



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



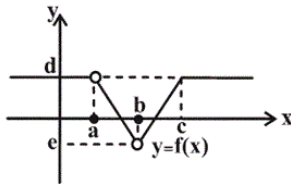
<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان 1-10 سوال -

۸۱- کدام یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی راست عدد ۲ است؟

- (۱) (۲, ۳)      (۲) (۱, ۲)      (۳) (۰, ۴)      (۴) {۲} - (۱, ۳)

۸۲- تابعی که نمودار آن در شکل زیر نشان داده شده است، در چند نقطه حد ندارد؟



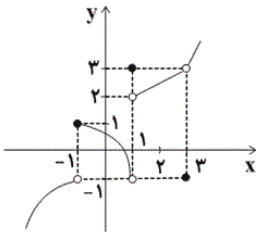
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) در تمام نقاط حد دارد.

۸۳- شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x-1)$  است. حاصل عبارت  $A = -\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)\right) + \left(\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)\right) - f(2)$  کدام است؟



(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) -۱

(۴) ۲

۸۴- دو تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x+b, & x \geq 1 \\ x+a, & x < 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 1-3x^2, & x \geq 1 \\ -2, & x < 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. اگر حد تابع  $f+g$  در نقطه  $x=1$  برابر ۳ باشد،

مقدار  $a$  کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۸۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sin x} \right]$  کدام است؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)

(۴) وجود ندارد.

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) صفر

۸۶- اگر  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & |x| < 1 \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases}$  باشد، آنگاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳) -۳

(۲) -۲

(۱) ۱

۸۷- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} & , x > 1 \\ ax-a+b & , x < 1 \end{cases}$  در  $x=1$  حد داشته باشد، مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) -۱      (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

۸۸- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2-3x+2}$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳) ۲      (۴)  $\frac{1}{4}$

۸۹- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-x+1}{9-x^2}$  کدام است؟

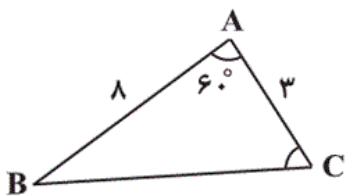
- (۱)  $\frac{1}{8}$       (۲)  $-\frac{1}{8}$       (۳)  $\frac{1}{24}$       (۴)  $-\frac{1}{24}$

۹۰- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴) ۲

هندسه 2- 10 سوال -

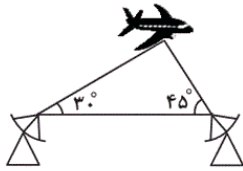
۱۲۱- در شکل مقابل،  $\sin \hat{C}$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{2\sqrt{3}}{7}$   
 (۲)  $\frac{4\sqrt{3}}{7}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{14}$   
 (۴)  $\frac{3\sqrt{3}}{14}$

۱۲۲- مطابق شکل زیر، دو ایستگاه رادار، هواپیمایی را با زاویه‌های  $30^\circ$  و  $45^\circ$  درجه رصد کرده‌اند. اگر مجموع فاصله‌های هواپیما از دو ایستگاه

برابر  $\sqrt{3}-1$  کیلومتر باشد، فاصله این دو ایستگاه از یکدیگر چند کیلومتر است؟  $(\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4})$

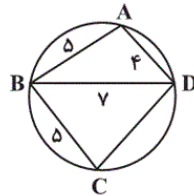


- (۱) ۲
- (۲)  $\sqrt{2}-1$
- (۳)  $\sqrt{2}$
- (۴)  $2-\sqrt{2}$

۱۲۳- در مثلثی به اضلاع  $AB=6$ ،  $AC=10$  و  $BC=14$ ، فاصله محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع  $AB$  و  $AC$  تا رأس  $A$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{14\sqrt{3}}{3}$
- (۲)  $\frac{25\sqrt{3}}{3}$
- (۳)  $\frac{20\sqrt{3}}{3}$
- (۴)  $\frac{27\sqrt{3}}{3}$

۱۲۴- در شکل مقابل محیط چهارضلعی  $ABCD$  کدام است؟

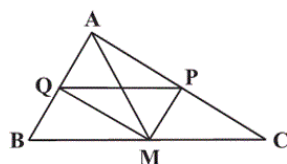


- (۱) ۱۸
- (۲) ۲۰
- (۳) ۲۲
- (۴) ۲۳

۱۲۵- در مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  به طول ضلع ۸ واحد، نقطه  $D$  روی ضلع  $BC$  به فاصله  $7$  واحد از رأس  $A$  قرار دارد. فاصله نقطه  $D$  از نزدیک‌ترین ضلع مثلث  $ABC$  به آن (به جز  $BC$ )، چند برابر فاصله آن از دورترین ضلع مثلث است؟

- (۱)  $0/3$
- (۲)  $0/4$
- (۳)  $0/6$
- (۴)  $0/8$

۱۲۶- در مثلث  $ABC$  به طول اضلاع  $AB=16$ ،  $AC=18$  و  $BC=22$ ، میانه  $AM$  را رسم می‌کنیم. سپس نیمسازهای زاویه‌های  $AMC$  و  $AMB$  را رسم می‌کنیم. طول پاره خط  $PQ$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{132}{13}$
- (۲)  $\frac{134}{13}$
- (۳)  $\frac{143}{12}$
- (۴)  $\frac{145}{12}$

۱۲۷- در مثلث ABC، طول نیمساز داخلی AD از رابطه  $AD^2 = BD \times CD$  به دست می‌آید. نسبت  $\frac{AC}{CD}$  کدام است؟

(۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۴)  $\sqrt{2}$

(۳) ۲

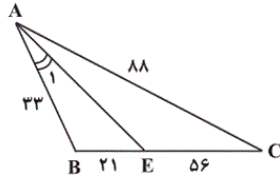
۱۲۸- در شکل مقابل، اندازه زاویه  $A_1$  چند درجه است؟

(۱) ۱۵

(۲) ۳۰

(۳) ۴۵

(۴) ۶۰



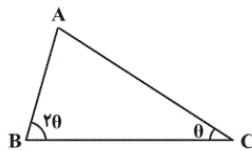
۱۲۹- مطابق شکل در مثلث ABC، اگر  $AB = 10$  باشد، طول AC کدام است؟  $(\cos \theta = \frac{3}{5})$

(۱) ۸

(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

(۴) ۲۰



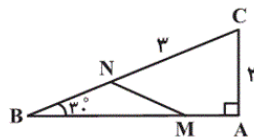
۱۳۰- در مثلث قائم‌الزاویه زیر،  $\hat{B} = 30^\circ$ ،  $AC = 2$  و  $NC = 3$  است. اگر نقطه M روی AB طوری قرار داشته باشد که  $BM = 5AM$ ، در آن صورت فاصله M از N کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{39}}{3}$

(۲)  $\frac{\sqrt{13}}{2}$

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴)  $\frac{5}{2}$



حسابان 1 - سوالات موازی - 10 سوال

۱۰۱- کدام یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی راست عدد ۲ است؟

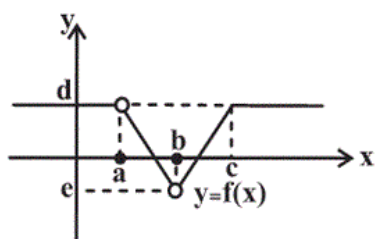
(۴)  $\{2, 3, 1\}$

(۳)  $\{0, 4, 5\}$

(۲)  $\{1, 2, 3\}$

(۱)  $\{2, 3, 4\}$

۱۰۲- تابعی که نمودار آن در شکل زیر نشان داده شده است، در چند نقطه حد ندارد؟



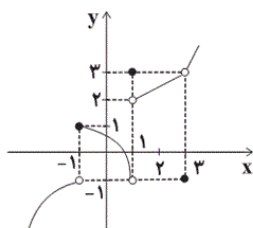
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

(۴) در تمام نقاط حد دارد.

۱۰۳- شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = f(x-1)$  است. حاصل عبارت  $A = -\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)\right) + \left(\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)\right) - f(2)$  کدام است؟



۱ (۱)

۳ (۲)

-۱ (۳)

۲ (۴)

۱۰۴- دو تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x+b & , x \geq 1 \\ x+a & , x < 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 1-3x^2 & , x \geq 1 \\ -2 & , x < 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. اگر حد تابع  $f+g$  در نقطه  $x=1$  برابر ۳ باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sin x} \right]$  کدام است؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)

(۴) وجود ندارد.

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۰۶- اگر  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & , |x| < 1 \\ x & , |x| \geq 1 \end{cases}$ ، آنگاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  کدام است؟

صفر (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۷- اگر  $f(x) = [x] + [-x]$  باشد، آنگاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$  کدام است؟ ( [ ] ، علامت جزء صحیح است.)

