ریاضي عمومي ، انتگرال - ۲۰ سوال

۱۰۱-اگر $f(x)=e^{5x}$ باشد، آن‌گاه $\int_0^2 f(x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}(e^{10}-1)$ ۲) $5e^{10}-1$ ۳) $\frac{1}{5}(e^{5}-1)$ ۴) $5e^{5}-1$

۱۰۲-اگر مشتق تابع $F(x)$ در دامنهٔ تعریف آن به‌صورت $5x\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+1$ باشد و نمودار این تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض (-1) قطع کند، حاصل $F(1)$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -1 ۳) 5 ۴) 1

۱۰۳-حاصل انتگرال $\int_1^2 (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(x+4)dx$ کدام است؟

۱) -21 ۲) $-\frac{41}{3}$ ۳) 21 ۴) $\frac{41}{3}$

۱۰۴-اگر $\int(\frac{1-3x}{\sqrt{x}})dx=\sqrt{x}f(x)+c$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $2-x$ ۲) $2+2x$ ۳) $1+x$ ۴) $2-2x$

۱۰۵-اگر $\int_{a-2}^{2a-1}\frac{x}{1+|x|}dx$ برابر صفر باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2

۱۰۶-حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۱۰۷-اگر $G(x)=\int_1^x\frac{\sqrt{t}+1}{t^2+3}dt$، آن‌گاه مشتق تابع $y=x^3+G(x^3)$ در $x=1$ کدام است؟

۱) 9 ۲) 7 ۳) $4/5$ ۴) $3/5$

۱۰۸-حاصل انتگرال $\int_{-2}^{1}[x]|x+1|dx$ کدام است؟ ([ ]: نماد جزء صحیح)

۱) -3 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) 1

۱۰۹-مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & -3\le x<-1\\ \frac{1}{x^2} & 0<x\le 4\end{cases}$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=4$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۱۱۰-حاصل انتگرال $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{x}{x^2+1}dx$ کدام است؟

۱) $Ln2$ ۲) $Ln\sqrt{2}$ ۳) $Ln\frac{1}{2}$ ۴) $Ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۱-اگر $f(x)=|[\sqrt{x}]+x|$، آن‌گاه $\int_{0}^{3}f(x)dx$ کدام است؟ ([ ]: نماد جزء صحیح)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{13}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{15}{2}$

۱۱۲-حاصل انتگرال $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}(\sin x.\cos^3 x-\cos x\sin^3 x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{16}\sqrt{2}$

۱۱۳-در دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ و $g(x)$، اگر $f'(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$ و $g'(x)=\frac{-4}{x+1}$، آن‌گاه حاصل $2f(x)+g(x)$ کدام است؟

۱) x^2-2x+c ۲) x^2-x+c ۳) $2x^2+x+c$ ۴) $2x^2-x+c$

۱۱۴-اگر $A=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^{2}x\,dx$ و $B=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^{2}x\,dx$، آن‌گاه حاصل $B-A$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

۱۱۵-مساحت ناحیهٔ محصور بین دو نمودار $y=x^{2}$ و $y^{2}=x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) ۴

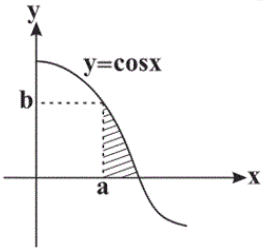
۱۱۶-اگر $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin x}{\sin x+\cos x}dx=A$ باشد، در این صورت حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}-A$ ۲) $\frac{\pi}{2}-4A$ ۳) $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{4}$ ۴) $4A$

۱۱۷-مساحت محصور بین منحنی $y=\frac{1}{\sin^{2}x\cos^{2}x}$ و محور xها در بازهٔ $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{8}]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}+1$ ۲) $\sqrt{3}-1$ ۳) $2(\sqrt{3}+1)$ ۴) $2(\sqrt{3}-1)$

۱۱۸-اگر قسمت هاشورخورده در نمودار زیر، مساحتی برابر $\frac{1}{2}$ داشته باشد، حاصل $b^{\frac{1}{\sin a}}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{1}{4}$

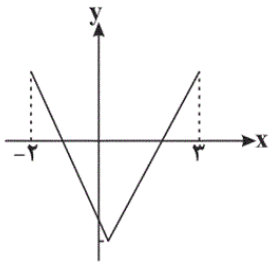
۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۹-اگر $f(\frac{1}{x})=\int_{2}^{x}\frac{\cos\pi t}{2t+1}dt$، آن‌گاه مقدار مشتق تابع $y=xf(x)$ به ازای $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۸- ۴) ۰/۴-

