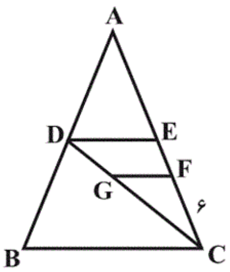
هندسه 1 دهم - 10 سوال -

۱۲۱- در مثلث ABC، زاویهٔ A حاده است. اگر عمودمنصف‌های دو ضلع AC و AB یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند در این صورت زاویهٔ $B\hat{O}C$ همواره برابر کدام است؟

۱) $90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A}$
۲) $\hat{B}+\hat{C}$
۳) $\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$
۴) $2\hat{A}$

آزمون 30 فروردین

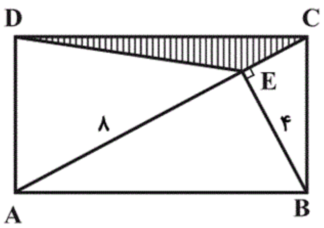
۱۲۲- در شکل زیر $BC \parallel FG \parallel DE$ و $FC = 6$ است. اگر G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، طول AC کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

آزمون 30 فروردین

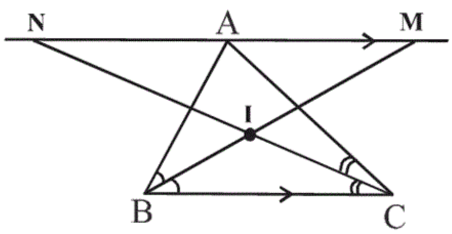
۱۲۳- در شکل زیر ABCD مستطیل و E روی قطر AC است. مساحت ناحیهٔ هاشورخورده کدام است؟ $(AE = 8\ ,\ BE = 4)$



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

آزمون 30 فروردین

۱۲۴- در شکل زیر، محیط مثلث ABC برابر ۲۴ و $BC = 9$ می‌باشد. نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C، خطی که از رأس A موازی ضلع BC رسم شده است را به ترتیب در نقاط M و N قطع می‌کنند. اگر I محل تقاطع این دو نیمساز باشد، آنگاه فاصلهٔ I از پاره‌خط MN، چند برابر فاصلهٔ I از ضلع BC است؟



۱) ۲
۲) $\frac{7}{3}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $\frac{4}{3}$

آزمون 30 فروردین

۱۲۵- کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر، الزاماً ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است؟

۱) چهارضلعی‌ای که قطرهای آن برابر یکدیگر و نیمساز زاویه‌ها هستند.

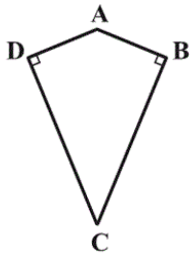
۲) چهارضلعی‌ای که دو ضلع مقابل برابر و دو قطر برابر دارد.

۳) چهارضلعی‌ای که زاویه‌های مقابل آن مکمل یکدیگرند و دو قطر برابر دارد.

۴) چهارضلعی‌ای که فقط دو ضلع مقابل موازی دارد و قطرهای آن برابر یکدیگرند.

آزمون 30 فروردین

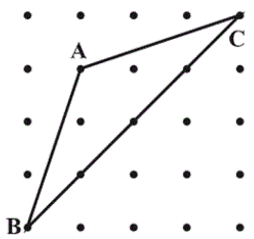
۱۲۶- در چهارضلعی شکل مقابل $AB = AD = ۳$ و $BC = CD = ۶$ است. محیط چهارضلعی حاصل از وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



۱) $۵\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{۲۷\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $۶\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۳۲\sqrt{۵}}{۵}$

آزمون 30 فروردین

۱۲۷- در شکل زیر مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه روی پاره‌خط BC از دو پاره‌خط AB و AC کدام است؟ (فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ متوالی افقی یا عمودی یک واحد است.)

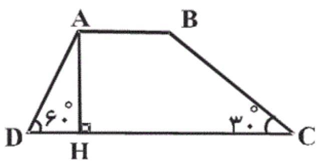


۱) $\frac{۴}{۵}\sqrt{۱۰}$ ۲) $\frac{۲}{۵}\sqrt{۱۰}$

۳) $\frac{۴}{۵}\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}\sqrt{۵}$

آزمون 30 فروردین

۱۲۸- در ذوزنقهٔ شکل زیر، زوایای مجاور قاعدهٔ بزرگ برابر ۳۰° و ۶۰° هستند. اگر $AB = ۵$ و $CD = ۱۳$ قاعده‌های ذوزنقه باشند، اندازهٔ ارتفاع AH کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

آزمون 30 فروردین

۱۲۹- دو صفحهٔ P و Q بر هم عمودند. چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) هر خط عمود بر یکی از این دو صفحه، با دیگری موازی است.

ب) هر صفحهٔ عمود بر یکی از این دو صفحه، با دیگری موازی است.

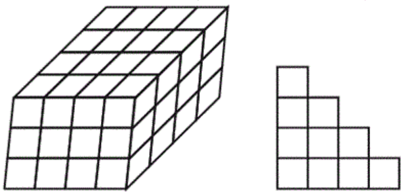
پ) هر خط موازی با یکی از این دو صفحه، بر دیگری عمود است.

ت) هر صفحهٔ موازی با یکی از این دو صفحه، بر دیگری عمود است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون 30 فروردین

۱۳۰- از مکعب مستطیل مفروض می‌خواهیم تعدادی مکعب کوچک حذف کنیم تا نمای بالای آن به‌صورت شکل زیر درآید، اگر حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌هایی که لازم است حذف شوند به ترتیب برابر m و M باشند، حاصل $M-m$ کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۳۸

۳) ۱۸ ۴) ۲۰

آزمون 30 فروردین

ریاضیات گسسته دوازدهم - 10 سوال

۱۱۱- اگر A یک مربع لاتین ۳×۳ باشد، آنگاه چند مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد که با A متعامد بوده و از تعویض جای حداقل دو سطر مربع A حاصل شده باشند؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

آزمون 30 فروردین

۱۱۲- مربع لاتین چرخشی ۴×۴ مفروض است. اگر a_i مجموع اعداد باقی‌مانده در این مربع بعد از حذف سطر iام و ستون iام باشد، آنگاه کدام‌یک از مقادیر زیر بزرگ‌تر است؟

۱) $a_۱$ ۲) $a_۲$ ۳) $a_۳$ ۴) هر سه مقدار یکسان است.

آزمون 30 فروردین

۱۱۳- خانه‌های مربع مقابل را به چند طریق می‌توان با اعداد ۱ تا ۴ پر کرد به‌طوری که یک مربع لاتین تشکیل شود؟

۱			
	۲		
		۲	
			۱

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

آزمون 30 فروردین

۱۱۴- چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد به‌گونه‌ای که شامل حداقل یکی از ارقام ۱، ۲ و ۳ باشد؟

۱) ۷۰۶ ۲) ۶۰۶ ۳) ۳۹۴ ۴) ۲۹۴

آزمون 30 فروردین

۱۱۵- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ TEHRAN، هیچ‌کدام از حروف T و N سرجای خود قرار ندارند؟

۱) ۶۹۶ ۲) ۷۲۰ ۳) ۵۰۴ ۴) ۵۲۰

آزمون 30 فروردین

۱۱۶- با ارقام ۱، ۲ و ۳، چند عدد n رقمی $(n\geq ۳)$ می‌توان نوشت به طوری‌که شامل هر سه رقم ۱، ۲ و ۳ باشد؟

۱) $۳^n-۳$ ۲) ۳^n-n ۳) ۳^n ۴) $۳\left(۳^{n-۱}-۲^n+۱\right)$

آزمون 30 فروردین

۱۱۷- چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد به‌طوری که از بین اعداد ۲، ۳ و ۵، تنها بر ۲ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۳۴ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

آزمون 30 فروردین

۱۱۸- با مجموعهٔ رأس‌های $\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساخته می‌شود به‌طوری که هیچکدام از رأس‌های a و b تنها نباشند؟

۱) ۱۰۱۶ ۲) ۹۰۴ ۳) ۸۵۴ ۴) ۷۶۸

آزمون 30 فروردین

۱۱۹- چند تابع پوشا از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ به $\{۵,۶,۷\}$ وجود دارد که $f(۱)=۵$ باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

آزمون 30 فروردین

۱۲۰- در یک برنامهٔ تلویزیونی، ۸ نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و مسابقه تنها یک برنده خواهد داشت. اگر تعداد جوایز این برنامه برابر ۴ باشد، آنگاه این جوایز را به چند طریق می‌توان بین شرکت‌کنندگان تقسیم کرد به‌گونه‌ای که هیچ‌کس بیش از یک جایزه دریافت نکند و برندهٔ مسابقه حتماً یک جایزه دریافت کرده باشد؟ (جوایز با هم متفاوت هستند.)