صفر (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

۱۰۸- مقدار  $\tan 165^\circ$  کدام است؟

(۲)  $-2 - \sqrt{3}$

(۱)  $-2 + \sqrt{3}$

(۴)  $-1 - \sqrt{3}$

(۳)  $1 - \sqrt{3}$

۱۰۹- حاصل عبارت مثلثاتی  $(\frac{1}{4} - \sin^2 x) \sin 2x$  به ازای  $x = 11/25^\circ$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{8}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

۱۱۰- حاصل عبارت  $A = \frac{\tan 7^\circ - \tan 1^\circ}{\tan 5^\circ + \tan 1^\circ}$  کدام است؟

(۲)  $2 \sin 2^\circ$

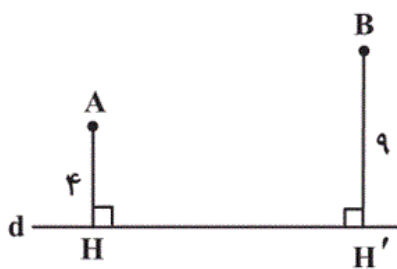
(۱)  $2 \sin 1^\circ$

(۴)  $2 \cos 1^\circ$

(۳)  $2 \cos 2^\circ$

هندسه 2- سوالات موازی - 10 سوال -

۱۳۱- در شکل زیر، نقطه M را روی خط d طوری پیدا می‌کنیم که  $AM + MB$  کم‌ترین مقدار ممکن باشد. اندازه مساحت مثلث AMH چند برابر مساحت مثلث BMH' است؟



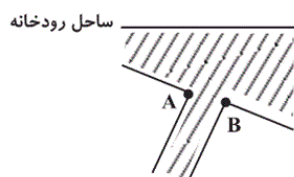
(۱)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{4}{9}$

(۳)  $\frac{16}{81}$

(۴)  $\frac{4}{5}$

۱۳۲- دو اسکله A و B به ترتیب به فاصله‌های ۱۱ و ۲۱ کیلومتر از ساحل رودخانه قرار دارند. می‌خواهیم اسکله M را روی ساحل رودخانه طوری بسازیم که طول مسیر MAB کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. اگر  $AB = 26 \text{ km}$  باشد، طول این مسیر چند کیلومتر است؟



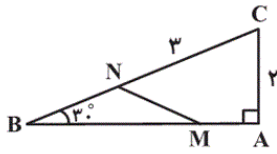
(۱) ۴۰

(۲) ۵۲

(۳) ۶۶

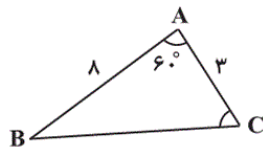
(۴) ۷۲

۱۳۳- در مثلث قائم‌الزاویه زیر،  $\hat{B} = 30^\circ$ ،  $AC = 2$  و  $NC = 3$  است. اگر نقطه  $M$  روی  $AB$  طوری قرار داشته باشد که  $BM = 5AM$ ، در آن صورت فاصله  $M$  از  $N$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{\sqrt{39}}{3}$
- (۲)  $\frac{\sqrt{13}}{2}$
- (۳)  $\frac{3}{2}$
- (۴)  $\frac{5}{2}$

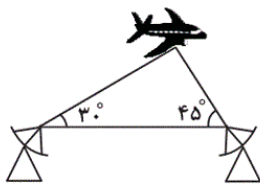
۱۳۴- در شکل مقابل،  $\sin \hat{C}$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{2\sqrt{3}}{7}$
- (۲)  $\frac{4\sqrt{3}}{7}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{14}$
- (۴)  $\frac{3\sqrt{3}}{14}$

۱۳۵- مطابق شکل زیر، دو ایستگاه رادار، هواپیمایی را با زاویه‌های  $30^\circ$  و  $45^\circ$  درجه رصد کرده‌اند. اگر مجموع فاصله‌های هواپیما از دو ایستگاه

برابر  $\sqrt{3} - 1$  کیلومتر باشد، فاصله این دو ایستگاه از یکدیگر چند کیلومتر است؟  $(\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4})$



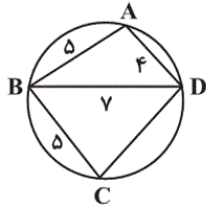
- (۱) ۲
- (۲)  $\sqrt{2} - 1$
- (۳)  $\sqrt{2}$
- (۴)  $2 - \sqrt{2}$

۱۳۶- در مثلثی به اضلاع  $AB = 6$ ،  $AC = 10$  و  $BC = 14$ ، فاصله محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع  $AB$  و  $AC$  تا رأس  $A$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{14\sqrt{3}}{3}$
- (۲)  $\frac{25\sqrt{3}}{3}$
- (۳)  $\frac{20\sqrt{3}}{3}$
- (۴)  $\frac{27\sqrt{3}}{3}$



۱۳۷- در شکل مقابل، محیط چهارضلعی ABCD کدام است؟



۱۸ (۱)

۲۰ (۲)

۲۲ (۳)

۲۳ (۴)

۱۳۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۸ واحد، نقطه D روی ضلع BC به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد. فاصله نقطه D از نزدیک‌ترین ضلع مثلث ABC به آن (به جز BC)، چند برابر فاصله آن از دورترین ضلع مثلث است؟

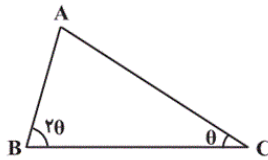
۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

۱۳۹- مطابق شکل در مثلث ABC، اگر  $AB = 10$  باشد، طول AC کدام است؟  $(\cos \theta = \frac{3}{5})$



۸ (۱)

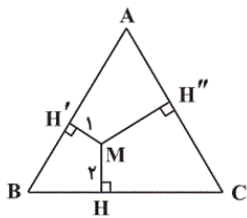
۱۲ (۲)

۱۶ (۳)

۲۰ (۴)

۱۴۰- مطابق شکل، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع  $4\sqrt{3}$  و نقطه دلخواه M درون آن مفروض است. اگر  $MH = 2$  و  $MH' = 1$  باشد،

طول  $H'H''$  کدام است؟



$\sqrt{7}$  (۱)

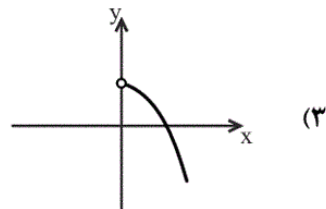
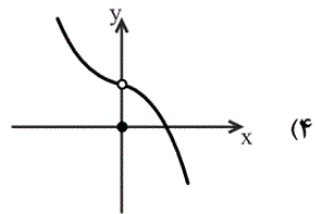
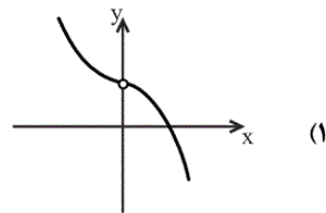
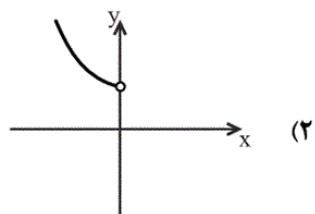
$\sqrt{10}$  (۲)

$\sqrt{13}$  (۳)

$\sqrt{15}$  (۴)

حسابان 1- گواه - 10 سوال -

۹۱- در کدام نمودار زیر، تابع در همسایگی چپ نقطهٔ صفر تعریف شده ولی در همسایگی راست آن تعریف نشده است؟



۹۲- با توجه به نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \notin \mathbb{Z} \\ 3, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ، کدام گزینه درست نیست؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = 3 \quad (1)$$

$$f(0) = 3 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \quad (3)$$

۹۳- تابع با ضابطهٔ  $f(x) = \frac{1}{[x]}$ ، در نقطه‌ای با کدام طول زیر، هیچ نوع همسایگی (چپ یا راست یا دو طرفه) ندارد؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)  $\frac{1}{2}$

۹۴- با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ  $f(x) = x - [x]$ ، اگر  $a \in \mathbb{Z}$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  کدام است؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) a (۲) صفر (۳) ۱ (۴) -۱

۹۵- در کدام تابع با ضابطهٔ زیر، حد تابع در  $x = 0$  وجود ندارد؟

$$y = \begin{cases} x, & x > 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2}{x} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

۹۶- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4}{f(x)} = 2$  باشد، آنگاه  $f$  کدام تابع با ضابطه زیر می‌تواند باشد؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)

$f(x) = x^2$  (۲)

$f(x) = [x]$  (۱)

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2$  (۴)

$f(x) = \sqrt{2x}$  (۳)

۹۷- در تابع با ضابطه  $f(x) = \cos x$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{3}} f(x)$ ، کدام مقدار زیر نمی‌تواند باشد؟

$x \rightarrow \frac{\pi^+}{3}$

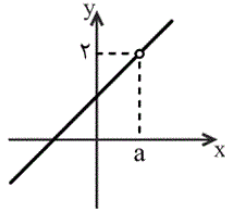
$\frac{5\pi}{3}$  (۲)