۱۲۰-با توجه به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|-3$، حاصل انتگرال $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۲/۵

۳) ۲/۵-

۴) ۶/۵

۱۰۱- گزینهٔ «۱» (محمد کریمی)

$$\int_{0}^{2} e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x}\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{5}e^{10} - \frac{1}{5}e^{0} = \frac{1}{5}(e^{10}-1)$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۲- گزینهٔ «۳» (حسین حاجیلو)

ابتدا ضابطهٔ تابع F را با استفاده از انتگرال می‌یابیم:

$$F(x) = \int F'(x)dx = \int (5x\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1)dx$$

$$\Rightarrow F(x) = \int (5x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}} + 1)dx \Rightarrow F(x) = 2x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x + c$$

تابع از نقطهٔ $(0,-1)$ عبور می‌کند، بنابراین:

$$F(0) = 0+0+0+c = -1 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow F(x) = 2x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x - 1$$

$$\Rightarrow F(1) = 2(1)^{\frac{5}{2}} + 3(1)^{\frac{2}{3}} + 1 - 1 = 5$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۹ تا ۱۷۳)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۰۳- گزینهٔ «۲» *(مهدی ملارمضانی)*

با استفاده از اتحاد مزدوج، می‌توان ضابطهٔ تابع را ساده‌تر نمود:

$$(\sqrt{x}+۲)(\sqrt{x}-۲)(x+۴)=(x-۴)(x+۴)=x^{۲}-۱۶$$

در نتیجه:

$$\int_{۱}^{۲}(\sqrt{x}+۲)(\sqrt{x}-۲)(x+۴)dx=\int_{۱}^{۲}(x^{۲}-۱۶)dx$$

$$=(\frac{x^{۳}}{۳}-۱۶x)\Big|_{۱}^{۲}$$

$$=(\frac{۸}{۳}-۳۲)-(\frac{۱}{۳}-۱۶)=-\frac{۴۱}{۳}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۴- گزینهٔ «۴» *(محمدمصطفی ابراهیمی)*

کافیست کسر را تفکیک کنیم:

$$\int\frac{۱-۳x}{\sqrt{x}}dx=\int(\frac{۱}{\sqrt{x}}-۳\sqrt{x})dx=\int(x^{-\frac{۱}{۲}}-۳x^{\frac{۱}{۲}})dx$$

$$=۲x^{\frac{۱}{۲}}-۳\times\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c=۲\sqrt{x}-۲x\sqrt{x}+c$$

$$=\sqrt{x}\underbrace{(۲-۲x)}_{f(x)}+c$$

در نتیجه:

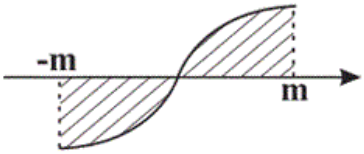
$$f(x)=۲-۲x$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۸ تا ۱۷۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۵- گزینهٔ «۱» *(علی مرشد)*

روشن است که تابع مذکور، نسبت به مبدأ متقارن است. از طرفی می‌دانیم حاصل انتگرال توابعی با این خاصیت با حدود نابرابر، فقط در فاصله‌های $-m$ تا m برابر صفر است.



پس:

$$۲a-۱=-(a-۲)\Rightarrow ۲a-۱=-a+۲$$

$$\Rightarrow ۳a=۳\Rightarrow a=۱$$

همچنین می‌دانیم اگر حدود بالا و پایین انتگرال، یکسان باشد، حاصل انتگرال برابر صفر خواهد بود:

$$a-۲=۲a-۱\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با:

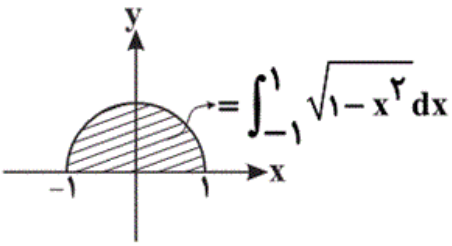
$$۱-۱=۰$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۹ و ۱۶۰ تا ۱۶۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۶- گزینهٔ «۲» *(یغما کلانتریان)*