۱) ۸۴۰ ۲) ۱۱۲۰ ۳) ۱۲۶۰ ۴) ۱۶۸۰

آزمون 30 فروردین

آمار و احتمال - 10 سوال

۱۳۱- گزارهٔ $[(q\Rightarrow p)\Rightarrow q]\wedge[p\Rightarrow(q\Rightarrow p)]$ هم‌ارز منطقی با کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

۱) T ۲) p ۳) q ۴) $p\wedge q$

آزمون 30 فروردین

۱۳۲- فرض کنید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A، ۸ برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B باشد. اگر به اعضای A دو عضو جدید و متمایز و به اعضای B سه عضو جدید و متمایز اضافه کنیم، اختلاف تعداد زیرمجموعه‌های این دو مجموعه برابر با ۱۹۲ می‌شود. مجموعهٔ A (قبل از افزودن دو عضو جدید) دارای چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی می‌باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۵ ۴) ۵۶

آزمون 30 فروردین

۱۳۳- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، حاصل عبارت $(A'-B')\cup(A-B)\cup[(A\cup B')\cap B]$ همواره کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) $A\cup B'$

آزمون 30 فروردین

۱۳۴- دو مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲+ax+۱=۰\}$ و $B=\{x\in\mathbb{N}\mid x^۲<۱۰\}$ مفروض‌اند. به ازای کدام مجموعهٔ زیر، رابطهٔ $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۱) $\{a\in\mathbb{R}\mid a>۲\}$ ۲) $\{a\in\mathbb{R}\mid -۲<a<۲\}$ ۳) $\{a\in\mathbb{R}\mid a<-۲\}$ ۴) هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

آزمون 30 فروردین

۱۳۵- حسن و حسین به همراه ۴ نفر دیگر در یک صف پشت سر هم ایستاده‌اند. با چه احتمالی بین حسن و حسین فقط یک نفر قرار دارد؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

آزمون 30 فروردین

۱۳۶- از میان ۴ کارمند مرد و ۳ کارمند زن می‌خواهیم ۵ نفر را برای انجام یک کار گروهی انتخاب کنیم. احتمال آنکه اختلاف تعداد مردان و زنان انتخابی در این گروه حداکثر ۱ نفر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۱}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

آزمون 30 فروردین

۱۳۷- تاسی داریم که احتمال آمدن هر عدد، متناسب با مربع آن عدد است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد رو شده زوج است، با کدام احتمال عدد ۴ رو شده است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

آزمون 30 فروردین

۱۳۸- علی و رضا دو دوست هستند. می‌دانیم احتمال به سفر رفتن علی در صورتی که رضا به سفر رفته باشد، با احتمال به سفر رفتن رضا در صورتی که علی به سفر نرفته باشد، برابر است. اگر احتمال به‌سفر رفتن رضا در صورتی که علی به سفر رفته باشد، ۰/۷۵ و احتمال به سفر نرفتن رضا ۰/۴ باشد، احتمال اینکه علی و رضا هر دو به سفر بروند، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۱

آزمون 30 فروردین

۱۳۹- محصولات یک کارخانه توسط سه ماشین A، B و C تولید می‌شود که به‌ترتیب ۲۰، ۵۰ و ۳۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند. می‌دانیم ۳ درصد از محصولات A و ۳ درصد از محصولات C معیوب هستند و اگر یکی از محصولات این کارخانه را به تصادف انتخاب کنیم با احتمال ۵ درصد معیوب می‌باشد، چند درصد از محصولات تولیدی ماشین B معیوب است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

آزمون 30 فروردین

۱۴۰- جعبه‌ای محتوی ۲ مهرهٔ زرد، ۲ مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ آبی است. دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر یک مهره زرد رنگ باشد، کدام است؟

۱) ۰/۸۴ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۷۲ ۴) ۰/۷۸

آزمون 30 فروردین

حسابان 2 - دوازدهم - 10 سوال

۸۱- هرگاه $g'(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(f(x))=۲x^۳+۵x^۲$ باشد، $\frac{f(-۱)}{f'(-۱)}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۴ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

آزمون 30 فروردین

۸۲- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)=۷\sqrt{t}+۵۰$ در بازهٔ $[۴,۱۶]$، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $t=a$ است. a کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۹ ۳) ۴۹ ۴) ۱۲

آزمون 30 فروردین

۸۳- تابع $f(x)=|x^۲-x|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

آزمون 30 فروردین

۸۴- در کدام تابع زیر $x=1$ مینیمم نسبی نیست؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=\cos\pi[x]$

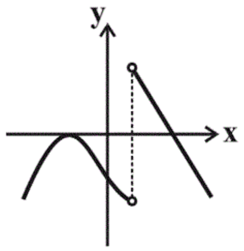
۲) $y=(x-1)^2[x]$

۳) $y=\sqrt{x-[x]}$

۴) $y=x[-x]$

آزمون 30 فروردین

۸۵- شکل مقابل نمودار مشتق تابع f را نشان می‌دهد $(D_f=\mathbb{R})$. نمودار تابع f دارای:



۱) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.

۲) یک مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.

۳) یک مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

۴) دو مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

آزمون 30 فروردین

۸۶- اگر مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x(x^2-3)+k$ در بازهٔ $[0,3]$ قرینهٔ هم باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۸

۲) ۸-

۳) ۱۰

۴) ۱۰-

آزمون 30 فروردین

۸۷- اگر نقطهٔ $A\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+3}$ باشد، طول و نوع نقطهٔ اکسترمم نسبی دیگر تابع f کدام است؟

۱) ۱، ماکزیمم

۲) ۱، مینیمم

۳) ۳، ماکزیمم

۴) ۳، مینیمم

آزمون 30 فروردین

۸۸- وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos^2 x$ در بازهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی و سپس نزولی

۲) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی و سپس صعودی

۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی و سپس نزولی

آزمون 30 فروردین

۸۹- یک شیرینی‌فروشی می‌خواهد با بریدن مربع‌های همنهشت از چهارگوشهٔ مقوایی مربع شکل به طول ضلع واحد و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌ای درباز بسازد. بیش‌ترین حجم ممکن برای جعبه چند واحد مکعب است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۲}{۲۷}$

۳) $\frac{۷}{۱۵}$

۴) $\frac{۹}{۳۱}$

آزمون 30 فروردین

۹۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{mx^{۳}}{۳}+\frac{(m+۱)x^{۲}}{۲}+mx+m$ اکیداً صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\left(-\frac{۱}{۳},۱\right)$

۲) $\left[-\frac{۱}{۳},۱\right]$

۳) $[۱,+\infty)$

۴) $(-\infty,۱)$

آزمون 30 فروردین

هندسه 3- دوازدهم - 10 سوال

۱۰۱- تصاویر بردار $\vec{a}$ روی محورهای Ox، Oy و Oz به‌ترتیب بردارهای $(۲,۰,۰)$، $(۰,-۱,۰)$ و $(۰,۰,-۲)$ هستند. طول بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

آزمون 30 فروردین

۱۰۲- تصویر بردار $\vec{a}=(۱,۰,۱)$ بر امتداد بردار $\vec{b}=(۰,۱,-۱)$ کدام است؟

۱) $\left(۰,-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$

۲) $\left(۰,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$

۳) $\left(\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲}\right)$

۴) $\left(\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲}\right)$

آزمون 30 فروردین

۱۰۳- اگر نقاط $A=(۰,-۱,-۲)$ ، $B=(۳,۱,۴)$ و $C=(۵,۷,۱)$ سه رأس یک مثلث باشند، زاویهٔ رأس A کدام است؟

۱) ۳۰°

۲) ۴۵°

۳) ۶۰°

۴) ۹۰°

آزمون 30 فروردین

۱۰۴- اگر $۲x-y+۲z=۶$ باشد، حداقل مقدار $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

آزمون 30 فروردین

۱۰۵- اگر اندازه‌های سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $۳\vec{a}+۲\vec{b}$ به ترتیب برابر ۱ ، ۲ و ۵ واحد باشد، اندازهٔ بردار $۳\vec{a}-۲\vec{b}$ برابر کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

آزمون 30 فروردین

۱۰۶- اگر اندازهٔ بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به‌ترتیب برابر ۱ و ۲ و $۲\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$ کدام است؟