$-\frac{\pi}{3}$  (۱)

$\frac{2\pi}{3}$  (۴)

$\frac{7\pi}{3}$  (۳)

۹۸- نمودار تابع با ضابطه  $y = \frac{x^2 + bx + c}{x-1}$  به صورت زیر است.  $b + c$  کدام است؟



(۱) صفر

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) -۲

۹۹- اگر وقتی  $x \rightarrow -3$ ،  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$  باشد، آنگاه  $a$  کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۵

(۴) -۵

(۳) -۳

۱۰۰- اگر  $f(x) = \frac{3x+2}{3x^2-10x+8}$  و  $g(x) = \frac{3x-1}{3x-4}$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{f(x)}{g(x)}$  کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۱

(۴) -۴

### آمار و احتمال - 10 سوال

۱۴۱- اگر میانگین داده‌های  $x$ ، ۳۹، ۳۶، ۴۱، ۳۸، ۳۵، ۴۰، ۴۲ برابر ۳۹ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۵/۵

(۳) ۶

(۴) ۷

۱۴۲- میانگین و واریانس ۲۰ داده آماری به ترتیب برابر ۱۲ و ۱۵ است. اگر ۲ داده با مقادیر ۱۴ و ۱۰ به این داده‌ها اضافه شوند، واریانس ۲۲ داده موجود کدام است؟

(۱) ۱۴/۵

(۲) ۱۴

(۳) ۱۴/۲۵

(۴) ۱۴/۷۵

۱۴۳- هرگاه واریانس داده‌های ۴،  $\frac{a+b}{2}$ ،  $b$  و  $a$  صفر باشد، حاصل  $2a+3b$  کدام است؟

(۱) ۲۲

(۲) ۲۰

(۳) ۱۸

(۴) ۲۱

۱۴۴- با توجه به جدول زیر و در صورتی که رابطه  $2a_i + 6 = 3x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )، بین داده‌های  $x_i$  و  $a_i$  برقرار باشد، ضریب تغییرات داده‌های  $a_i$  کدام است؟

(۱) ۰/۹

(۲) ۰/۸

(۳) ۱/۲

(۴) ۲

$x_i$	۱	۲	۴	۷
فراوانی	۳	۹	۴	۹

۱۴۵- داده‌های آماری  $x_1, x_2, \dots, x_n$  با میانگین و واریانس غیرصفر مفروض‌اند. اگر تمام این داده‌ها را ۲۰ درصد افزایش دهیم، واریانس  $\alpha$  برابر و ضریب تغییرات  $\beta$  برابر می‌شود.  $\frac{\alpha}{\beta}$  کدام است؟

(۱) ۱/۲

(۲) ۱/۴۴

(۳) ۱

(۴) این عبارت تعریف نشده خواهد شد.

۱۴۶- در نمودار جعبه‌ای داده‌های مقابل، حاصل  $\frac{Q_2 + \text{Min}}{Q_3 - Q_1}$  کدام است؟

(۱) ۱

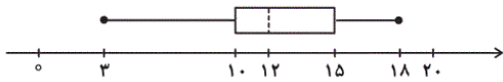
(۲) ۲/۵

(۳) ۳

(۴) ۳/۵

نمرات دانشجو: ۱۳، ۷/۵، ۱۵، ۱۹، ۱۲، ۱۸، ۱۳/۵

۱۴۷- با توجه به نمودار جعبه‌ای زیر، دامنه تغییرات داده‌ها چند برابر دامنه میان چارکی داده‌هاست؟



(۲) ۳

(۱)  $\frac{5}{3}$

(۴) ۴

(۳)  $\frac{5}{4}$

۱۴۸- چه تعداد از ویژگی‌های زیر لزوماً در مورد نمونه‌گیری طبقه‌ای برقرار است؟

الف) نمونه‌گیری طبقه‌ای هزینه و زمان را نسبت به نمونه‌گیری خوشه‌ای کاهش می‌دهد.  
ب) اندازه طبقات با هم برابر است.

پ) اندازه نمونه‌های انتخابی از طبقات، برابر یکدیگر است.

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ

۱۴۹- در یک نمونه‌گیری سامانمند بین ۱۸۰ نفر که به ترتیب از شماره ۱ تا ۱۸۰ شماره‌گذاری شده‌اند، می‌خواهیم یک نمونه ۱۰ تایی انتخاب کنیم. اگر یکی از اعضای انتخابی شماره ۲۶ باشد، آن‌گاه کدام شماره انتخاب نشده است؟

(۴) ۱۵۲

(۳) ۱۱۴

(۲) ۸۰

(۱) ۴۴

۱۵۰- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) پارامتر جامعه مقدار ثابتی دارد.

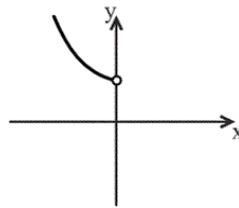
(۲) از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌شود.

(۳) ممکن است آماره به ازای دو نمونه یکسان باشد.

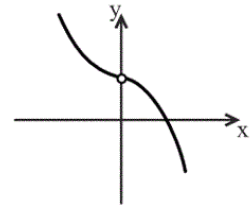
(۴) پارامتر جامعه هیچ‌گاه قابل محاسبه نیست.

### حسابان گواه-سوالات موازی - 10 سوال

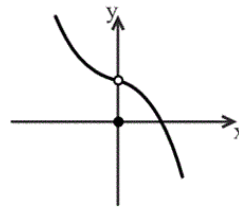
۱۱۱- در کدام نمودار زیر، تابع در همسایگی چپ نقطه صفر تعریف شده ولی در همسایگی راست آن تعریف نشده است؟



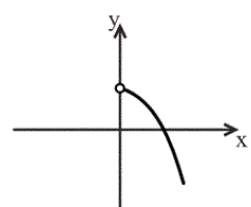
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۱۱۲- با توجه به نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \notin \mathbb{Z} \\ 3, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$  کدام گزینه درست نیست؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -1 \quad (2)$$

$$f(0) = 3 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \quad (3)$$

۱۱۳- تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{[x]}$  در نقطه با کدام طول زیر، هیچ نوع همسایگی (چپ یا راست یا دو طرفه) ندارد؟ [ ]، نماد جزء صحیح است.

- (1) صفر      (2) 1      (3) -1      (4)  $\frac{1}{2}$

۱۱۴- با توجه به نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x - [x]$ ، اگر  $a \in \mathbb{Z}$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  کدام است؟ [ ]، نماد جزء صحیح است.

- (1) a      (2) صفر      (3) 1      (4) -1

۱۱۵- در کدام تابع با ضابطه زیر، حد تابع در  $x = 0$  وجود ندارد؟

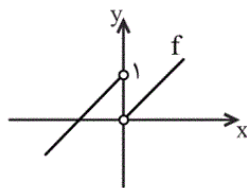
$$y = \begin{cases} x, & x > 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2}{x} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

۱۱۶- با توجه به نمودار تابع f، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$  کدام است؟ [ ]، نماد جزء صحیح است.



- (1) 1  
(2) وجود ندارد.  
(3) 2  
(4) صفر

۱۱۷- در تابع با ضابطه  $f(x) = (x+a)[x]$  اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ ، آنگاه عدد حقیقی  $a$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

۲ (۲)

۱ (۱)

صفر (۴)

-۱ (۳)

۱۱۸- حاصل عبارت  $A = \sin 78^\circ \cos 20^\circ + \sin 12^\circ \cos 70^\circ$  کدام است؟

$\cos 8^\circ$  (۲)

$\sin 8^\circ$  (۱)

$\cos 32^\circ$  (۴)

$\sin 32^\circ$  (۳)

۱۱۹- اگر  $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$ ، مقدار عبارت  $\cos(x - \frac{\pi}{6})$  چقدر است؟

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

۱۲۰- حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

$\sqrt{6}$  (۲)

۲ (۱)

$2\sqrt{3}$  (۴)

$2\sqrt{2}$  (۳)

۸۱-

(یاسین سپهر)

اگر  $r > 0$  باشد، بازه  $(a, a+r)$  را یک همسایگی راست عدد  $a$  می‌گوییم.

با توجه به تعریف فوق بازه  $(2, 3)$  همسایگی راست ۲ است. بررسی سایر گزینه‌ها:

بازه  $(1, 2)$ ، همسایگی چپ عدد ۲ می‌باشد.

بازه  $(0, 4)$  یک همسایگی ۲ است.

مجموعه  $\{2\} - (1, 3)$  همسایگی محذوف ۲ می‌باشد.