با رسم نمودار $\sqrt{۱-x^۲}$ و محاسبهٔ مساحت سطح زیر نمودار که تشکیل یک نیم‌دایره داده است، می‌توانیم حاصل انتگرال را بیابیم:



۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۷- گزینهٔ «۳» (محمدمصطفی ابراهیمی)

با توجه به فرض مسأله می‌توان نتیجه گرفت:

$$G'(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+3}$$

حال داریم:

$$y=x^3+G(x^3)\Rightarrow y'=3x^2+3x^2G'(x^3)$$

$$=3x^2+3x^2\left(\frac{\sqrt{x^3}+1}{x^6+3}\right)\Rightarrow y'(1)=3(1)+3(1)\frac{1+1}{1+3}$$

$$=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}=4/5$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۸- گزینهٔ «۳» (میثم بایزیدی)

$$\int_{-2}^{1}[x]\,|x+1|\,dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-2)(-x-1)dx+\int_{-1}^{0}(-1)(x+1)dx+\int_{0}^{1}(0)\times(x+1)dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(2x+2)dx+\int_{-1}^{0}(-x-1)dx$$

$$=(x^2+2x)\Big|_{-2}^{-1}+\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$=(-1-0)+\left(0-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۶ و ۱۷۲)

---

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۹- گزینهٔ «۱» (محمد کریمی)

بازهٔ مشخص شده ($x=1$ تا $x=4$) تنها شامل ضابطهٔ دوم می‌شود:

$$\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2}dx=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{4}=\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۶ و ۱۷۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۰- گزینهٔ «۲» *(سروش موئینی)*

می‌دانیم مشتق $x^۲+۱$ می‌شود $۲x$، لذا $۲x$ را در عبارت داده شده می‌سازیم:
پس:

$$\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۲}\frac{۲x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۲}\frac{u'}{u}\ ,\ u=x^۲+۱$$

از طرفی عبارت $\frac{u'}{u}$، همان مشتق Lnu می‌باشد. پس:

$$\int\frac{x}{x^۲+۱}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{۲x}{x^۲+۱}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{u'}{u}du=\frac{۱}{۲}Ln|u|$$
$$=\frac{۱}{۲}Ln|x^۲+۱|$$

حال طبق قضیهٔ اساسی دوم، داریم:

$$\int_۱^{\sqrt{۳}}\frac{x}{x^۲+۱}dx=\frac{۱}{۲}Ln|x^۲+۱|\Big|_۱^{\sqrt{۳}}$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۱- گزینهٔ «۲» *(مهدی ملارمضانی)*

$$\int_۰^۳ f(x)dx=\int_۰^۳|[\sqrt{x}]+x|dx=\int_۰^۱|x|dx+\int_۱^۳|۱+x|dx$$
$$=\int_۰^۱ xdx+\int_۱^۳(۱+x)dx=\frac{x^۲}{۲}\Big|_۰^۱+(\frac{x^۲}{۲}+x)\Big|_۱^۳$$
$$=\frac{۱}{۲}+((\frac{۹}{۲}+۳)-(\frac{۱}{۲}+۱))=\frac{۱۳}{۲}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۲- گزینهٔ «۳» (سراسری ریاضی - ۸۴)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \sin x \cos x(\cos^{2} x - \sin^{2} x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2}\sin 2x(\cos 2x)dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin 4x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{4}\sin 4x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{16} \times 4\sin 4x\,dx$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 4x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{8}} = 0 - (-\frac{1}{16}) = \frac{1}{16}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۶ و ۱۷۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۳- گزینهٔ «۱» (علی شهرابی)

می‌دانیم $2f(x)+g(x)$ تابع اولیهٔ $2f'(x)+g'(x)$ است. پس:

$$2f'(x)+g'(x) = 2(\frac{x^{2}+1}{x+1}) + \frac{(-4)}{x+1} = \frac{2(x^{2}-1)}{x+1} = 2x-2$$

$$\Rightarrow \int (2f'(x)+g'(x))dx = \int (2x-2)dx$$

$$\Rightarrow 2f(x)+g(x) = x^{2} - 2x + c$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۴- گزینهٔ «۲» (میثم حمزه‌لویی)

$$B - A = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^{2} x\,dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^{2} x\,dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (\cos^{2} x - \sin^{2} x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{3} - 0) = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۶ و ۱۷۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