۱) ۱/۵

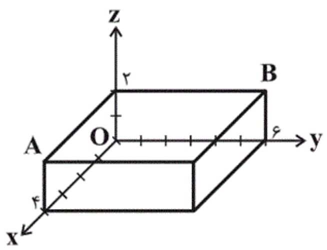
۲) ۲/۵

۳) -۲/۵

۴) -۱/۵

آزمون 30 فروردین

۱۰۷- مطابق شکل زیر، یک مکعب مستطیل روی محورهای مختصات تشکیل شده است. اگر O' نقطهٔ برخورد قطرهای مکعب مستطیل باشد، مقدار $\cos(\widehat{AO'B})$ کدام است؟



۱) $\frac{-۵}{۶}$

۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{-۶}{۷}$

۴) $\frac{-۲}{۳}$

آزمون 30 فروردین

۱۰۸- چند نقطه مانند M روی محیط مربع $ABCD$ وجود دارد که $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$ باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) هیچ
۴) بی‌شمار

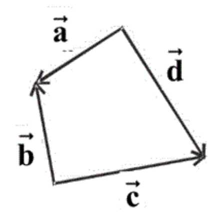
آزمون 30 فروردین

۱۰۹- اگر سه نقطهٔ $A=(0,1,1)$ ، $B=(-1,0,2)$ و $C=(2,1,1)$ سه رأس یک مثلث باشند، بردار $\overrightarrow{BH}$ (ارتفاع وارد بر ضلع AC) کـدام است؟

۱) $(0,1,-1)$
۲) $(0,-1,1)$
۳) $(0,3,-1)$
۴) $(0,-3,1)$

آزمون 30 فروردین

۱۱۰- بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ به‌ترتیب با طول‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ مطابق شکل زیر مفروض‌اند. حاصل $\vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{d}$ کدام است؟

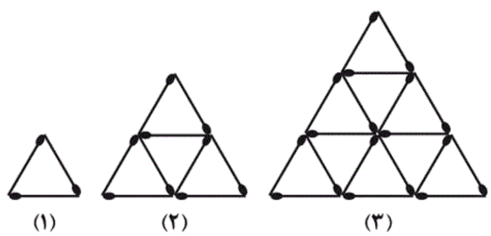


۱) صفر
۲) ۲-
۳) ۴-
۴) ۵

آزمون 30 فروردین

رياضي پايه - دوازدهم - 10 سوال

۹۱- با توجه به الگوی مقابل، اختلاف تعداد چوب کبریتها و تعداد مثلث‌ها (کوچک‌ترین مثلث ممکن) در مرحلهٔ هشتم کدام است؟



۱) ۴۴
۲) ۴۰
۳) ۳۶
۴) ۳۲

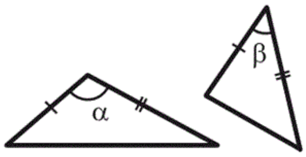
آزمون 30 فروردین

۹۲- اگر $۱۰m+۸$، $۵m+۱$ و $۵m-۳$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی مثبت باشند، معادلهٔ $x^۲-۲mx+m=۰$ دارای چه نوع جوابی است؟

۱) مضاعف مثبت
۲) مضاعف منفی
۳) دو جواب متمایز هم‌علامت
۴) دو جواب غیر هم‌علامت

آزمون 30 فروردین

۹۳- اگر در دو مثلث هم‌مساحت زیر داشته باشیم: $\sin\alpha=\cot\beta$، حاصل $\cos\alpha$ کدام است؟ $\left(\alpha>\frac{\pi}{۲}\right)$



۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$
۳) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$
۴) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۴}$

آزمون 30 فروردین

۹۴- اگر $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x+\cot x$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

آزمون 30 فروردین

۹۵- مقدار x در تساوی $\sqrt{\frac{۱}{۸}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}\times ۸^{\frac{x}{۴}}}{\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}}\times ۲^{x}}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) -۶
۳) ۳
۴) -۳

آزمون 30 فروردین

۹۶- اگر $a=\sqrt[۳]{۳+۲\sqrt{۲}}+\sqrt[۳]{۳-۲\sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $a^۳-۳a$ کدام است؟

۱) ۶
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۸
۴) $۸\sqrt{۳}$

آزمون 30 فروردین

۹۷- به ازای چند مقدار صحیح m ، نمودار سهمی $y=(m-۱)x^۲-x+(۳-m)$ از ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

آزمون 30 فروردین

۹۸- نمایش هندسی مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x^۲+x+a}{bx^۲+۲x+b}>۰$ به‌صورت زیر است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۶
۳) ۸-
۴) ۱۰-

آزمون 30 فروردین

۹۹- تابع f همانی، تابع g ثابت و تابع h خطی است. اگر داشته باشیم: $g(۲)=۲f(-۲)$ ، $h(-۲)=g(۰)+۱$ و $h(۲)=f(۲)+g(۳)+۱$ ، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $h(x)\geq ۰$ کدام است؟ (دامنهٔ هر سه تابع، $\mathbb{R}$ است.)

۱) $(-\infty,-۲]$
۲) $[۰,+\infty)$
۳) $[۴,+\infty)$
۴) $(-\infty,۰]$

آزمون 30 فروردین

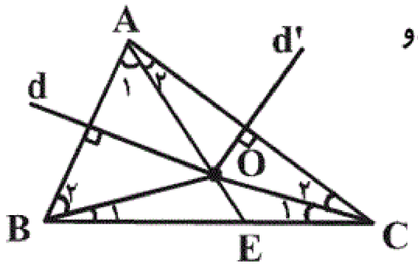
۱۰۰- کدام خط، تابع $f(x)=\begin{cases} x+۳ & ;x<۰ \\ |x-۱|+۱ & ;۰\leq x<۳ \\ ۷-x & ;x\geq ۳ \end{cases}$ را در تعداد نقاط بیشتری قطع می‌کند؟

۱) $y=۰$
۲) $y=۱$
۳) $y=۲$
۴) $y=۳$

آزمون 30 فروردین

۱۲۱- (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:



$$AB \text{ عمودمنصف ضلع } d \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۲$$

$$AC \text{ عمودمنصف ضلع } d' \Rightarrow OA = OC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲$$

اگر مطابق شکل، امتداد پاره‌خط OA، ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند، آنگاه:

$$B\hat{O}C = B\hat{O}E + C\hat{O}E = (\hat{A}_۱ + \hat{B}_۲) + (\hat{A}_۲ + \hat{C}_۲)$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C = ۲\hat{A}_۱ + ۲\hat{A}_۲ = ۲(\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲) = ۲\hat{A}$$

توجه کنید که چون $\hat{A}$ حاده است، نقطهٔ O درون مثلث می‌افتد.

اگر $\hat{A}$ منفرجه باشد آنگاه نقطهٔ O خارج مثلث قرار دارد که در آن صورت داریم:

$$\widehat{BOC} = ۳۶۰^\circ - ۲\hat{A}$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۲ (رضا عباسی اصل)

نقطهٔ G محل همرسی میانه‌های مثلث است، پس $\frac{CG}{GD} = ۲$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{DEC} : GF \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{CF}{EF} = \frac{CG}{GD} \Rightarrow \frac{۶}{EF} = ۲$$

$$\Rightarrow EF = ۳ \Rightarrow EC = ۹$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow ۱ = \frac{AE}{۹}$$

$$\Rightarrow AE = ۹$$

و در نتیجه:

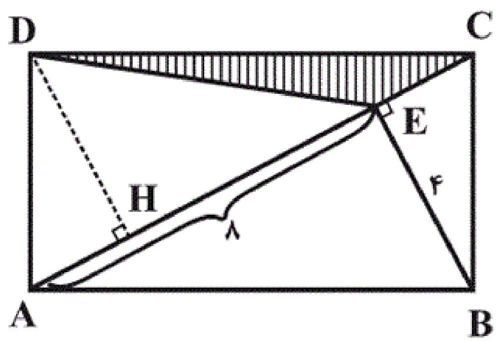
$$AC = AE + EC = ۹ + ۹ = ۱۸$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین

-۱۲۳ (رضا عباسی اصل)



بنا به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$BE^۲ = AE.EC \Rightarrow ۱۶ = ۸ \times EC \Rightarrow EC = ۲$$