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۴

۳

۲

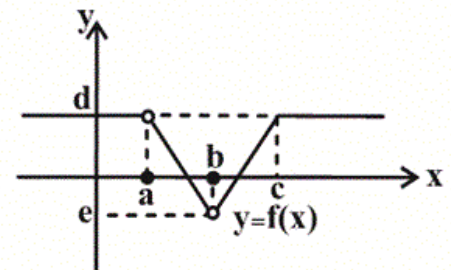
۱ ✓

۸۲-

(غلامرضا علی)

حد راست و حد چپ تابع در نقاط  $a, b$  و  $c$  با هم برابر هستند، بنابراین تابع در این نقاط حد دارد، پس تابع  $f$  در تمام نقاط حد دارد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \\ \lim_{x \rightarrow b} f(x) = e \end{array} \right.$$



(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

۴ ✓

۳

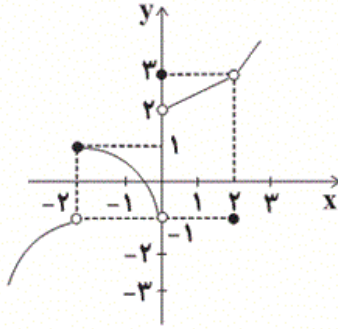
۲

۱



(امیر ممبر سلطانی)

اگر نمودار تابع  $y = f(x-1)$  را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(x)$  به دست می‌آید:



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ f(2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 1 \end{cases}$$

$$A = -(-1) + 1 - (-1) = 3$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

۴

۳

۲

۱

(یاسین سپهر)

ابتدا حد تابع  $g$  وقتی  $x \rightarrow 1$  را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - 3x^2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2$$

پس  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$  می‌باشد. از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} ((f + g)(x)) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$$

۴

۳

۲

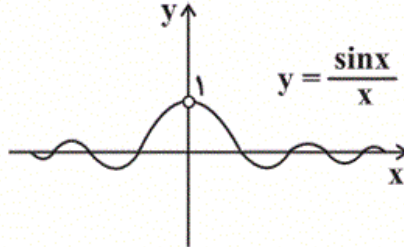
۱

با توجه به نمودار کتاب درسی،  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  است ولی وقتی  $x \rightarrow 0$ ،

$\sin x < x$  است. یعنی  $\frac{\sin x}{x}$  از مقادیر کم‌تر از ۱ به آن نزدیک

می‌شود. و در نتیجه  $\frac{x}{\sin x}$  از مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به آن نزدیک می‌شود،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sin x} \right] = 1 \text{ بنابراین}$$



(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & |x| < 1 \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & -1 < x < 1 \\ x, & x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-1)^- < -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1 \\ -1 < 1^- < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -(1)^2 + 3(1) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 + 2 = 1$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(میلاد سبازی لاریبانی)

شرط داشتن حد آن است که حد راست و چپ در آن نقطه موجود و برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

حد راست تابع را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$$

حد ابهام  $\frac{0}{0}$  دارد. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه حد چپ تابع نیز برابر با  $\frac{1}{2}$  است.

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(ایمان پینی فروشان)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

حد ابهام  $\frac{0}{0}$  دارد. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{(x-2)(x-1)} \times \frac{\sqrt{2x} + 2}{\sqrt{2x} + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2) \times 1 \times 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

حد صورت و مخرج کسر وقتی  $x \rightarrow 3$  برابر صفر است. صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - (x-1)}{9-x^2} &\times \frac{\sqrt{x+1} + (x-1)}{\sqrt{x+1} + (x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - (x-1)^2}{(9-x^2)(4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 3x}{4(9-x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(3-x)}{4(3-x)(3+x)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

با تغییر متغیر  $\frac{\pi}{2} - x = t$ ، حد داده شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{(\pi - 2x)^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos 2(\frac{\pi}{2} - t)}{(\pi - 2(\frac{\pi}{2} - t))^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi - 2t)}{(2t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{4t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 t}{4t^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

ابتدا با استفاده از قضیه کسینوسها طول ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^2 = 3^2 + 8^2 - 2(3)(8)\cos 60 = 9 + 64 - 48\left(\frac{1}{2}\right) = 49 \Rightarrow BC = 7$$

طبق قضیه سینوسها داریم:

$$\frac{BC}{\sin 60} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

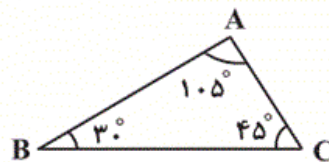
(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

۴

۳

۲ ✓

۱



با توجه به شکل و نوشتن قضیه سینوسها داریم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{2} AC$$

با توجه به فرض مسئله  $AB + AC = \sqrt{3} - 1$  است. پس:

$$AB + AC = \sqrt{2}AC + AC = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} - 1)$$

حال با نوشتن دوباره قضیه سینوسها داریم:

$$\frac{AC}{\sin 3^\circ} = \frac{BC}{\sin 105^\circ}$$

$$\frac{\sin 75^\circ = \sin 105^\circ}{\sin 3^\circ \text{ و } 75^\circ \text{ مکمل اند}} \rightarrow \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{\frac{1}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\Rightarrow BC = (2 - \sqrt{2}) \text{ km}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

۴ ✓

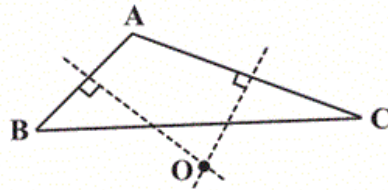
۳

۲

۱

(علی فتح‌آبادی)

محل تلاقی عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث مرکز دایره محیطی است و فاصله آن تا هر یک از رئوس برابر شعاع دایره محیطی است. بنابر قضیه کسینوس‌ها داریم:



$$14^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \cos \hat{A}$$

$$196 = 100 + 36 - 120 \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی فتح‌آبادی)

$$\Delta ABD: 7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 49 = 41 - 40 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$$

$$ABCD = \text{محاوی} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{1}{5}$$

$$\Delta BCD: 7^2 = 5^2 + CD^2 - 2 \times 5 \times CD \times \cos \hat{C}$$

$$\Rightarrow 49 = 25 + CD^2 - 2CD \Rightarrow CD^2 - 2CD - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (CD - 6)(CD + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} CD = 6 \\ CD = -4 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = 4 + 5 + 5 + 6 = 20$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

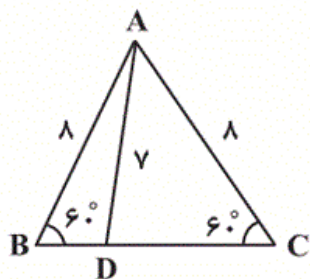
۴

۳

۲ ✓

۱

مطابق شکل فرض می‌کنیم ضلع  $AB$  به نقطه  $D$  نزدیک‌تر است. با توجه به قضیه کسینوس‌ها اندازه پاره‌خط‌های  $BD$  و  $CD$  مشخص می‌شود.



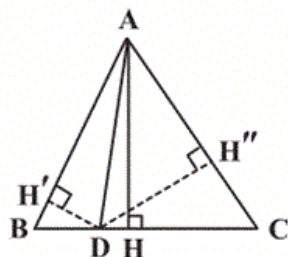
$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos 6^\circ$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + BD^2 - 2 \times 8 \times BD \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BD^2 - 8BD + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (BD - 3)(BD - 5) = 0 \xrightarrow{BD < CD} \begin{cases} BD = 3 \\ CD = 5 \end{cases}$$

حال با نوشتن نسبت مساحت در مثلث‌های  $ABD$  و  $ACD$  داریم:



$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AH}{\frac{1}{2}CD \times AH} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times AB}{\frac{1}{2}DH'' \times AC}$$

$$\Rightarrow \frac{DH'}{DH''} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{5} = 0.6$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

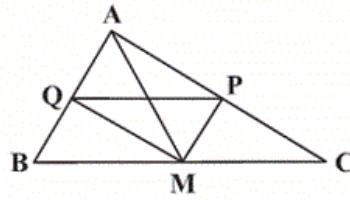
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(نزکس کارگر)



به کمک قضیه میانه‌ها، طول میانه  $AM$  را به دست می‌آوریم:

$$b = 18, c = 16, a = 22 \Rightarrow b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow 18^2 + 16^2 = 2AM^2 + \frac{22^2}{2} \Rightarrow AM = 13$$

حال با توجه به تمرین صفحه ۷۲ کتاب درسی داریم:

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AC} \quad (*)$$

$$\text{قضیه نیمسازها: } \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} = \frac{13}{\frac{22}{2}} = \frac{13}{11} \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{13}{24}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{PQ}{BC} = \frac{13}{24} \Rightarrow PQ = \frac{13}{24} \times 22 = \frac{143}{12}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۶۸ تا ۷۲)

۴

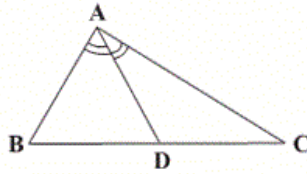
۳ ✓

۲

۱



در تمام مثلث‌ها اندازه نیمساز داخلی از رابطه  $AD^2 = AB \times AC - BD \times CD$  به دست می‌آید، با توجه به فرض سوال داریم:



$$\left. \begin{aligned} AD^2 &= AB \times AC - BD \times CD \\ AD^2 &= BD \times CD \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow AB \times AC - BD \times CD = BD \times CD \Rightarrow AB \times AC = 2BD \times CD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{2CD}{AC} \quad (*)$$

