarrow a + b = 84 - 59 = 25$$

تذکر: اگر دانش‌آموز دو نمره ۱۶ و یک نمره ۱۵ داشته باشد، مجموع نمرات دو درسی که در آن‌ها کمترین نمره را گرفته است، برابر ۲۴ بدست می‌آید که در گزینه‌ها نیست.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فرهاد وفایی)

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، چون تعداد کل داده‌ها برابر یازده است، پس میانه پنج داده اول برابر چارک اول و میانه پنج داده آخر برابر چارک سوم است.

۳, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۲۳

چارک سوم چارک اول

پس داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم، عبارتند از:

$$8, 9, 12, 13, 14 \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{8 + 9 + 12 + 13 + 14}{5} = \frac{56}{5} = 11.2$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مجموع فراوانی‌های نسبی باید برابر یک باشد، بنابراین داریم:

$$x + 0/2 + 3x + 0/4 = 1 \Rightarrow x = 0/1$$

$$\bar{x} = 1 \times 0/2 + 2 \times 0/4 + 3 \times 0/1 + 4 \times 0/3 = 2/5$$

$$\sigma^2 = (-1/5)^2 \times 0/2 + (-0/5)^2 \times 0/4 + (0/5)^2 \times 0/1 + (1/5)^2 \times 0/3$$

$$= 0/45 + 0/1 + 0/025 + 0/675 = 1/25$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۶، ۷۷ و ۹۳ تا ۹۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر میانگین و واریانس داده‌های اولیه را با \bar{x}_1 و σ_1^2 و میانگین و واریانس

داده‌های جدید را با \bar{x}_2 و σ_2^2 نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\bar{x}_2 = 3\bar{x}_1 - 8, \quad \sigma_2^2 = 9\sigma_1^2 \Rightarrow \sigma_2 = 3\sigma_1$$

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}} \Rightarrow 1/5 = \frac{3\sigma_1}{\frac{3\bar{x}_1 - 8}{\bar{x}_1}} \Rightarrow \frac{3\bar{x}_1}{3\bar{x}_1 - 8} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 9\bar{x}_1 - 24 = 6\bar{x}_1 \Rightarrow 3\bar{x}_1 = 24 \Rightarrow \bar{x}_1 = 8 \Rightarrow \bar{x}_2 = 16$$

۴

۳

۲ ✓

۱

(مرتضی فحیم‌علوی)

میانگین داده‌های ۵، ۸ و ۶ برابر ۶ است، پس با حذف این ۳ داده، میانگین ۱۰ داده باقی‌مانده تغییر نکرده و برابر ۶ خواهد بود. واریانس ۱۳ داده اولیه

$$4 = \frac{\sum_{i=1}^{13} (x_i - 6)^2}{13} \Rightarrow \sum_{i=1}^{13} (x_i - 6)^2 = 52 \quad \text{برابر ۴ است، پس داریم:}$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2 + 2(5 - 6)^2 + (8 - 6)^2 = 52 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2 = 46$$

در نتیجه واریانس داده‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2}{10} = \frac{46}{10} = 4.6$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۶ و ۹۳ تا ۹۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرحسین ابومحبوب)

برابری اندازه طبقات از ویژگی‌های نمونه‌گیری سیستماتیک است. در نمونه‌گیری طبقه‌ای، جامعه صرفاً به زیرجامعه‌های مجزا تقسیم می‌شود و از هر طبقه، یک نمونه تصادفی ساده انتخاب می‌گردد.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرحسین ابومحبوب)

در مورد تعداد عابران پیاده‌ای که در یک روز خاص از یک پل عابر استفاده می‌کنند، اطلاعات ثبتی در اختیار نیست و بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها در این مورد، مشاهده است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مرتضی فهیم علوی)