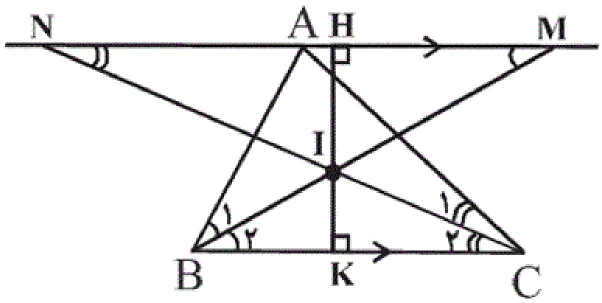
$$S_{\overset{\Delta}{DEC}} = \frac{۱}{۲} DH.EC \xrightarrow{DH=BE=۴} S_{\overset{\Delta}{DEC}} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ = ۴$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

-۱۲۴ (نوید مجیدی)



چون $MN \parallel BC$ ، بنا به قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{B}_۲ = \dfrac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_۱ \Rightarrow AM = AB \\ \hat{N} = \hat{C}_۲ = \dfrac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow \hat{N} = \hat{C}_۱ \Rightarrow AN = AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow MN = AM + AN = AB + AC$$

$$= (AB + AC + BC) - BC = ۲۴ - ۹ = ۱۵$$

دو مثلث IMN و IBC به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند، پس نسبت ارتفاع‌های متناظر برابر است با نسبت تشابه این دو مثلث، در نتیجه:

$$\frac{IH}{IK} = \frac{MN}{BC} = \frac{۱۵}{۹} = \frac{۵}{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین

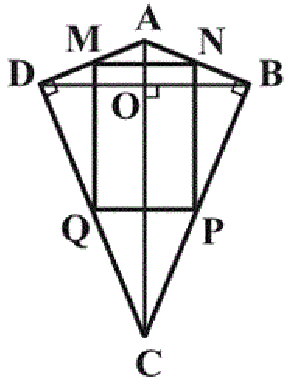
-۱۲۵ (امیرحسین ابومحبوب)

چهارضلعی‌ای که فقط دو ضلع مقابل موازی دارد، لزوماً ذوزنقه است و در صورتی که قطرهای آن برابر یکدیگر باشند، قطعاً ذوزنقه متساوی‌الساقین است. چهارضلعی گزینهٔ «۱» مربع است و در گزینه‌های «۲» و «۳»، مستطیل نیز از ویژگی‌های مشابه برخوردار است.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین



محیط چهارضلعی حاصل از وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع چهارضلعی ABCD ، برابر مجموع طول قطرهای این چهارضلعی است (طول اضلاع MN و PQ هر کدام نصف قطر BD و طول اضلاع MQ و NP هر کدام نصف طول قطر AC است). بنابراین کافی است طول قطرهای AC و BD را به‌دست آوریم.

با توجه به این‌که در کایت ABCD ، قطرها بر هم عمود هستند، داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} = ۹ + ۳۶ = ۴۵ \Rightarrow AC = ۳\sqrt{۵}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : AB \times BC = BO \times AC$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین مجموع فواصل هر نقطه روی قاعدهٔ BC از دو ساق مثلث، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است. چندضلعی شبکه‌ای ABC دارای ۶ نقطهٔ مرزی و ۲ نقطهٔ درونی است، بنابراین طبق فرمول پیک داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۶}{۲}+۲-۱=۴$$

از طرفی با توجه به این که فاصلهٔ هر دو نقطهٔ عمودی یا افقی در شبکه برابر ۱ است، پس طول ضلع AB (ساق مثلث) برابر است با:

$$AB=\sqrt{۱^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۰}$$

اگر طول ارتفاع وارد بر ساق را با h نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times h\times AB\Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲}h\times\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow h=\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۸\sqrt{۱۰}}{۱۰}=\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۵}$$

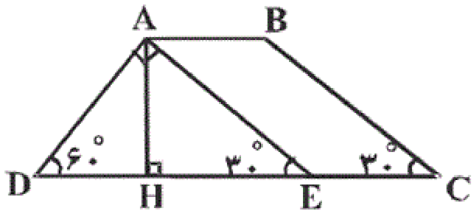
(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۸ تا ۷۳)

✓ $\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

مطابق شکل زیر، از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ CD را در نقطهٔ E قطع کند، داریم:

$$\begin{cases} AE \parallel BC \Rightarrow \hat{AED} = \hat{C} = ۳۰^\circ \\ \text{متوازی‌الاضلاع } ABCE \Rightarrow AB = CE = ۵ \Rightarrow DE = CD - CE = ۸ \end{cases}$$

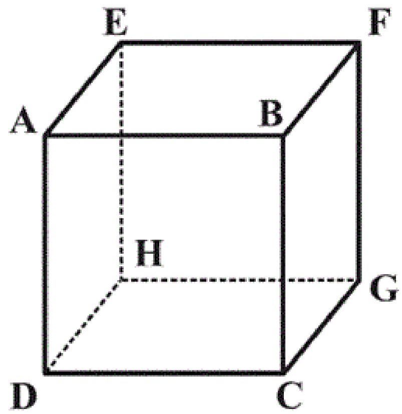
می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است، پس:



۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

دو صفحهٔ عمود بر هم ABCD و ABFE را در نظر بگیرید. گـزارهٔ «ب» نادرست است، زیرا مثلاً صفحهٔ BFGC بر صفحهٔ ABCD عمـود اسـت و با صفحهٔ ABFE موازی نیست (صفحهٔ BFGC بر صفحهٔ ABFE عمود است).



گزارهٔ «پ» نادرست است، زیرا مثلاً خط GH با صـفحهٔ ABCD مـوازی است و بر صفحهٔ ABFE عمود نیست (خط GH موازی صـفحهٔ ABFE است).

گزاره‌های «الف» و «ت» همواره صحیح هستند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

۱۳۰- (محمد قیدی)

اگر وجه بالایی مکعب مستطیل را به‌صورت زیر دسته‌بندی کنیم، واضح است که همهٔ مکعب‌های خانه‌های b و مکعب‌های زیر آنها یعنی $۶\times ۳=۱۸$ مکعب باید حذف شوند. بنابراین کم‌ترین مقدار برابر $m=۱۸$ است.

$a_{۱}$	$b_{۱}$	$b_{۲}$	$b_{۳}$
$a_{۲}$	$a_{۳}$	$b_{۴}$	$b_{۵}$
$a_{۴}$	$a_{۵}$	$a_{۶}$	$b_{۶}$
$a_{۷}$	$a_{۸}$	$a_{۹}$	$a_{۱۰}$

از طرفی حداقل تعداد مکعب‌های لازم در شکل برابر ۱۰ است (تعداد خانه‌های a در نمای بالا)، بنابراین حداکثر می‌توان $M=۴۸-۱۰=۳۸$ مکعب را از شکل حذف نمود. در نتیجه $M-m=۳۸-۱۸=۲۰$ است.

(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

آزمون 30 فروردین

۱۱۱- (امیرحسین ابومحبوب)

مربع لاتین ۳×۳ با مربعی که از تعویض سطرهای آن حاصل می‌شود، متعامد خواهد بود هرگاه یکی از سطرها ثابت مانده و جای دو سطر دیگر با هم عوض شود. بنابراین ۳ مربع لاتین متعامد با مربع لاتین A و با شرایط گفته شده وجود دارد.

به عنوان مثال داریم:

$$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\text{تعویض سطر دوم و سوم}} B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline\end{array}$$

از ترکیب این دو مربع، مربع زیر حاصل می‌شود که در آن هیچ عدد دو رقمی تکراری وجود ندارد، پس A و B متعامد هستند.

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۳)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۱۲- (امیرحسین ابومحبوب)

مربع لاتین چرخشی ۴×۴ به‌صورت مقابل است:

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

هر سطر یا هر ستون از یک مربع لاتین ۴×۴ شامل تمامی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ است. با توجه به این‌که درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع لاتین چرخشی همواره برابر ۱ هستند، پس با حذف سطر iام و ستون iام همواره یک عدد ۱، دو عدد ۲، دو عدد ۳ و دو عدد ۴ از مربع حذف می‌شود و در نتیجه مجموع اعداد باقی‌مانده در جدول همواره یکسان خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

۱۱۳- (کیوان دارابی)

ابتدا جای ۲ها و ۱های باقی‌مانده را پیدا می‌کنیم.