حال با توجه به قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \xrightarrow{(*)} \frac{2CD}{AC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\Rightarrow AC^2 = 2CD^2 \Rightarrow \left(\frac{AC}{CD}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \sqrt{2}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۴

۳

۲

۱

با توجه به قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 77^2 = 33^2 + 88^2 - 2 \times 33 \times 88 \times \cos \hat{A}$$

$$\xrightarrow{\div 11^2} 49 = 9 + 64 - 48 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

حال ثابت می‌کنیم که AE نیمساز رأس A است:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{33}{88} = \frac{3}{8} \\ \frac{BE}{CE} &= \frac{21}{56} = \frac{3}{8} \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \text{AE نیمساز است}$$

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

پس:

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۶ تا ۷۲)

۴

۳

۲

۱

-۱۲۹

(سینا معمربور)

طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AB}{\sin \theta} = \frac{AC}{\sin 2\theta} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{\sin \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{AC} = \frac{1}{2 \cos \theta} = \frac{5}{6} \Rightarrow AC = 12$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

□۴

□۳

□۲✓

□۱

-۱۳۰

(مهرداد ملونری)

چون  $\hat{B} = 30^\circ$ ، پس طول وتر BC برابر ۴ و در نتیجه  $BN = 1$ . از طرفی  $AB = 2\sqrt{3}$  که با شرط  $BM = 5AM$  به دست می‌آید  $BM = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ . لذا طبق قضیه کسینوس‌ها در مثل BMN داریم:

$$MN^2 = 1^2 + \frac{25}{3} - 2 \times 1 \times \frac{5\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{25}{3} - 5 = \frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

□۴

□۳

□۲

□۱✓

-۱۰۱

(یاسین سپهر)

اگر  $r > 0$  باشد، بازه  $(a, a+r)$  را یک همسایگی راست عدد  $a$  می‌گوییم.

با توجه به تعریف فوق بازه  $(2, 3)$  همسایگی راست ۲ است. بررسی سایر گزینه‌ها:

بازه  $(1, 2)$ ، همسایگی چپ عدد ۲ می‌باشد.

بازه  $(0, 4)$  یک همسایگی ۲ است.

مجموعه  $\{2\} - (1, 3)$  همسایگی محذوف ۲ می‌باشد.

(مسابان ۱- هر و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

□۴

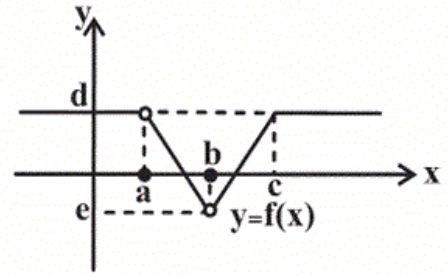
□۳

□۲

□۱✓

حد راست و حد چپ تابع در نقاط  $a$ ،  $b$  و  $c$  با هم برابر هستند، بنابراین تابع در این نقاط حد دارد، پس تابع  $f$  در تمام نقاط حد دارد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \\ \lim_{x \rightarrow b} f(x) = e \end{array} \right.$$



(مسئله ۱- حد و پیوستگی - صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

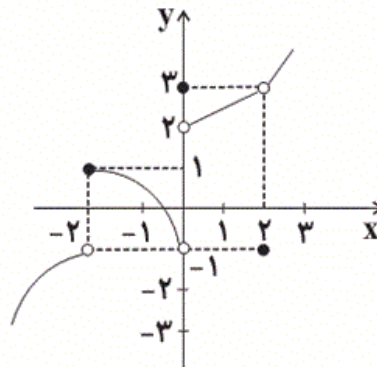
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر نمودار تابع  $y = f(x-1)$  را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(x)$  به دست می‌آید:



$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ f(2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$A = -(-1) + 1 - (-1) = 3$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا حد تابع  $g$  وقتی  $x \rightarrow 1$  را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - 3x^2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2$$

پس  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$  می‌باشد. از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} ((f + g)(x)) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + (-2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

بنابراین حاصل حد چپ و راست تابع  $f$  در  $x = 1$  برابر ۵ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + a) = 5 \Rightarrow 1 + a = 5 \Rightarrow a = 4$$

(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

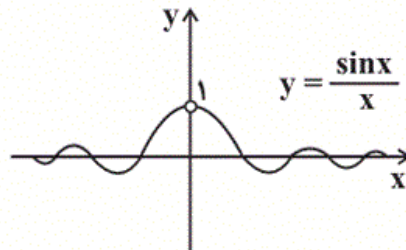
 ۱

با توجه به نمودار کتاب درسی،  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  است ولی وقتی  $x \rightarrow 0$ ،

$\sin x < x$  است. یعنی  $\frac{\sin x}{x}$  از مقادیر کم‌تر از ۱ به آن نزدیک

می‌شود. و در نتیجه  $\frac{x}{\sin x}$  از مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به آن نزدیک می‌شود،

بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sin x} \right] = 1$ .



(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسئله فایلو)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & |x| < 1 \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & -1 < x < 1 \\ x, & x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-1)^- < -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1 \\ -1 < 1^- < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -(1)^2 + 3(1) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 + 2 = 1$$

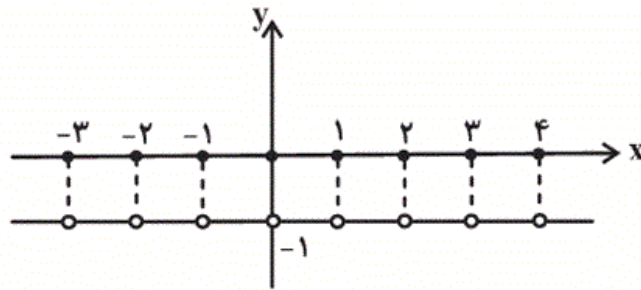
(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓



حد این تابع در تمام نقاط برابر ۱- است. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = -1 + 2(-1) = -3$$

(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

اول سینوس و کسینوس زاویه  $۱۶۵^\circ$  را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sin 165^\circ &= \sin(135^\circ + 30^\circ) = \sin 135^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 135^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 165^\circ &= \cos(135^\circ + 30^\circ) = \cos 135^\circ \cos 30^\circ - \sin 135^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

حالا با رابطه  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  مقدار  $\tan 165^\circ$  را حساب می‌کنیم:

$$\tan 165^\circ = \frac{\sin 165^\circ}{\cos 165^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} &= \frac{-(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{6 - 2} \\ &= \frac{-(6 + 2 - 2\sqrt{12})}{4} = \frac{-(8 - 4\sqrt{3})}{4} = -2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$A = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) \sin 2x \xrightarrow{\times 2} 2A = (1 - 2\sin^2 x) \sin 2x$$

$$\Rightarrow 2A = \cos 2x \sin 2x \xrightarrow{\times 2} 4A = 2 \sin 2x \cos 2x$$

$$\Rightarrow 4A = \sin 4x \Rightarrow A = \frac{1}{4} \sin 4x \xrightarrow{x=11/25^\circ} A = \frac{1}{4} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{\sin(7^\circ - 1^\circ)}{\sin 7^\circ \cos 1^\circ - \sin 1^\circ \cos 7^\circ} = \frac{\sin 6^\circ}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ}$$

به طریق مشابه  $\tan 5^\circ + \tan 1^\circ = \frac{\sin 5^\circ \cos 1^\circ + \sin 1^\circ \cos 5^\circ}{\cos 5^\circ \cos 1^\circ}$

$$= \frac{\sin 6^\circ}{\cos 5^\circ \cos 1^\circ}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{\sin 6^\circ}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ}}{\frac{\sin 6^\circ}{\cos 5^\circ \cos 1^\circ}} = \frac{\cos 5^\circ}{\cos 7^\circ}$$

$$= \frac{\sin 4^\circ}{\sin 2^\circ} = \frac{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}{\sin 2^\circ} = 2 \cos 2^\circ$$

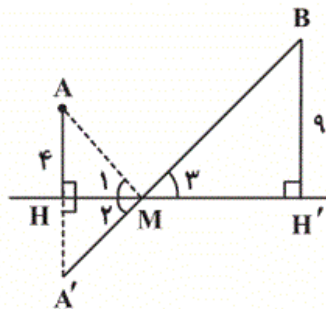
(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱



$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$  }  $\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_3$   
 $\hat{M}_2 = \hat{M}_3$  (متقابل به رأس)

دو مثلث  $AMH$  و  $BMH'$  بنابه برابری دو زاویه ( $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$ )

و ( $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ ) متشابه هستند، پس:

$$\frac{S_{\Delta AMH}}{S_{\Delta BMH'}} = \left(\frac{AH}{BH'}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

