حسابان ۱ - ۲۰ سوال -

۸۱- حاصل $(\tan 50^\circ - \tan 40^\circ)\times \cos 10^\circ$ کدام است؟

۱) $2\sin 10^\circ$ ۲) $2\sin 20^\circ$ ۳) $\sin 10^\circ$ ۴) $\sin 20^\circ$

۸۲- اگر $1+\sin 220^\circ = m$ باشد، $\sin^2 25^\circ$ کدام است؟

۱) $m$ ۲) $\frac{m}{2}$ ۳) $2m$ ۴) $1-m$

۸۳- حاصل عبارت $\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۸۴- حاصل $\frac{1}{2} - \sin 15^\circ \times \cos 75^\circ$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۸۵- اگر $\sin 2\theta = a$ باشد، حاصل $1-\cos^4\theta - \sin^2\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{a^2}{4}$ ۲) $4a^2$ ۳) $\frac{a^2}{2}$ ۴) $2a^2$

۸۶- اگر $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{4} = \cos 75^\circ$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_4^{b^a}$ کدام است؟ $(a\ ,\ b\in \mathbb{N})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۷- حاصل $\sin^3\frac{\pi}{12} + \cos^3\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{3\sqrt{6}}{16}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$

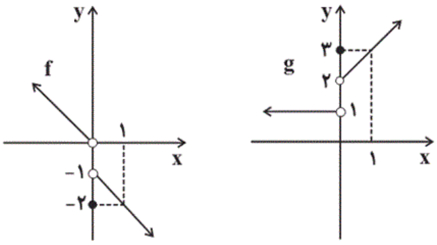
۸۸- اگر $x+y=\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{\sin^2 x\sin^2 y-\cos^2 x\cos^2 y}{\sin^2 y\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 y}=2\sqrt{3}$ باشد، مقدار $\tan(x-y)$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) $3$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۸۹- حاصل عبارت $\cos 6\alpha\cos\alpha+\sin 3\alpha\sin 8\alpha$ به ازای $\alpha=\frac{\pi}{9}$ رادیان کدام است؟

۱) $\cos 80^\circ$ ۲) $\cos 40^\circ$ ۳) $\cos 100^\circ$ ۴) $\cos 50^\circ$

۹۰- نمودار f و g به صورت مقابل رسم شده‌اند. حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ کدام است؟

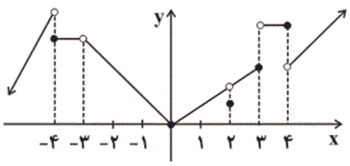



۱) ۱
۲) $-1$
۳) صفر
۴) وجود ندارد.

۹۱- با فرض $f(x)=-x^2+4x$، حاصل عبارت‌های $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)]$ و $[\lim\limits_{x\to 2}f(x)]$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟
([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴ و ۳ ۲) ۳ و ۳ ۳) ۳ و ۴ ۴) ۴ و ۴

۹۲- نمودار تابع f مطابق شکل روبه‌رو است. مجموع طول نقاطی که تابع f در آن‌ها حد ندارد، کدام است؟




۱) صفر
۲) $-1$
۳) ۱
۴) ۳

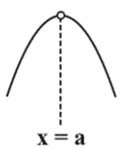
۹۳- اگر $f(x)=\begin{cases}[x]-3 & ; \ x<a\\ x^2-3x & ; \ x\geq a\end{cases}$ ، $a\in\mathbb{Z}$ و $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)-\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=0$ باشد، $f(-\frac{a}{3})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

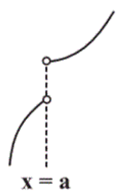
۱) ۲ ۲) $-2$ ۳) $-3$ ۴) $-4$

۹۴- تابع مربوط به کدام نمودار، در $x=a$ تعریف شده نیست و حد ندارد؟

۱)



۲)



۳)



۴)


۹۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+b)\sqrt{a-x^2}}$ به صورت یک همسایگی محذوف ۱ است و شامل همسایگی چپ عدد ۲ می‌باشد. اگر این دامنه هیچ همسایگی راست عدد ۲ را نداشته باشد، $a+b$ کدام است؟ $(a>0)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & , \quad x>0 \\ m & , \quad x=0 \\ 1-x^2 & , \quad x<0\end{cases}$، به ازای کدام مقدار m در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟

۱) فقط $m=0$ ۲) فقط $m=1$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

۹۷- تابع $f(x)=[x]-x$ مفروض است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-1$ ۴) وجود ندارد.