۱			۲
	۲	۱	
	۱	۲	
۲			۱

سطرهای اول و دوم به چهار طریق با ۳ و ۴ پر می‌شوند و سطرهای سوم و چهارم به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌شوند.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

-۱۱۴ (محمد صحت‌کار)

فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی سه‌رقمی و A، B و C به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی سه رقمی شامل ۱، ۲ و ۳ باشند. در این صورت داریم:

$$|A\cup B\cup C|=|S|-|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|$$

$$=۹\times ۱۰^{۲}-۶\times ۷^{۲}=۹۰۰-۲۹۴=۶۰۶$$

تذکر: مجموعهٔ $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ شامل اعداد طبیعی سه‌رقمی‌ای است که فاقد ۱، ۲ و ۳ می‌باشند.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

-۱۱۵ (کیوان دارابی)

اگر A و B مجموعهٔ جایگشت‌هایی از حروف کلمهٔ TEHRAN باشند که در آنها به‌ترتیب T و N سر جای خود قرار دارند، داریم:

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=۶!-۵!-۵!+۴!=۵۰۴$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین

-۱۱۶ (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعداد n رقمی با ارقام ۱، ۲ و ۳ باشد. داریم:

A : اعداد n رقمی با ارقام ۲ و ۳

B : اعداد n رقمی با ارقام ۱ و ۳

C : اعداد n رقمی با ارقام ۱ و ۲

$$|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$

$$=|S|-\left(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\right)$$

$$=۳^{n}-\left(۲^{n}+۲^{n}+۲^{n}-۱-۱-۱+۰\right)=۳^{n}-۳\times ۲^{n}+۳$$

$$=۳\left(۳^{n-1}-۲^{n}+۱\right)$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

۱۱۷- (محمد صحت‌کار)

اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که به‌ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند، آنگاه داریم:

$$|A\cap \bar{B}\cap \bar{C}|=|A-(B\cup C)|=|A|-|A\cap(B\cup C)|$$
$$=|A|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|$$
$$=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$=\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]=۵۰-۱۶-۱۰+۳=۲۷$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۸- (کیوان دارابی)

اگر A و B مجموعهٔ گراف‌هایی با رئوس $\{a,b,c,d,e\}$ باشند که به‌ترتیب رئوس a و b در آنها رأس تنها هستند، آنگاه داریم:

$$|\bar{A}\cap \bar{B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$
$$=۲^{\binom{۵}{۲}}-۲^{\binom{۴}{۲}}-۲^{\binom{۴}{۲}}+۲^{\binom{۳}{۲}}=۱۰۲۴-۶۴-۶۴+۸=۹۰۴$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۷۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۹- (سروش موئینی)

اگر A و B توابعی از $\{۲,۳,۴\}$ به $\{۵,۶,۷\}$ باشند که به‌ترتیب شامل ۶ و ۷ نیستند، آنگاه داریم:

$$|\bar{A}\cap \bar{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$$
$$=۳^۳-(۲^۳+۲^۳-۱)=۲۷-۱۵=۱۲$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۸ و ۷۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۰- (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا یکی از جوایز را به دلخواه انتخاب کرده و به برندهٔ مسابقه می‌دهیم که این کار به ۴ طریق امکان‌پذیر است. سپس جوایز باقی‌مانده را بین سایر افراد توزیع می‌کنیم که اولین جایزه به ۷ طریق و جوایز بعدی به ۶ و ۵ طریق قابل توزیع هستند. در نتیجه تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$۴\times ۷\times ۶\times ۵ = ۸۴۰$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

۱۳۱- (مرتضی فهیم‌علوی)

طبق جدول ارزش گزاره‌ها، اگر $[p\Rightarrow(q\Rightarrow p)]\equiv r$ و $[(q\Rightarrow p)\Rightarrow q]\equiv s$ باشند، آنگاه داریم:

p	q	$q\Rightarrow p$	r	s	$r\wedge s$
د	د	د	د	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

همان‌طور که مشاهده می‌شود، گزارهٔ مورد نظر هم‌ارز منطقی با گزارهٔ q است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین

-۱۳۲ (مرتضی فهیم‌علوی)

فرض کنید مجموعهٔ A دارای m عضو و مجموعهٔ B دارای n عضو باشد.

در این صورت داریم:

$$۲^{m} = ۸ \times ۲^{n} \Rightarrow ۲^{m} = ۲^{n+۳} \Rightarrow m = n + ۳$$

$$۲^{m+۲} - ۲^{n+۳} = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{m+۲} - ۲^{m} = ۱۹۲$$

$$\Rightarrow ۲^{m}(۴-۱) = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{m} = ۶۴ \Rightarrow m = ۶$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ A برابر است با:

$$\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = ۲۰$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

-۱۳۳ (فرهاد وفایی)

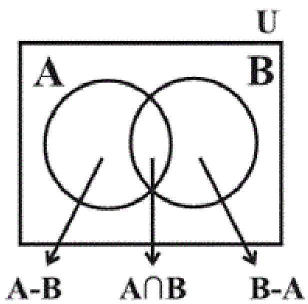
$$A' - B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

$$(A \cup B') \cap B = (A \cap B) \cup (B' \cap B) = (A \cap B) \cup \varnothing = A \cap B$$

بنابراین داریم:

$$(A' - B') \cup (A - B) \cup [(A \cup B') \cap B]$$

$$= (B - A) \cup (A - B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$



(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین

اگر $A\times B=B\times A$ باشد، آنگاه $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ و یا $A=B$ است. با توجه به این‌که $B=\{۱,۲,۳\}$ است، پس حالت $B=\varnothing$ امکان‌پذیر نیست. از طرفی معادلهٔ $x^۲+ax+۱=۰$، حداکثر دارای دو جواب است، یعنی حداکثر تعداد اعضای مجموعهٔ A، برابر ۲ است و در نتیجه حالت $A=B$ نیز امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین قطعاً $A=\varnothing$ است.

داریم: $x^۲+ax+۱=۰$

$$\Delta<۰\Rightarrow a^۲-۴<۰\Rightarrow a^۲<۴\Rightarrow |a|<۲\Rightarrow -۲<a<۲$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱   ۲✓   ۳   ۴

-۱۳۵ (هومن نورائی)

تعداد حالت‌های فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = 6!$$

اگر حسن و حسین و فرد بین آنها را یک نفر در نظر بگیریم با سه نفر دیگر به !۴ طریق می‌توانند جای خود را عوض کنند و از طرفی حسن و حسین نیز !۲ طریق جایگشت دارند. پس داریم:

$$n(A) = 4 \times 4! \times 2!$$

$$P(A) = \frac{4 \times 4! \times 2!}{6!} = \frac{4}{15}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

-۱۳۶ (پژمان فرهادیان)

یعنی یا تعداد مردها و زن‌ها برابر باشد که ممکن نیست (چون ۵ عددی فرد است) یا ۳ مرد و ۲ زن و یا ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{3} + \binom{4}{3}\binom{3}{2}}{\binom{7}{5}} = \frac{(6 \times 1) + (4 \times 3)}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

-۱۳۷ (مرتضی فهیم‌علوی)

$$P(۱)=a\ ,\ P(۲)=۴a,\dots,P(۶)=۳۶a$$

اگر پیشامدهای A و B به‌ترتیب «رو شدن عدد ۴» و «رو شدن عدد زوج» باشند، آنگاه داریم:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(۴)}{P(۲)+P(۴)+P(۶)}$$

$$=\frac{۱۶a}{۴a+۱۶a+۳۶a}=\frac{۱۶}{۵۶}=\frac{۲}{۷}$$

توجه کنید که برای حل این سؤال، نیازی به محاسبهٔ مقدار a وجود ندارد.

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

سفر رفتن علی : A

سفر رفتن رضا : B

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$P(A|B)=P(B|A')\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{۱-P(A)} \qquad (۱)$$

$$P(B|A)=۰/۷۵\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=۰/۷۵$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷۵P(A) \qquad (۲)$$

$$P(B')=۰/۴\Rightarrow ۱-P(B)=۰/۴\Rightarrow P(B)=۰/۶ \qquad (۳)$$

با قرار دادن (۲) و (۳) در (۱) داریم:

$$\frac{۰/۷۵P(A)}{۰/۶}=\frac{۰/۶-۰/۷۵P(A)}{۱-P(A)}$$

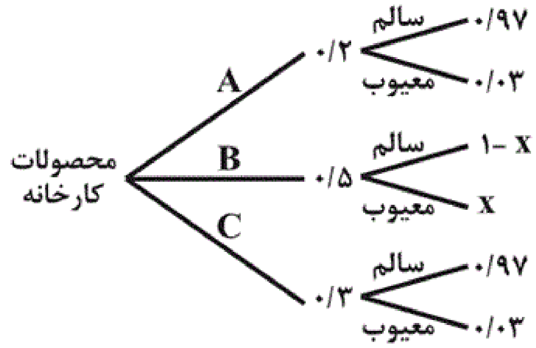
$$\Rightarrow ۵P(A)-۵\left(P(A)\right)^{۲}-۲/۴+۳P(A)=۰$$

$$\Rightarrow ۵\left(P(A)\right)^{۲}-۸P(A)+۲/۴=۰\Rightarrow \begin{cases} P(A)=۰/۴ \\ P(A)=۱/۲ \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