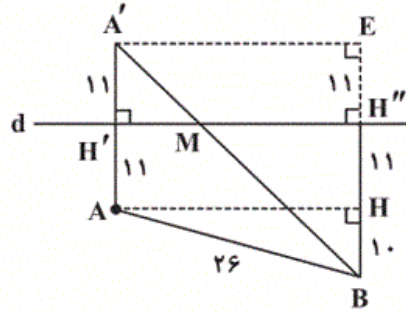
۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا با رسم خطی موازی  $H'H''$  از نقطه  $A$ ، مقدار  $AH$  را می‌یابیم:



$$\Delta AHB : AH^2 + \underbrace{BH^2}_{10^2} = \underbrace{AB^2}_{26^2} \Rightarrow AH = 24$$

$$\xrightarrow{\text{مستطیل } AA'E} A'E = AH = 24$$

حال با کمک تبدیل بازتاب مکان نقطه  $M$  مشخص می‌شود. (کم‌ترین مقدار  $AM + BM$  برابر  $A'B$  است.)

$$\Delta A'EB : \underbrace{A'E^2}_{24^2} + \underbrace{BE^2}_{32^2} = A'B^2 \Rightarrow A'B = 40$$

$$\Rightarrow AM + BM = 40$$

حال طول مسیر  $MABM$  را به دست می‌آوریم:

$$MABM_{\text{مسیر}} = MA + AB + BM = \underbrace{MA + BM}_{40} + \underbrace{AB}_{26} = 66$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۴

۳

۲

۱

چون  $\hat{B} = 30^\circ$ ، پس طول وتر  $BC$  برابر ۴ و در نتیجه  $BN = 1$ . از

طرفی  $AB = 2\sqrt{3}$  که با شرط  $BM = 5AM$  به دست می‌آید

$$BM = \frac{5\sqrt{3}}{3}. \text{ لذا طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث } BMN \text{ داریم:}$$

$$MN^2 = 1^2 + \frac{25}{3} - 2 \times 1 \times \frac{5\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{25}{3} - 5 = \frac{13}{3}$$

۴

۳

۲

۱



(امید غلامی)

ابتدا با استفاده از قضیه سینوس‌ها طول ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^2 = 3^2 + 8^2 - 2(3)(8)\cos 60 = 9 + 64 - 48\left(\frac{1}{2}\right) = 49 \Rightarrow BC = 7$$

طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin 60} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

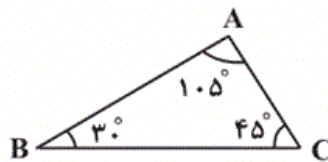
۴

۳

۲ ✓

۱

(مهم فندان)



با توجه به شکل و نوشتن قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{2} AC$$

با توجه به فرض مسئله  $AB + AC = \sqrt{3} - 1$  است. پس:

$$AB + AC = \sqrt{2}AC + AC = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} - 1)$$

حال با نوشتن دوباره قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 105^\circ}$$

$$\xrightarrow[\text{۷۵° و ۱۰۵° مکمل‌اند}]{\sin 75^\circ = \sin 105^\circ} \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{\frac{1}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\Rightarrow BC = (2 - \sqrt{2})\text{km}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

۴ ✓

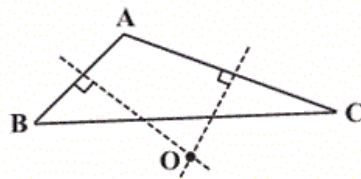
۳

۲

۱

(علی فتح‌آبادی)

محل تلاقی عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث مرکز دایره محیطی است و فاصله آن تا هر یک از رئوس برابر شعاع دایره محیطی است. بنابراین قضیه کسینوس‌ها داریم:



$$14^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \cos \hat{A}$$

$$196 = 100 + 36 - 120 \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی فتح‌آبادی)

$$\Delta ABD: 7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 49 = 41 - 40 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$$

$$ABCD = \text{محاوی} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{1}{5}$$

$$\Delta BCD: 7^2 = 5^2 + CD^2 - 2 \times 5 \times CD \times \cos \hat{C}$$

$$\Rightarrow 49 = 25 + CD^2 - 2CD \Rightarrow CD^2 - 2CD - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (CD - 6)(CD + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} CD = 6 \\ CD = -4 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = 4 + 5 + 5 + 6 = 20$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

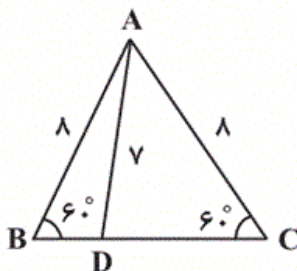
۴

۳

۲ ✓

۱

مطابق شکل فرض می‌کنیم ضلع  $AB$  به نقطه  $D$  نزدیک‌تر است. با توجه به قضیه سینوس‌ها اندازه پاره‌خط‌های  $BD$  و  $CD$  مشخص می‌شود.



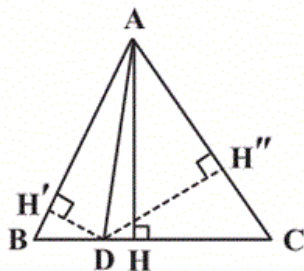
$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos 6^\circ$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + BD^2 - 2 \times 8 \times BD \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BD^2 - 8BD + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (BD - 3)(BD - 5) = 0 \xrightarrow{BD < CD} \begin{cases} BD = 3 \\ CD = 5 \end{cases}$$

حال با نوشتن نسبت مساحت در مثل‌های  $ABD$  و  $ACD$  داریم:


 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AB}{\sin \theta} = \frac{AC}{\sin 2\theta} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{\sin \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{AC} = \frac{1}{2 \cos \theta} = \frac{5}{6} \Rightarrow AC = 12$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم مجموع فواصل یک نقطه دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از

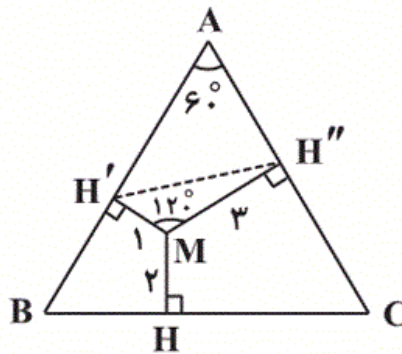
سه ضلع آن برابر با طول ارتفاع آن است. از طرفی طول ارتفاع  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  برابر

طول ضلع مثلث می‌باشد. پس:

$$\text{طول ارتفاع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6 \Rightarrow MH + MH' + MH'' = 6$$

$$\Rightarrow 2 + 1 + MH'' = 6 \Rightarrow MH'' = 3$$

از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث  $H'MH''$  داریم:



$$H'H''^2 = MH'^2 + MH''^2 - 2MH' \cdot MH'' \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow H'H''^2 = 1 + 9 - 2(1)(3)\left(-\frac{1}{2}\right) = 13 \Rightarrow H'H'' = \sqrt{13}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

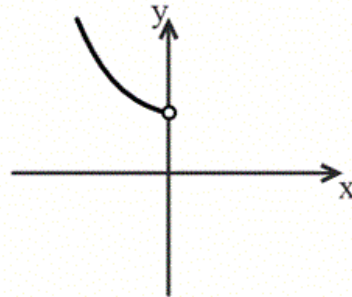
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در گزینه (۲) تابع به ازای مقادیر بیشتر از صفر تعریف نمی‌شود، بنابراین در همسایگی راست صفر تعریف نشده است، اما تابع به ازای مقادیر کمتر از صفر تعریف شده است بنابراین در همسایگی چپ صفر تعریف شده است.



در گزینه‌های (۱) و (۴) تابع هم در همسایگی راست و هم در همسایگی چپ صفر تعریف شده است.

در گزینه (۳) تابع در همسایگی راست صفر تعریف شده است ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده است.

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

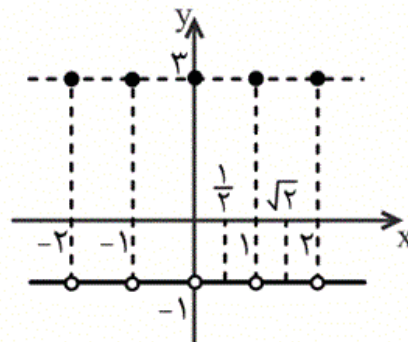
۴

۳

۲ ✓

۱

نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، تابع  $f$  در تمام نقاط حد دارد و حد آن برابر  $(-۱)$  است، بنابراین گزینه (۱) نادرست است.



$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = -1$$

در مورد گزینه (۴) می‌توان گفت:

$$0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(0) = 3$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

دامنه تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{[x]} \Rightarrow D_f : [x] \neq 0 \quad (*)$$

می دانیم اگر  $0 \leq x < 1$ ، آنگاه  $[x] = 0$ ، پس با توجه به (\*) می توان گفت:

$$D_f = \mathbb{R} - [0, 1) \quad \text{یا} \quad D_f = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

با توجه به گزینه ها و  $D_f$ ، تابع هیچ نوع همسایگی در  $x = \frac{1}{2}$  ندارد.