انتگرال تفاضل دو منحنی در بازهٔ $(0,1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^2)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1$$

$$=(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})-0=\frac{1}{3}$$

توجه شود که در بازهٔ $(0,1)$ داریم: $\sqrt{x}>x^2$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۶ و ۱۷۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۶- گزینهٔ «۳» *(سینا محمدپور)*

اگر حاصل انتگرال خواسته شده را با B نشان دهیم، داریم:

$$4B+A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin x+4\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4dx=4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$$

$$\Rightarrow 4B+A=2\pi\Rightarrow B=\frac{2\pi-A}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{4}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۶، ۱۷۱ و ۱۷۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۷- گزینهٔ «۴» *(حسین حاجیلو)*

روشن است که نمودار تابع همواره بالای محور x هاست. پس مساحت برابر است با:

$$\int\frac{1}{(\sin^2 x)(\cos^2 x)}dx=\int\frac{1}{(\underbrace{(\sin x)(\cos x)}_{\frac{1}{2}\sin 2x})^2}dx=\int\frac{4}{\sin^2 2x}dx$$

$$=2\int\frac{2}{\sin^2 2x}dx$$

$$=-2\cot 2x$$

$$\Rightarrow S=-2\cot 2x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}}=(-2\cot\frac{\pi}{4})-(-2\cot\frac{\pi}{6})$$

$$=(-2)-(-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}-2=2(\sqrt{3}-1)$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۶۶، ۱۷۲ و ۱۷۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۸- گزینهٔ «۳» *(سینا محمدپور)*

می‌دانیم که طول (مثبت) اولین نقطه برخورد نمودار $\cos x$ با محور x ها، برابر $x=\frac{\pi}{۲}$ است. پس:

$$\int_a^{\frac{\pi}{۲}} \cos x dx = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\sin x \Big|_a^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱-\sin a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin a = \frac{۱}{۲} \quad (*)$$

از طرفی طبق شکل و از آنجایی که نقطهٔ (a,b) روی نمودار $y=\cos x$ واقع است، نتیجه می‌گیریم:

$$b=\cos a \xrightarrow{(*)} \cos a = \sqrt{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

در نتیجه:

$$b^{(\frac{۱}{\sin a})} = (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ = \frac{۳}{۴}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۵ تا ۱۶۶، ۱۷۱ و ۱۷۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۹- گزینهٔ «۴» *(بابک سادات)*

بنابر فرض سؤال می‌توان نتیجه گرفت:

$$f(\frac{۱}{۲}) = \int_۲^۲ \frac{\cos \pi t}{۲t+۱} dt = ۰$$

از طرفی طبق قضیه بنیادی اول داریم:

$$-\frac{۱}{x^۲} f'(\frac{۱}{x}) = \frac{\cos \pi x}{۲x+۱}$$

$$\xrightarrow{x=۲} -\frac{۱}{۴} f'(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۵} \Rightarrow f'(\frac{۱}{۲}) = -\frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$y = xf(x) \Rightarrow y' = f(x) + xf'(x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} y' = f(\frac{۱}{۲}) + \frac{۱}{۲} f'(\frac{۱}{۲}) = ۰ + (\frac{۱}{۲} \times -\frac{۴}{۵}) = -۰/۴$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۱ تا ۱۷۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

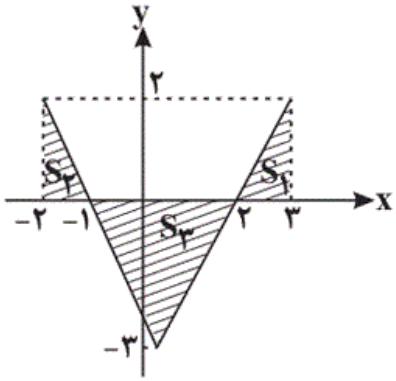
۱۲۰- گزینهٔ «۳» *(سینا محمدپور)*

برای محاسبهٔ حاصل انتگرال، ابتدا مساحت دو مثلث بالای محور xها و مثلث پایینی را به‌دست می‌آوریم. برای این‌کار با توجه به ضابطهٔ تابع و شیب هر یک از خطوط، نقاط تلاقی نمودار با محور xها را مشخص می‌کنیم، سپس داریم:

$$S_۱ = S_۲ = \frac{۲\times ۱}{۲} = ۱$$

$$S_۳ = \frac{۳\times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

بنابراین:



$$\int_{-۲}^{۳} f(x)dx = S_۱ + S_۲ - S_۳ = ۲ - \frac{۹}{۲} = -۲/۵$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