۱ ☐ ۲ ☐✓ ۳ ☐ ۴ ☐

آزمون 30 فروردین

ابتدا نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{معیوب بودن}) = ۰/۲\times ۰/۰۳ + ۰/۵\times x + ۰/۳\times ۰/۰۳$$

$$\Rightarrow ۰/۰۵ = ۰/۰۱۵ + ۰/۵x$$

$$\Rightarrow ۰/۵x = ۰/۰۳۵ \Rightarrow x = ۰/۰۷$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین

روش اول: چون مهره‌ها با جای‌گذاری انتخاب می‌شوند، پس شرط استقلال پیشامدها برقرار است و احتمال زرد رنگ بودن مهره ثابت و برابر $\frac{۲}{۵}$ یا ۰/۴ است. حداکثر یک مهره زرد یعنی یا یکی زرد باشد و یکی غیر زرد یا هیچکدام زرد نباشند. پس داریم:

$$P\,(\text{حداکثر یکی زرد باشد}) = P\,(\text{یکی زرد باشد}) + P\,(\text{هیچ‌کدام زرد نباشند})$$

$$=\binom{۲}{۱}(۰/۴)^{۱}(۰/۶)^{۱}+\binom{۲}{۰}(۰/۴)^{۰}(۰/۶)^{۲}$$

$$=۲\times ۰/۴\times ۰/۶+۰/۳۶=۰/۸۴$$

روش دوم: با استفاده از متمم «حداکثر یکی زرد باشد» داریم:

$$P\,(\text{حداکثر یکی زرد باشد}) = ۱ - P\,(\text{هردو مهره زرد باشند})$$

$$=۱-(۰/۴)^{۲}=۱-۰/۱۶=۰/۸۴$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

✓ ۱   ۲   ۳   ۴

-۸۱ (فرنود فارسی‌جانی)

$$g(f(x))=2x^3+5x^2 \Rightarrow f'(x).g'(f(x))=6x^2+10x$$

از آن‌جایی که $g'(x)=\frac{1}{x}$، داریم:

$$g'(f(x))=\frac{1}{f(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x).\frac{1}{f(x)}=6x^2+10x$$

$$\xrightarrow{x=-1}\frac{f'(-1)}{f(-1)}=6(-1)^2+10(-1)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(-1)}{f(-1)}=-4 \Rightarrow \frac{f(-1)}{f'(-1)}=-\frac{1}{4}$$

(حسابان ۲- مشتق: صفحهٔ ۹۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

-۸۲ (یاسین سپهر)

آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ $[4,16]$ برابر است با:

$$=\frac{f(16)-f(4)}{16-4}=\frac{7\sqrt{16}+50-(7\sqrt{4}+50)}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

$$f(t)=7\sqrt{t}+50 \Rightarrow f'(t)=\frac{7}{2\sqrt{t}}$$

$\Rightarrow t=a$ آهنگ لحظه‌ای تغییر در a $=f'(a)=\frac{7}{2\sqrt{a}}$

$$\Rightarrow \frac{7}{2\sqrt{a}}=\frac{7}{6} \Rightarrow \sqrt{a}=3 \Rightarrow a=9$$

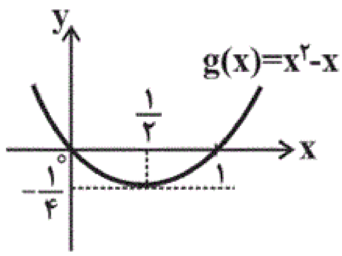
(حسابان ۲- مشتق: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۶)

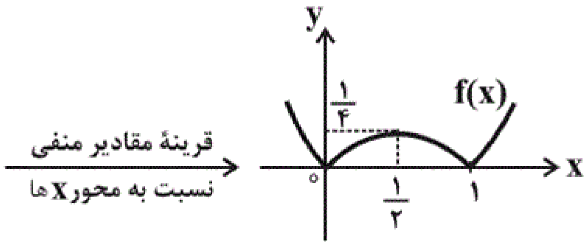
۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

(عرفان صادقی)

با توجه به رسم نمودار تابع $f(x)=\left|x^۲-x\right|$ داریم:





با توجه به نمودار بالا، نمودار تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد. دو نقطه گوشه‌ای

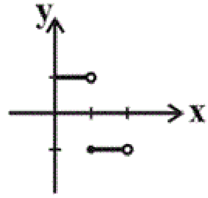
$x=۰$ و $x=۱$ و نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ که مشتق در آن برابر صفر است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحهٔ ۱۱۷)

۱ | ۲ | ۳ | ۴ ✓

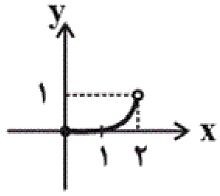
(طاهر دادستانی)

$$y=\cos\pi[x]\Rightarrow\begin{cases}1\le x<2\Rightarrow y=\cos\pi=-1\\ 0\le x<1\Rightarrow y=1\end{cases}$$



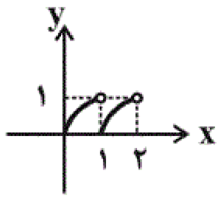
$x=1$ مینیمم نسبی است.

$$y=(x-1)^2[x]\Rightarrow\begin{cases}1\le x<2\Rightarrow y=(x-1)^2\\ 0\le x<1\Rightarrow y=0\end{cases}$$



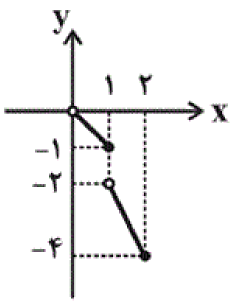
$x=1$ مینیمم نسبی است.

$$y=\sqrt{x-[x]}\Rightarrow\begin{cases}1\le x<2\Rightarrow y=\sqrt{x-1}\\ 0\le x<1\Rightarrow y=\sqrt{x}\end{cases}$$



$x=1$ مینیمم نسبی است.

$$y=x[-x]\Rightarrow\begin{cases}1<x\le 2\Rightarrow -2\le -x<-1\Rightarrow y=-2x\\ 0<x\le 1\Rightarrow -1\le -x<0\Rightarrow y=-x\end{cases}$$



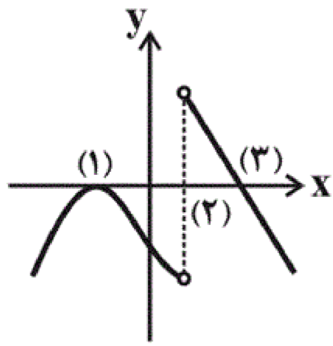
$x=1$ مینیمم نسبی تابع نیست.

بنابراین گزینهٔ «۴» صحیح است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۸۵ (فرنود فارسی‌جانی)



در نقطهٔ (۱) مشتق تابع صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد، پس اکسترمم نیست.

در نقطهٔ (۲) مشتق به یک باره از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه مینیمم نسبی و همین‌طور گوشه‌ای است.

در نقطهٔ (۳) مشتق تابع از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه ماکزیمم نسبی است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۸۶ (محمدمصطفی ابراهیمی)

ابتدا طول نقاط بحرانی تابع f را در بازهٔ $[0,3]$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^3-3x+k \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

فقط $x=1$ در این بازه قرار دارد.