میانگین جامعه برابر است با: $\bar{x} = \frac{1+2+\dots+8}{8} = 4/5$

بنابراین اگر یک نمونه ۶ تایی میانگین را دقیق برآورد کند، باید میانگین نمونه برابر ۴/۵ باشد، در این صورت مجموع اعضای این نمونه برابر است با:

$$6 \times 4/5 = 27$$

و با توجه به اینکه مجموع تمامی اعضای جامعه برابر با $1+2+\dots+8 = 36$ است، می توان نتیجه گرفت که مجموع دو عضوی که در نمونه نمی باشند برابر با ۹ است. بنابراین این دو عضو حالات زیر را دارند:

$$\{1,8\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{4,5\}$$

تعداد کل نمونه های ۶ تایی برابر است با: $\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = 28$

بنابراین احتمال اینکه یک نمونه ۶ تایی میانگین جامعه را دقیق برآورد کند،

برابر است با: $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عرفان صادقی)

با توجه به نمودار f' ، برای $x < -1$ ، f' منفی است، بنابراین باید تابع f

در این بازه نزولی باشد، پس گزینه «۳» نادرست است.

f' در $x=1$ و $x=-1$ وجود ندارد، بنابراین باید تابع f در این دو نقطه

مشق ناپذیر باشد، پس گزینه های «۱» و «۲» نیز نادرست هستند.

(مسابان ۲- کاربرد های مشتق؛ صفحه های ۱۲۰ تا ۱۲۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

باید مشتق تابع روی \mathbb{R} نامنفی یا نامثبت باشد. پس:

$$f'(x) = a - \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \Rightarrow a \geq 1 \\ f'(x) \leq 0 \Rightarrow a \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

(مسئله ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۲)

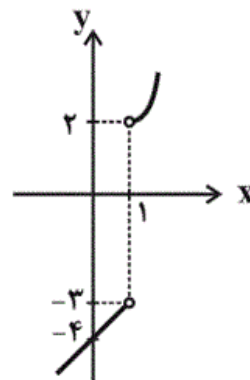
۴

۳

۲

۱

نمودار تابع f بدون در نظر گرفتن نقطه $(1, m)$ به صورت زیر است:



حال اگر نقطه $(1, m)$ بالاتر از نقطه $(1, 2)$ باشد، تابع ماکزیمم نسبی و اگر پایین‌تر از نقطه $(1, -3)$ باشد، مینیمم نسبی دارد. اما اگر نقطه $(1, m)$ بین این دو نقطه یا روی یکی از آنها باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$$\Rightarrow -3 \leq m \leq 2$$

(مسئله ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

۴

۳

۲

۱

	$-\infty$	$- a $	$ a $	$+\infty$
$\Rightarrow f'$		-	+	-
f		\searrow	\nearrow	\searrow
		$-\frac{1}{\sqrt{ a }}$	$\frac{1}{\sqrt{ a }}$	
		min	max	

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{max} : \left(|a|, \frac{1}{\sqrt{|a|}} \right) \\ \text{min} : \left(-|a|, -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \right) \end{array} \right. \Rightarrow m = \frac{\frac{1}{\sqrt{|a|}} + \frac{1}{\sqrt{|a|}}}{|a| + |a|} = \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$$

(مسئله ۲- کاربرد های مشتق: صفحه های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۴

۳

۲

۱

دامنه تابع f ، \mathbb{R} است.

$$f'(x) = \frac{2x+k}{\sqrt[3]{(x^2+kx-k)^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{-k}{2}$$

برای این که $x = \frac{-k}{2}$ تنها نقطه بحرانی تابع f باشد، دو حالت می‌تواند

اتفاق بیفتد:

حالت اول: مخرج f' ریشه نداشته باشد:

$$\Rightarrow k^2 + 4k < 0 \Rightarrow -4 < k < 0 \quad (1)$$

حالت دوم: مخرج ریشه مضاعف $-\frac{k}{2}$ داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta = k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k = 0, -4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} k \in [-4, 0]$$

پس k ، 5 مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.