۹۸- در تابع $f(x)=\begin{cases}3 & ; \quad x\in Z \\ -2 & ; \quad x\notin Z\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)+f(2)$ کدام است؟

۱) $-6$ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) $-3$

۹۹- تابع $f(x)$، در $\mathbb{R}$ حد دارد. اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3f(x)+x}{2f^2(x)-8x^2}=1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}|f(x)-\frac{3}{4}|$ کدام است؟

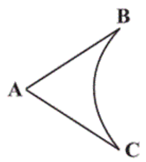
۱) $\frac{9}{4}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۰- حد چپ تابع $f(x)=4[x]+3[-x]$ در نقطه‌ای به طول صحیح a، دو برابر حد راست تابع f در این نقطه است. a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) $-1$ ۳) $-2$ ۴) ۲

## هندسه ۲ - ۱۰ سوال -

۱۲۱- زمینی با مساحت $8\sqrt{3}$ مطابق شکل زیر در اختیار داریم، به‌طوری که A، B و C رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. بدون آن‌که محیط زمین را تغییر داده باشیم، با کمک تبدیل هندسی مناسب، می‌توانیم مساحت زمین را دو برابر کنیم. طول پاره‌خط AB کدام است؟




۱) $2\sqrt{3}$
۲) $4\sqrt{3}$
۳) $6\sqrt{3}$
۴) $8\sqrt{3}$

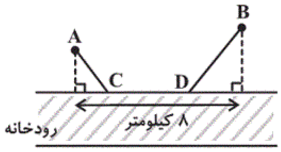
۱۲۲- دو نقطهٔ $A$ و $B$ در یک طرف خط $L$ و به فاصلهٔ ۵ از آن هستند و نقطهٔ $M$ به‌گونه‌ای روی خط $L$ واقع شده است که $AM+MB$ کم‌ترین مقدار است. اگر اندازهٔ $AB$، ۱۰ باشد، اندازهٔ $AM$ کدام است؟

۱) ۵
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۱۰\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۱۰}$

۱۲۳- از بین همهٔ ذوزنقه‌هایی با قاعده‌های به طول ۵ و ۷ که در قاعدهٔ به طول ۷ مشترک هستند و دارای مساحت ۲۴ می‌باشند، کم‌ترین محیط ممکن کدام است؟

۱) ۱۶
۲) $۱۶+\sqrt{۲۰}$
۳) $۱۲+\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $۱۲+۲\sqrt{۱۷}$

۱۲۴- دو شهر $A$ و $B$ مطابق شکل به فاصله‌های ۱ و ۲ کیلومتری از یک رودخانه و در یک طرف آن واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از $A$ به $B$ بسازیم به‌طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. طول کوتاه‌ترین مسیر $ACDB$ کدام است؟




۱) ۵
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۱

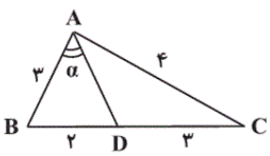
۱۲۵- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، نسبت شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $ABD$ به شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $ACD$ همواره برابر کدام است؟

۱) $\frac{AB}{AD}$
۲) $\frac{BD}{AC}$
۳) $\frac{AD}{AB}$
۴) $\frac{AC}{BD}$

۱۲۶- مثلث $ABC$ که رابطهٔ $\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}}{۴}$ بین زاویه‌های آن برقرار است، درون یک دایره محاط می‌باشد. اگر $AC=\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ شعاع این دایره کدام است؟

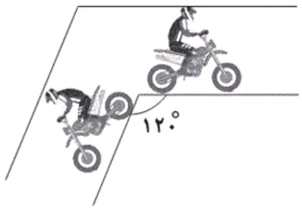
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۷- در شکل مقابل مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟




۱) $\frac{۷}{۸}$
۲) $\frac{۸}{۷}$
۳) $\frac{۸}{۹}$
۴) $\frac{۹}{۸}$

۱۲۸- دو موتورسوار مطابق شکل از یک نقطه در دو جادهٔ متفاوت که زاویهٔ بین آن‌ها ۱۲۰ درجه است، با سرعت‌های ثابت ۱۵ و ۴۸ کیلومتر بر ساعت از هم دور می‌شوند. بعد از ۲۰ دقیقه دو موتورسوار در چه فاصله‌ای برحسب کیلومتر از یکدیگر هستند؟




۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

۱۲۹- طول اضلاع یک مثلث اعداد طبیعی متوالی هستند. اگر کسینوس یک زاویهٔ این مثلث $-0/25$ باشد، آن‌گاه مساحت دایرهٔ محیطی این مثلث چقدر است؟

۱) $64\pi$ ۲) $\frac{64\pi}{15}$ ۳) $128\pi$ ۴) $\frac{128\pi}{15}$

۱۳۰- در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۶ و ۸، فاصلهٔ مرکز ثقل مثلث تا وسط بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ۴) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