حال مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه حساب می‌کنیم:

$$f(0)=k \quad \text{و} \quad f(1)=k-2 \quad ، f(3)=18+k$$

پس ماکزیمم و مینیمم مطلق f در این بازه به‌ترتیب $k+18$ و $k-2$ هستند.

$$\xrightarrow{\text{قرینهٔ همدیگرند.}} k-2+k+18=0 \Rightarrow k=-8$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

(علی شهرابی)

$$f'(x)=\frac{a\left(x^{۲}+۳\right)-۲x(ax+b)}{\left(x^{۲}+۳\right)^{۲}}$$

چون $x=-۱$ ، طول نقطهٔ اکسترمم نسبی f است، پس f' در این نقطه صفر است.

$$f'(-۱)=۰\Rightarrow ۴a-۲a+۲b=۰\Rightarrow a+b=۰ \qquad (۱)$$

$$f(-۱)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{-a+b}{۱+۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow -a+b=۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} b=۱, a=-۱$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\left(x^{۲}+۳\right)-۲x(-x+۱)}{\left(x^{۲}+۳\right)^{۲}}=\frac{x^{۲}-۲x-۳}{\left(x^{۲}+۳\right)^{۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ ۳$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-۱		۳	
f'	+	۰	−	۰	+
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

پس طول نقطهٔ اکسترمم نسبی دیگر f ، $x=۳$ و نوع آن مینیمم است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

-۸۸ (مهرداد اسپیدکار)

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}+۲\cos x(-\sin x)=\frac{۱}{۲}-\sin ۲x$$

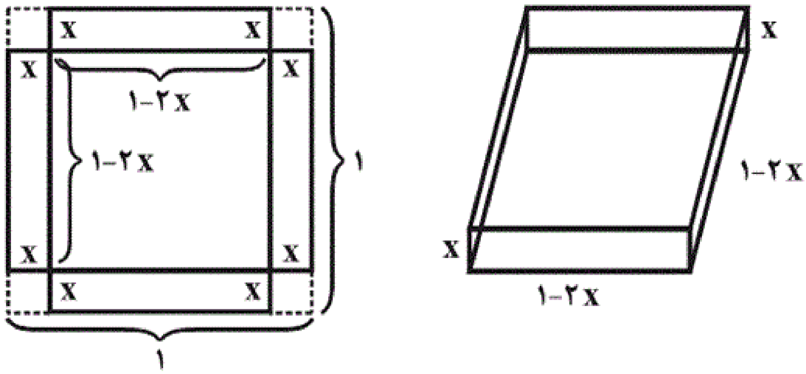
$$f'(x)=۰\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x\in\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]}\begin{cases}۲x=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۲}\\ ۲x=\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}$$

با تعیین علامت f' در بازهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ داریم:

x	۰		$\frac{\pi}{۱۲}$		$\frac{۵\pi}{۱۲}$		$\frac{\pi}{۲}$
$f'(x)=\frac{۱}{۲}-\sin ۲x$		$+$ ↗	۰	$-$ ↘	۰	$+$ ↗	

۱ ۲ ۳✓ ۴

اشکال زیر به‌خوبی مراحل کار را نشان می‌دهند:



حجم جعبهٔ ساخته شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v(x)=(۱-۲x)(۱-۲x)x=x(۱-۲x)^۲$$

توجه داشته باشید که $\frac{۱}{۲}>x>۰$ می‌باشد. حال باید مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $v(x)$ را در بازهٔ $\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$ به‌دست بیاوریم. داریم:

$$v'(x)=(۱-۲x)^۲-۴x(۱-۲x)=(۱-۲x)(۱-۶x)$$

$$v'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \text{ یا } x=\frac{۱}{۶}$$

حال چون $v(۰)=v\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰$ است، به ازای $x=\frac{۱}{۶}$ حجم ماکزیمم به‌دست می‌آید:

$$v_{max}=v\left(\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۲}{۲۷}$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردی

۹۰- (عرفان صادقی)

تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f(x)$ اکیداً صعودی است اگر و فقط اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، به شرط آنکه نقاطی که در آن f' صفر است، تشکیل پاره‌خط ندهند.

$$f'(x) = mx^2 + (m+1)x + m \geq 0$$

برای اینکه نامساوی فوق همواره صحیح باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} m > 0 & (1) \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4m^2 \leq 0 \Rightarrow -3m^2 + 2m + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m-1)(3m+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} m \in [1, +\infty)$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق: مکمل تمرین ۴ قسمت «پ» صفحهٔ ۱۲۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین

۱۰۱- (سامان اسپهرم)

تصویر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ بر روی محورهای Ox، Oy و Oz به‌ترتیب به‌صورت $(a_1, 0, 0)$، $(0, a_2, 0)$ و $(0, 0, a_3)$ است، بنابراین بردار $\vec{a}$ به‌صورت $\vec{a} = (2, -1, -2)$ است و داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

(هندسه ۳-بردارها: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

۱۰۲- (امیرحسین ابومحبوب)

تصویر بردار $\vec{a}$ در راستای بردار $\vec{b}$ به‌صورت $\vec{a}' = \left(\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\right)\vec{b}$ است.

بنابراین داریم:

$$\vec{a}' = \frac{۰+۰-۱}{\left(\sqrt{۰+۱+۱}\right)^{۲}}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = -\frac{۱}{۲}\vec{b} = \left(۰,-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$$

(هندسه ۳-بردارها: صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

۱۰۳- (حسین خزایی)

کافی است بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را بسازیم. زاویهٔ بین این دو بردار همان زاویهٔ رأس A است.

$$\overrightarrow{AB} = (۳,۲,۶)$$

$$\overrightarrow{AC} = (۵,۸,۳)$$

$$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{۱۵+۱۶+۱۸}{\sqrt{۹+۴+۳۶}\times\sqrt{۲۵+۶۴+۹}}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{۴۹}{۷\times ۷\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۴۵^\circ$$

(هندسه ۳-بردارها: صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۰۴ (عباس اسدی امیرآبادی)

اگر بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(x,y,z)$ را در نظر بگیریم، آنگاه با استفاده از نامساوی کشی شوارتز داریم:

$$|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$$

$$|۲x-y+۲z| \le \sqrt{۴+۱+۴} \times \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

$$\Rightarrow ۶ \le ۳\times\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \Rightarrow ۲ \le \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

$$\Rightarrow ۴ \le x^۲+y^۲+z^۲ \Rightarrow \min\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)=۴$$

(هندسه ۳-بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

-۱۰۵ (محمدعلی نادرپور)

$$|۳\vec{a}+۲\vec{b}|^۲ = ۹|\vec{a}|^۲+۴|\vec{b}|^۲+۱۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Rightarrow ۲۵=۹+۱۶+۱۲\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=۰$$

$$|۳\vec{a}-۲\vec{b}|^۲ = ۹|\vec{a}|^۲+۴|\vec{b}|^۲-۱۲\vec{a}.\vec{b}=۹+۱۶-۰=۲۵$$

$$\Rightarrow |۳\vec{a}-۲\vec{b}|=۵$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

-۱۰۶ (حسین خزایی)

$$2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o} \Rightarrow \vec{a}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|-\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow \cancel{|\vec{a}|^2}+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})=\cancel{|\vec{a}|^2}$$

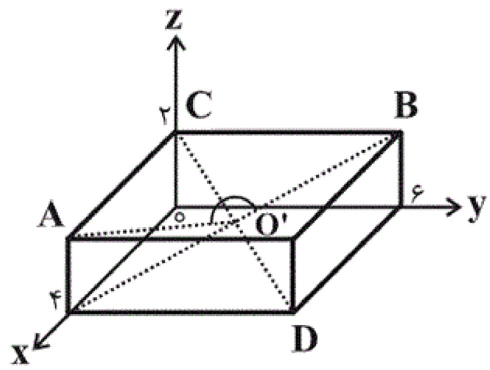
$$\Rightarrow 1+4+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})=0$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=-\frac{5}{2}=-2/5$$

(هندسه ۳-بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(محمدمهدی محسن‌زاده طبری)



نقطهٔ O' وسط دو نقطهٔ $C=(۰,۰,۲)$ و $D=(۴,۶,۰)$ قرار دارد. بنـابراین

مختصات نقطـهٔ O' بـه‌صـورت $O'=(۲,۳,۱)$ اسـت. بـا توجـه بـه نقـاط

$A=(۴,۰,۲)$ و $B=(۰,۶,۲)$ داریم:

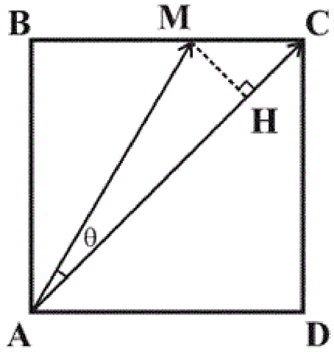
$$\overrightarrow{O'A}=(۲,-۳,۱)\,,\,\overrightarrow{O'B}=(-۲,۳,۱)$$

$$\cos\left(\widehat{AO'B}\right)=\frac{\overrightarrow{O'A}.\overrightarrow{O'B}}{\left|\overrightarrow{O'A}\right|\left|\overrightarrow{O'B}\right|}=\frac{-۴-۹+۱}{\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۱۴}}=\frac{-۱۲}{۱۴}=\frac{-۶}{۷}$$

(هندسه ۳-بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۴}$

(حسین خزایی)



اگر M یک نقطه روی محیط مربع باشد، داریم:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right|^{۲}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right|^{۲}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|\cos\theta=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right|$$