گزینه (۱): تابع در همسایگی چپ  $x = 0$  تعریف می شود.

گزینه (۲): تابع در همسایگی راست  $x = 1$  تعریف می شود.

 ۴

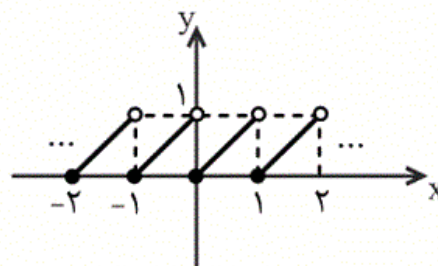
 ۳

 ۲

 ۱

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x - [x]$  را رسم می کنیم.

با توجه به نمودار، در هر نقطه با طول صحیح حد راست صفر و حد چپ یک است، پس:



$$a \in \mathbb{Z} : \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0 - 1 = -1$$

(مسئله ۱- صفحه های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

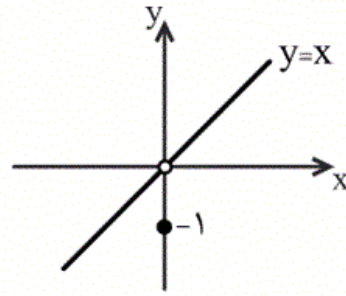
 ۴

 ۳

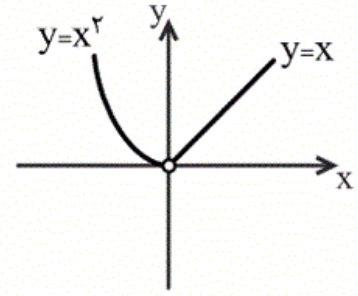
 ۲

 ۱

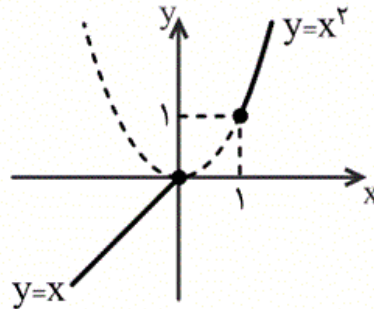
در هر گزینه، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



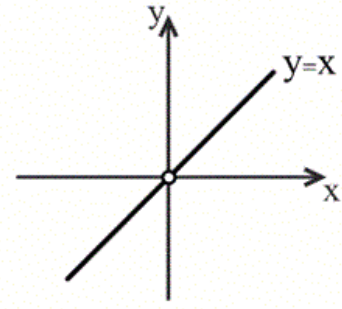
گزینه (۱)



گزینه (۲)



گزینه (۳)



گزینه (۴)

$$y = \frac{x^2}{x} = x; x \neq 0$$

با توجه به نمودارها، در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) هر یک از توابع در

$x = 0$  حد دارند و حد آنها در این نقطه برابر با صفر است.

اما در گزینه (۳)، از آنجا که تابع در همسایگی راست نقطه  $x = 0$

تعریف نشده است، در این نقطه حد ندارد.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با استفاده از قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4}{f(x)} = 2 \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2^3 - 4}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2^3 - 4}{2} = 2$$

حال گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

گزینه (۱):

$$f(x) = [x] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد.}$$

دقت کنید که تابع  $f(x) = [x]$  در نقاط با طول صحیح حد ندارد.

گزینه (۲):

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2^2 = 4$$

گزینه (۳):

$$f(x) = \sqrt{2x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{2 \times 2} = 2$$

گزینه (۴):

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow D_f : x-2 \geq 0 \Rightarrow D_f : x \geq 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد.}$$

دقت کنید که در گزینه «۴» تابع  $f$  در همسایگی چپ  $x=2$  تعریف نشده، پس در این نقطه حد ندارد.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۱۸، ۱۱۹ و ۱۲۳ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



با توجه به اینکه حد تابع کسینوس در هر نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) \Rightarrow \cos a = \frac{1}{2}$$

مقدار کسینوس هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱):

$$\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

گزینه (۲):

$$\cos\left(\frac{\Delta\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

۴ ✓

۳

۲

۱

از روی نمودار مشخص است که تابع تنها در نقطه  $a$  تعریف نشده است، از طرفی با توجه به ضابطه تابع، دیده می‌شود که تابع به ازای ریشه مخرج یعنی  $x=1$  تعریف نمی‌شود، لذا  $a=1$  است و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + bx + c}{x-1} = 2$$

از آنجایی که در  $x=1$ ، حد مخرج صفر شده، پس باید حد صورت هم در  $x=1$  صفر شود، چون در غیر این صورت حد تابع موجود نخواهد بود، لذا:

$$x^2 + bx + c \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} \quad (\text{حد ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد})$$

صورت و مخرج را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - (5x + 16)} \times \frac{1 + \sqrt{5x + 16}}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3)}{-5(x+3)} \times \frac{1 + \sqrt{5x + 16}}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{-5} \times 2 = 2 \Rightarrow a = -5$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{(3x+2)(3x-4)}{4(3x-1)(3x-4)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{3x+2}{4(3x-1)(x-2)} = \frac{4+2}{(4-1)(\frac{4}{3}-2)} = -3$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(فرشاد فرامرزی)

$$\bar{x} = 39 \Rightarrow 39 = \frac{42 + 40 + 35 + 38 + 41 + 36 + 39 + x}{8}$$

$$\Rightarrow 312 = 271 + x \Rightarrow x = 41$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{3^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 + 0 + 2^2}{8}$$

$$= \frac{44}{8} \Rightarrow \sigma^2 = 5.5$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(معمد پورا معمری)

$$\text{میانگین این ۲ داده با میانگین داده‌های قبلی یکی است.} = \frac{۱۰+۱۴}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - 12)^2}{20} \Rightarrow (x_1 - 12)^2 + (x_2 - 12)^2 + \dots + (x_{20} - 12)^2 = 300$$

$$\sigma^2_{\text{جدید}} = \frac{\sum_{i=1}^{22} (x_i - 12)^2}{20+2}$$

$$= \frac{(x_1 - 12)^2 + (x_2 - 12)^2 + \dots + (x_{20} - 12)^2 + (10 - 12)^2 + (14 - 12)^2}{20+2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{300 + 4 + 4}{22} = \frac{308}{22} = \frac{154}{11} = 14$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(معمد پورا معمری)

اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، داده‌ها با هم برابرند.

$$\text{پس } a = b = 4 \text{ است و در نتیجه داریم: } 2a + 3b = 20$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عزیزالله علی اصغری)

ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌های  $x_i$  را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{(1 \times 3) + (2 \times 9) + (4 \times 4) + (7 \times 9)}{3 + 9 + 4 + 9} = \frac{100}{25} = 4$$

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 \times (4-1)^2 + 9 \times (4-2)^2 + 4 \times (4-4)^2 + 9 \times (4-7)^2}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{16 \times 9}{25}} \Rightarrow \sigma_{x_i} = 2/4$$

حال برای میانگین و انحراف معیار داده‌های  $a_i$  خواهیم داشت:

$$a_i = \frac{3}{2}x_i - 3 \Rightarrow \sigma_{a_i} = \frac{3}{2}\sigma_{x_i}, \quad \bar{a}_i = \frac{3}{2}\bar{x}_i - 3 \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_i = 3 \\ \sigma_{a_i} = 3/6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma_{a_i}}{\bar{a}_i} = \frac{3/6}{3} = 1/2$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۷)

۴

۳✓

۲

۱

(سهیل حسن فان پور)

اگر تمام داده‌های آماری را  $k$  برابر کنیم، میانگین و انحراف معیار  $k$  برابر و واریانس  $k^2$  برابر می‌شود، ولی ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند.

$$\alpha = (1/2)^2 = 1/44 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \beta = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 1/44$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۷)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۴۶

(عزیزالله علی اصغری)

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم: ۷/۵، ۱۲، ۱۳، ۱۳/۵، ۱۵، ۱۸، ۱۹

نمودار جعبه‌ای داده‌ها به صورت مقابل است:

$$\text{Min} = 7/5, \quad Q_1 = 12$$

$$Q_2 = 13/5, \quad Q_3 = 18, \quad \text{Max} = 19$$

$$\frac{Q_2 + \text{Min}}{Q_3 - Q_1} = \frac{13/5 + 7/5}{18 - 12} = \frac{20}{6} = 3/5$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۴۷

(نرا صالح پور)

با توجه به نمودار داریم:  $\text{Min} = 3, \quad \text{Max} = 18$ 

$$Q_1 = 10, \quad Q_2 = 12, \quad Q_3 = 15$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دامنه تغییرات داده‌ها} = 18 - 3 = 15 \\ \text{دامنه میان چارکی} = 15 - 10 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{15}{5} = 3$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۴۸

(نرا صالح پور)

هیچ‌یک از سه گزاره لزوماً برقرار نیستند.