(مسئله ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا نقاط بحرانی $f(x)$ را در بازه $[1, 3]$ به دست می آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق.ق.غ} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & k-2 & k-4 & k \end{array}$$

باید k (ماکزیمم مطلق) و $k-4$ (مینیمم مطلق) قرینه یکدیگر باشند:

$$\Rightarrow k - 4 = -k \Rightarrow k = 2$$

(مسئله ۲- کاربردهای مشتق: صفحه های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

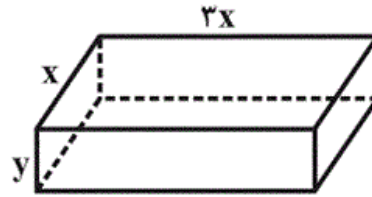
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

قطعه سیم مورد نظر، یال‌های مکعب مستطیل را می‌سازد.



ابعاد مکعب مستطیل را مطابق شکل، x ، $3x$ و y در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \text{مجموع طول یال‌ها} = 4x + 4(3x) + 4y = 48$$

$$\Rightarrow 4x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 4x$$

$$\Rightarrow V(x) = (3x)(x)(y) = 3x^2 y = 3x^2 (12 - 4x)$$

$$= 12(3x^2 - x^3)$$

$$V'(x) = 12(6x - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(2) = 12(12 - 8) = 48$$

(مسئله ۲- کاربرد های مشتق: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 16\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 4$$

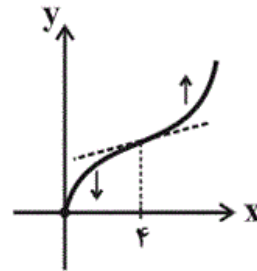
کافی است مشتق دوم را تعیین علامت کنیم:

x	۰	۴	$+\infty$
f''	-	۰	+
f	∩	$f'(4) > 0$	∪

حال برای شیب خط مماس در نقطه عطف داریم:

$$m = f'(4) = \frac{1}{2}(4) + \frac{8}{\sqrt{4}} = 6$$

بنابراین نمودار آن در اطراف $x = 4$ ، به صورت زیر خواهد بود:



(مسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6x + 2b$$

نقطه A، نقطه عطف تابع f است، پس:

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 12 + 2b = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 2c + 20 = -26$$

$$\Rightarrow 8 - 24 + 2c + 40 = 0 \Rightarrow c = -15$$

پس ضابطه f' به صورت زیر در می آید:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5) = 3(x+1)(x-5)$$

f' را تعیین علامت می کنیم:

		-1		5	
f'	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗
		max		min	

مقدار ماکزیمم نسبی f برابر است با:

$$f(-1) = 28$$

(مسئله ۲- کاربردهای مشتق: صفحه های ۱۲۷ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

خط مماس بر نمودار تابع در $x = 0$ ، افقی است؛ یعنی $f'(0) = 0$.

$$\Rightarrow f'(0) = b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 - 4, f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

با توجه به نمودار، طول نقطه‌ای که نمودار بر محور x ها مماس است، باید

$x = -\frac{2a}{3}$ باشد، بنابراین مقدار تابع در این نقطه نیز باید صفر باشد.

$$\Rightarrow f\left(-\frac{2a}{3}\right) = \left(-\frac{2a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 - 4 = \frac{4a^3}{27} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

(مسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

سه بردار غیر صفر \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} در یک صفحه قرار دارند، اگر و فقط اگر ضرب مختلط این سه بردار برابر صفر باشد، یعنی:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{داریم:}$$

طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس 3×3 داریم:

$$\Rightarrow (m + 3 - 2m + 2) - (-m + m - 1 + 6) = 0 \Rightarrow m = 0$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

$$\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = (-3)(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}[(2, 3, 4) + (-6, -15, 0)] = (-1, -3, 1)$$

بنابراین مختصات نقطه M به صورت $(-1, -3, 1)$ است.

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

 ۴ ✓

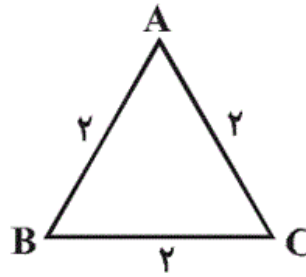
 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}) \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$= 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{BC}$$



تذکر: دقت کنید که زاویه بین بردارهای \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{BC} و نیز \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{CB} ،

مکمل زاویه‌های B و C در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است، چون ابتدا

یا انتهای هر جفت از این بردارها بر نقطه B یا C منطبق نیست.