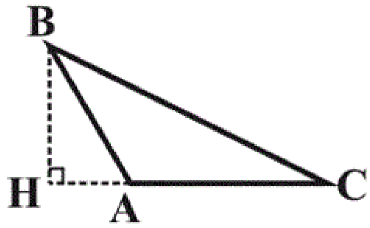
و با توجه به اینکه $\left|\overrightarrow{AM}\right|\cos\theta$ در مثلث AMH برابر $\left|\overrightarrow{AH}\right|$ می‌باشد، داریم:

$$\left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right|$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

(محسن رجبی)



مطـــابق شـــکل $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$ اســـت. از طرفـــی مـــی‌دانـــیم کـــه

بردار $\overrightarrow{AH}$ تصویر قائم بردار $\overrightarrow{AB}$ روی بردار $\overrightarrow{AC}$ است، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^{۲}}\overrightarrow{AC}$$

$$= (۱,۱,-۱) + \frac{(-۱,-۱,۱).(۲,۰,۰)}{۴}(۲,۰,۰)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = (۱,۱,-۱) + (-۱,۰,۰) = (۰,۱,-۱)$$

(هندسه ۳-بردارها: صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

۱۱۰- (مهرداد ملوندی)

با توجه به شکل داریم:

$$\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}+(-\vec{d})=\vec{o}\Rightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$$

$$\Rightarrow|\vec{a}+\vec{c}|^۲=|\vec{b}+\vec{d}|^۲\Rightarrow|\vec{a}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲\vec{a}.\vec{c}=|\vec{b}|^۲+|\vec{d}|^۲+۲\vec{b}.\vec{d}$$

$$\Rightarrow ۲(a.c-b.d)=|\vec{b}|^۲+|\vec{d}|^۲-(|\vec{a}|^۲+|\vec{c}|^۲)$$

$$\Rightarrow ۲(\vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{d})=۲^۲+۴^۲-(۱^۲+۳^۲)=۱۰\Rightarrow \vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{d}=۵$$

(هندسه ۳-بردارها: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

۹۱- (امیرهوشنگ خمسه)

تعداد مثلث‌ها: $۱,۴,۹,...,n^۲$

تعداد چوب‌کبریت‌ها: $(۱)\times ۳,(۱+۲)\times ۳,(۱+۲+۳)\times ۳,...,\frac{n(n+۱)}{۲}\times ۳$

$$\xrightarrow{n=۸}\begin{cases} \text{تعداد مثلث‌ها}: ۶۴ \\ \text{تعدادچوب‌کبریت‌ها}: \frac{۸(۹)}{۲}\times ۳=۱۰۸ \end{cases}\Rightarrow \text{اختلاف}=۴۴$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

اگر a ، b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، رابطهٔ $ac = b^{۲}$ برقرار است.

$$\Rightarrow (۵m - ۳)(۱۰m + ۸) = (۵m + ۱)^{۲}$$

$$\Rightarrow ۵۰m^{۲} + ۴۰m - ۳۰m - ۲۴ = ۲۵m^{۲} + ۱۰m + ۱$$

$$\Rightarrow ۲۵m^{۲} = ۲۵ \Rightarrow m^{۲} = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

به ازای $m = ۱$ ریشهٔ مضاعف مثبت برای معادله به‌دست می‌آید.

$m = -۱$ قابل قبول نیست؛ زیرا جملات دنباله منفی به‌دست می‌آیند:

جملات دنباله : $-۲, -۴, -۸$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷ و معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۴ ۳ ۲ ۱✓

آزمون 30 فروردین

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{|\cos\beta| \leq ۱} \cos\beta = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$$

مطابق شکل α یک زاویهٔ منفرجه و $\cos\alpha < ۰$ است، پس داریم:

$$\cos\alpha = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۴ ۳✓ ۲ ۱

آزمون 30 فروردین

-۹۴ (علی شهرابی)

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{۶}}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} + ۲\sin x \cos x = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x \cos x} = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}} = ۴$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون 30 فروردین

-۹۵ (سیدعادل حسینی)

$$\frac{۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۳x}{۴}}}{\sqrt{۲^{\frac{۴}{۳}} \times ۲^{x}}} = \sqrt{۲^{-۳}} \Rightarrow \frac{۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۳x}{۴}}}{۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{x}{۲}}} = ۲^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۲^{-\frac{x}{۴}} = ۲^{-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \frac{-x}{۴} = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow x = ۶$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۴۸ تا ۶۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

-۹۶ (جهانبخش نیکنام)

طبق اتحاد $(x+y)^۳ = x^۳ + y^۳ + ۳xy(x+y)$ داریم:

$$a^۳ = ۳+۲\sqrt{۲}+۳-۲\sqrt{۲}+۳\left(\sqrt[۳]{۳+۲\sqrt{۲}}\ \sqrt[۳]{۳-۲\sqrt{۲}}\right)(a)$$

$$\Rightarrow a^۳ = ۶+۳a \Rightarrow a^۳ - ۳a = ۶$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون 30 فروردین

-۹۷ (طاهر دارستانی)

واضح است که دهانهٔ سهمی باید روبه‌بالا باشد $(m-۱>۰)$. در ایـن حالـت طول رأس برابر است با $\frac{۱}{۲(m-۱)}$ که با توجه به شرط قبلی، این مقدار نیـز مثبت است، یعنی رأس سهمی در سمت راست محور y ها قرار دارد. بنابراین برای اینکه سهمی از ربع سوم نگذرد، کافی است عرض از مبدأ سهمی نامنفی باشد $(۳-m\geq ۰)$؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m-۱>۰ \Rightarrow m>۱ \\ ۳-m\geq ۰ \Rightarrow m\leq ۳ \end{cases} \Rightarrow ۱< m\leq ۳ \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=۲ \text{ یا } ۳$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین

از آنجا که قبل و بعد $x=1$ ، جزء مجموعهٔ جواب است، می‌توان گفت که در $x=1$ علامت عبارت $\frac{x^2+x+a}{bx^2+2x+b}$ تغییر نکرده است. پس $x=1$ ریشهٔ مضاعف صورت یا مخرج است. در صورتی که عبارت x^2+x+a دارای ریشهٔ مضاعف باشد، این ریشه $\frac{-1}{2}$ است، لذا $x=1$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است.

$$\Rightarrow 2b+2=0 \Rightarrow b=-1$$

نامعادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{x^2+x+a}{-(x-1)^2}>0 \Rightarrow \frac{x^2+x+a}{(x-1)^2}<0$$

$x=2$ ریشهٔ صورت کسر است و داریم:

$$4+2+a=0 \Rightarrow a=-6$$

حال پاسخ نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2+x-6}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow \text{جواب}=(-3,2)-\{1\}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ ✓

آزمون 30 فروردین

(یاسین سپهر)

تابع همانی : $f(x)=x \Rightarrow f(-۲)=-۲, f(۲)=۲$

تابع ثابت : $g(x)=c$

$$\begin{cases} g(x)=c \\ ۲f(-۲)=g(۲) \end{cases} \Rightarrow -۴=c$$

تابع خطی : $h(x)=ax+b$

$$\begin{cases} h(-۲)=-۲a+b=-۳ \\ h(۲)=۲a+b=-۱ \end{cases} \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}, b=-۲$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{۱}{۲}x-۲$$

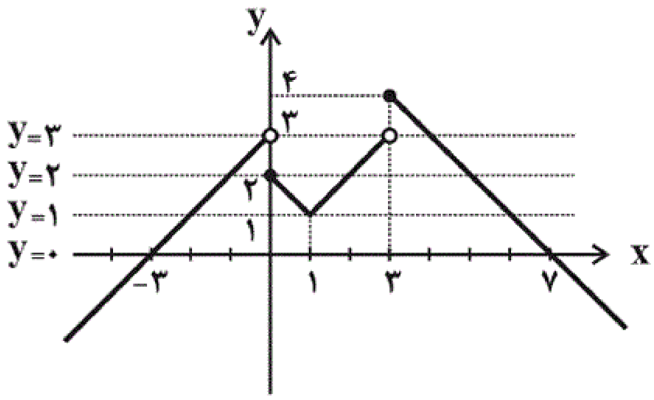
$$\xrightarrow{h(x)\geq ۰} \frac{۱}{۲}x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۴$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵ و تابع: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

 (علی شهرابی)

ابتدا نمودار تابع چندضابطه‌ای f را رسم می‌کنیم:



خطوط $y=0$، $y=1$، $y=2$ و $y=3$ به‌ترتیب نمودار f را در ۲، ۳، ۴ و ۱ نقطه قطع می‌کنند، پس از بین خطوط داده شده، خط $y=2$ در تعداد نقاط بیشتری تابع f را قطع می‌کند.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون 30 فروردین