گزاره «الف»: نمونه‌گیری طبقه‌ای با افزایش هزینه و زمان نسبت به نمونه‌گیری خوشه‌ای همراه است.

گزاره «ب»: برابری اندازه طبقات از ویژگی‌های نمونه‌گیری سیستماتیک است.

گزاره «پ»: معمولاً اندازه نمونه‌های انتخابی از طبقات متناسب با تعداد اعضای طبقات است و لزوماً اندازه نمونه‌ها برابر یکدیگر نیستند.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرحسین ابومصوب)

با توجه به این که از بین ۱۸۰ نفر، یک نمونه ۱۰ تایی انتخاب می‌کنیم، پس از میان هر ۱۸ نفر، دقیقاً یک نفر باید انتخاب شود، یعنی با انتخاب یک شماره از میان شماره‌های ۱ تا ۱۸، به شماره انتخابی در هر مرحله ۱۸ واحد اضافه می‌شود، در نتیجه شماره‌های انتخابی عبارت‌اند از:

۱۷۰، ۱۵۲، ۱۳۴، ۱۱۶، ۹۸، ۸۰، ۶۲، ۴۴، ۲۶، ۸

بنابراین شماره ۱۱۴ در میان شماره‌های انتخابی نیست.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیرحسین ابومصوب)

پارامتر یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. همچنین پارامتر جامعه همیشه ثابت است. از آمارها برای تخمین پارامترها استفاده می‌شود که از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر می‌کنند ولی می‌توان نمونه‌هایی یافت که مقدار آماره برای آن‌ها یکسان باشد، مثلاً میانگین دو نمونه  $\{۲, ۴\}$  و  $\{۱, ۵\}$  یکسان است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی - صفحه ۱۱۵)

۴ ✓

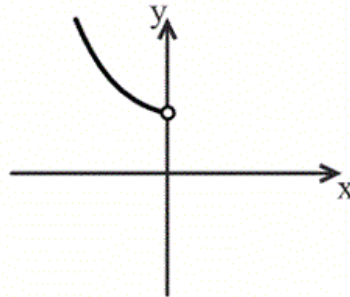
۳

۲

۱

(کتاب آبی)

در گزینه (۲) تابع به ازای مقادیر بیشتر از صفر تعریف نمی‌شود، بنابراین در همسایگی راست صفر تعریف نشده است، اما تابع به ازای مقادیر کمتر از صفر تعریف شده است بنابراین در همسایگی چپ صفر تعریف شده است.



در گزینه‌های (۱) و (۴) تابع هم در همسایگی راست و هم در همسایگی چپ صفر تعریف شده است. در گزینه (۳) تابع در همسایگی راست صفر تعریف شده است ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده است.

(مسئله ۱- فر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۴

۳

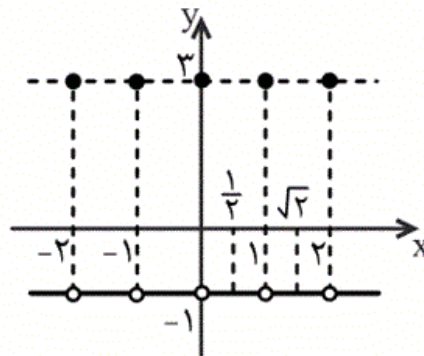
۲ ✓

۱

(کتاب آبی)

نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، تابع  $f$  در تمام نقاط حد دارد و حد آن برابر  $(-۱)$  است، بنابراین گزینه (۱) نادرست است.



۴

۳

۲

۱ ✓

دامنه تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{[x]} \Rightarrow D_f : [x] \neq 0 \quad (*)$$

می دانیم اگر  $0 \leq x < 1$ ، آنگاه  $[x] = 0$ ، پس با توجه به (\*) می توان گفت:

$$D_f = \mathbb{R} - [0, 1) \quad \text{یا} \quad D_f = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

با توجه به گزینه ها و  $D_f$ ، تابع هیچ نوع همسایگی در  $x = \frac{1}{2}$  ندارد.

گزینه (۱): تابع در همسایگی چپ  $x = 0$  تعریف می شود.

گزینه (۲): تابع در همسایگی راست  $x = 1$  تعریف می شود.

گزینه (۳): تابع هم در همسایگی چپ و هم در همسایگی راست  $x = -1$  تعریف می شود.

(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه های ۱۱۸ و ۱۱۹)

 ۴ ✓

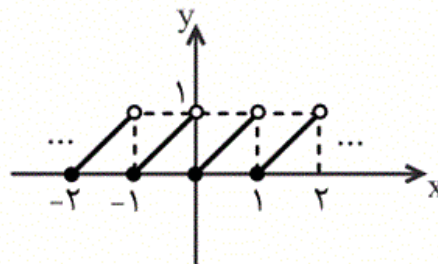
 ۳

 ۲

 ۱

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x - [x]$  را رسم می کنیم.

با توجه به نمودار، در هر نقطه با طول صحیح حد راست صفر و حد چپ یک است، پس:



$$a \in \mathbb{Z} : \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0 - 1 = -1$$

(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

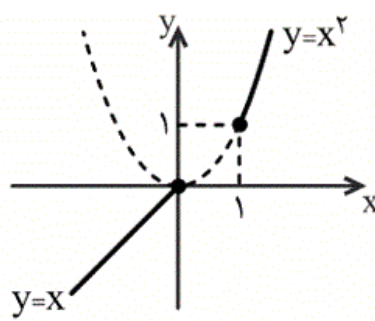
 ۴ ✓

 ۳

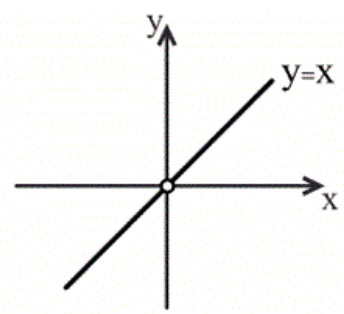
 ۲

 ۱





گزینه (۳)



گزینه (۴)

$$y = \frac{x^2}{x} = x; x \neq 0$$

با توجه به نمودارها، در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) هر یک از توابع در  $x=0$  حد دارند و حد آنها در این نقطه برابر با صفر است.

اما در گزینه (۳)، از آنجا که تابع در همسایگی راست نقطه  $x=0$  تعریف نشده است، در این نقطه حد ندارد.

(مسابان ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

۴

۳

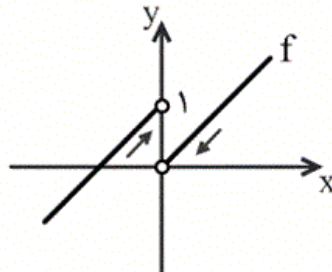
۲

۱

(کتاب آبی)

-۱۱۶

با توجه به نمودار تابع  $f$ ،  $x$  چه با مقادیر کمتر و چه با مقادیر بیشتر از صفر به آن نزدیک شود، مقادیر تابع  $f$  در بازه  $(0, 1)$  قرار می‌گیرند.



یعنی اگر  $x \rightarrow 0$ ، آنگاه  $0 < f(x) < 1$ ، در نتیجه  $[f(x)] = 0$ ، به عبارت

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = 0$$

دیگر:

(مسابان ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

۴

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

وقتی  $x \rightarrow 2^+$ ، می‌توان فرض کرد  $2 < x < 3$  که در این صورت  $[x] = 2$ ، پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+a)[x] = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+a)(2) \\ &= 2(2+a) \quad (*) \end{aligned}$$

وقتی  $x \rightarrow 2^-$ ، می‌توان فرض کرد  $1 < x < 2$  که در این صورت  $[x] = 1$ ، پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+a)[x] = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+a)(1) \\ &= 2+a \quad (**) \end{aligned}$$

$$\text{طبق فرض: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} 2(2+a) - (2+a) = 3$$

$$\Rightarrow 2+a = 3 \Rightarrow a = 1$$

(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

$$\sin 78^\circ = \sin(90^\circ - 12^\circ) = \cos 12^\circ$$

$$\cos 70^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\Rightarrow A = \cos 12^\circ \cos 20^\circ + \sin 12^\circ \sin 20^\circ$$

$$\Rightarrow A = \cos(12^\circ - 20^\circ) = \cos(-8^\circ) = \cos 8^\circ$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کتاب آبی)

$$3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$$

با تقسیم طرفین رابطه بر ۳ داریم:

$$\cos x + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x = 1$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}}$$

$$\cos x + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{6})}{\cos \frac{\pi}{6}} = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$$

در صورت کسر از رابطه  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$  و در مخرج

از رابطه  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} &= \frac{-\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2(15^\circ)} \\ &= \frac{-\sqrt{2} \sin(-30^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{-\sqrt{2}(-\sin 30^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