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (3\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{j} - \vec{k}) = 3\vec{i} \times \vec{j} - 3\vec{i} \times \vec{k} + \vec{j} \times \vec{j} - \vec{j} \times \vec{k} \\ &= 3\vec{k} + 3\vec{j} + \vec{0} - \vec{i} = (-1, 3, 3)\end{aligned}$$

$$xy \text{ صفحه } \vec{u} \text{ تصویر قائم } \vec{u}_1 = (-1, 3, 0) \Rightarrow |\vec{u}_1| = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{|\vec{u}_1|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$yz \text{ صفحه } \vec{u} \text{ تصویر قائم } \vec{u}_2 = (0, 3, 3) \Rightarrow |\vec{u}_2| = 3\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(ممدعلی نادرپور)

$$\begin{aligned}\overline{AB} \parallel \overline{AC} &\Rightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \parallel (\vec{c} - \vec{a}) \Rightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} = \vec{0}\end{aligned}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

اگر θ زاویه بین بردارهای a و b باشد، داریم:

$$\tan \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

اگر بردار \vec{a}' تصویر قائم بردار \vec{a} بر راستای بردار \vec{b} باشد، داریم:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos \theta$$

$$\xrightarrow{\theta=60^\circ} |\vec{a}'| = \frac{1}{2} |\vec{a}|$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

۴

۳

۲

۱

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) - (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$= 4\vec{a} \cdot \vec{b} \xrightarrow{|\vec{a}-\vec{b}|^2 \geq 0} |\vec{a} + \vec{b}|^2 \geq 4\vec{a} \cdot \vec{b} \xrightarrow{|\vec{a}+\vec{b}|=8} 4\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 64$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 16$$

تذکر: حالت تساوی زمانی برقرار است که دو بردار \vec{a} و \vec{b} هم راستا،

هم‌جهت و هم‌اندازه ($|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$) باشند.

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱

دو بردار $\vec{u} = (2a, b, c)$ و $\vec{v} = (2, 1, 1)$ را در نظر بگیرید. طبق نامساوی

کشی شوارتز داریم:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}| \Rightarrow |4a + b + c| \leq \sqrt{4a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{4 + 1 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (4a + b + c)^2 \leq (4a^2 + b^2 + c^2) \times 6$$

$$\Rightarrow \frac{(4a + b + c)^2}{4a^2 + b^2 + c^2} \leq 6$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا بردارهای \overline{MN} و \overline{NP} را تشکیل داده و مساحت مثلث MNP را

به دست می آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{MN} = (5, 3, 1) \\ \overline{NP} = (1, 3, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{MN} \times \overline{NP} = (12, -24, 12)$$

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} |\overline{MN} \times \overline{NP}| = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + (-24)^2 + 12^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 4 \times 12^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \sqrt{6 \times 12^2} = 6\sqrt{6}$$

می دانیم مساحت مثلثی که از وصل کردن وسطهای اضلاع یک مثلث پدید

می آید، $\frac{1}{4}$ مساحت آن مثلث است، بنابراین داریم:

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} \Rightarrow 6\sqrt{6} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 24\sqrt{6}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه های ۱۱ تا ۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned}
 & |\vec{a} - \vec{b}|^r + |\vec{b} - \vec{c}|^r + |\vec{c} - \vec{a}|^r \\
 &= r \left(|\vec{a}|^r + |\vec{b}|^r + |\vec{c}|^r \right) - r (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) \\
 &= r \left(|\vec{a}|^r + |\vec{b}|^r + |\vec{c}|^r \right) - |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^r \\
 &\Rightarrow r = r \times r - |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^r \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0 \\
 &\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & |r\vec{a} + \delta\vec{b} + \delta\vec{c}| = |r\vec{a} + \delta(\vec{b} + \vec{c})| = |r\vec{a} + \delta(-\vec{a})| \\
 &= |-r\vec{a}| = r|\vec{a}| = r
 \end{aligned}$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱

$$f(1) = a^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{ab} = 1 + \frac{2}{ab} = 1/2 \Rightarrow \frac{2}{ab} = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow ab = 10 \quad (*)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{ab} = \sqrt{a} + \frac{2}{10} = 3/2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9 \xrightarrow{(*)} b = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow 2a - 9b = 18 - 10 = 8$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(جوانبش نیکنام)

$$5^{\log x} + 5^{(\log x)-1} = 3^{(\log x)+1} + 3^{(\log x)-1}$$

$$\Rightarrow 5^{\log x} \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 3^{\log x} \left(3 + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \frac{5}{3} \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

$$\Rightarrow \log \frac{(x-1)^9}{\sqrt{3}} = \log \frac{81}{\sqrt{3}} = \log \frac{3^4}{3^{\frac{1}{2}}} = 8 \log 3 = 8$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

چون حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 2$ برابر صفر است، حد صورت کسر هم باید صفر باشد (تا حاصل حد متناهی باشد):

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{ax+1} - 3) = 0 \Rightarrow \sqrt{2a+1} - 3 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{4 - x^2} \times \underbrace{\frac{\sqrt{4x+1} + 3}{\sqrt{4x+1} + 3}}_6$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1-9}{-6(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{-6(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow a - 18b = 4 - 18\left(-\frac{1}{6}\right) = 4 + 3 = 7$$

(مسئله ۱- هر دو پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left[x + \frac{3}{2} \right] + 3a \right) = 1 + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{2} \sin^2 x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{2} \sin x \cos x}{-\sqrt{2} \sin x} = -2$$

$$f(0) = 2b$$

$$\Rightarrow 1 + 3a = -2 = 2b$$

$$\Rightarrow a = b = -1 \Rightarrow a + b = -2$$

(مسئله ۱- هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۵۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عمید علیزاده)

۹۳ -

$$f(x) = 2x - |x| + 3 = \begin{cases} 3x + 3 & ; x < 0 \\ x + 3 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

عرض نقطه برخورد تابع f^{-1} و محور y ها، با طول نقطه برخورد تابع f و

محور x ها برابر است. بنابراین داریم:

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 < 0 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \geq 0 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

بنابراین محل برخورد تابع f^{-1} و محور y ها نقطه $(0, -1)$ است.

۴

۳

۲

۱ ✓

راه حل اول:

$$y = f(x) = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = x-1 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow g \circ f^{-1}(x) = g(f^{-1}(x)) = 1 - 3((x-2)^2 + 1)$$

$$= -3x^2 + 12x - 14$$

راه حل دوم: از عددگذاری استفاده می کنیم:

$$f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

$$\Rightarrow g(f^{-1}(2)) = g(1) = -2$$

با جای گذاری $x = 2$ ، فقط در گزینه «۱» مقدار ۲- حاصل می شود.

(مسئله ۱- تابع: صفحه های ۵۷ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f(x) = 1 - b \sin x \xrightarrow{x=0} y = f(0) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - b(1) = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2 \sin x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{94\pi}{3}\right) = 1 - 2 \sin\left(\frac{94\pi}{3}\right) = 1 - 2 \sin\left(\frac{92\pi + \pi}{3}\right)$$

$$= 1 - 2 \sin\left(31\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1 + 2 \sin \frac{\pi}{3} = 1 + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$$

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(جوابش نیکنام)

$$\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) = \cos \frac{3\pi}{7} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right)$$

$$= -\cos \frac{4\pi}{7}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}$$

$$= -\cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله به ترتیب برابر $-a$ و b هستند. پس داریم:

$$a + b = -a, ab = b$$

$$b \neq 0 \Rightarrow a = 1, b = -2$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \text{کم‌ترین مقدار} = -\frac{9}{4}$$

(مسئله ۱- بیبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲

۱

با توجه به عبارت $\sqrt{2x+1}$ ، باید $2x+1 \geq 0$ باشد، یعنی $x \geq -\frac{1}{2}$ است

که در این صورت عبارت $x+2$ همواره مثبت خواهد بود، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1} + x = |x+2| = x+2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1} = 2 \Rightarrow 2x+1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \geq -\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله یک جواب دارد.

(مسئله ۱- بیبر و معادله: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