## حسابان۱ - سوالات موازی - ۲۰ سوال -

۱۰۱- حاصل $(\tan 50^\circ - \tan 40^\circ)\times \cos 10^\circ$ کدام است؟

۱) $2\sin 10^\circ$ ۲) $2\sin 20^\circ$ ۳) $\sin 10^\circ$ ۴) $\sin 20^\circ$

۱۰۲- اگر $1+\sin 220^\circ = m$ باشد، $\sin^2 25^\circ$ کدام است؟

۱) $m$ ۲) $\frac{m}{2}$ ۳) $2m$ ۴) $1-m$

۱۰۳- حاصل عبارت $\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱۰۴- حاصل $\sin 15^\circ \times \cos 75^\circ - \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰۵- اگر $a=\sin 2\theta$ باشد، حاصل $1-\cos^4\theta-\sin^2\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{a^2}{4}$ ۲) $4a^2$ ۳) $\frac{a^2}{2}$ ۴) $2a^2$

۱۰۶- اگر $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{4}=\cos 75^\circ$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_4^{b^a}$ کدام است؟ $(a\,,\,b\in\mathbb{N})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۷- حاصل $\sin^3\frac{\pi}{12}+\cos^3\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{3\sqrt{6}}{16}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$

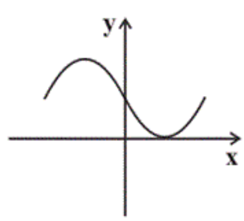
۱۰۸- اگر $x+y=\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{\sin^2 x\sin^2 y-\cos^2 x\cos^2 y}{\sin^2 y\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 y}=2\sqrt{3}$ باشد، مقدار $\tan(x-y)$ کدام است؟

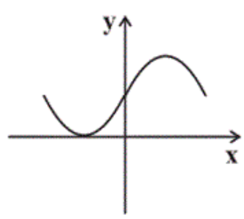
۱) $-2$ ۲) $3$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

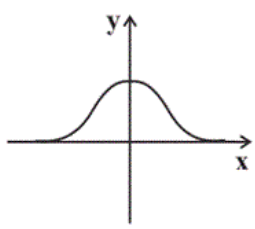
۱۰۹- حاصل عبارت $\cos 6\alpha\cos\alpha+\sin 3\alpha\sin 8\alpha$ به ازای $\alpha=\frac{\pi}{9}$ رادیان کدام است؟

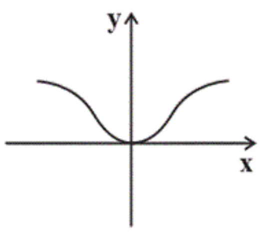
۱) $\cos 80^\circ$ ۲) $\cos 40^\circ$ ۳) $\cos 100^\circ$ ۴) $\cos 50^\circ$

۱۱۰- نمودار تابع $y=1-\sin(\frac{11\pi}{2}-x)$ در بازهٔ $[-\pi\,,\,\pi]$ به کدام صورت است؟

۱)



۲)



۳)



۴)


۱۱۱- اگر برد تابع $f(x)=-2\sin x+a$ بازهٔ $[-5,-1]$ باشد، برد تابع $g(x)=a\cos x+1$ کدام است؟

۱) $[-2,4]$ ۲) $[-4,2]$ ۳) $[-1,5]$ ۴) $[-5,1]$

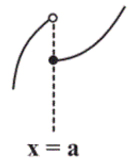
۱۱۲- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\sin x}$ شامل چند عدد طبیعی یک رقمی است؟

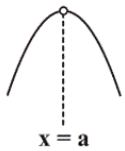
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

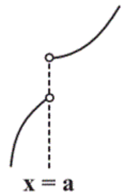
۱۱۳- مقدار $\cos\frac{20\pi}{3}$ کدام است؟

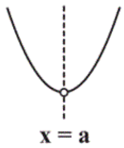
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱۴- تابع مربوط به کدام نمودار، در $x=a$ تعریف شده نیست و حد ندارد؟

۱) 


۲) 


۳) 


۴) 


۱۱۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{(x+b)\sqrt{a-x^2}}$ به صورت یک همسایگی محذوف ۱ است و شامل همسایگی چپ عدد ۲ می‌باشد. اگر این دامنه هیچ همسایگی راست عدد ۲ را نداشته باشد، $a+b$ کدام است؟ $(a>0)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & , \quad x>0\\ m & , \quad x=0\\ 1-x^2 & , \quad x<0\end{cases}$، به ازای کدام مقدار $m$ در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟

۱) فقط $m=0$ ۲) فقط $m=1$

۳) هر مقدار $m$ ۴) هیچ مقدار $m$

۱۱۷- تابع $f(x)=[x]-x$ مفروض است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]$ کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱− ۴) وجود ندارد.

۱۱۸- در تابع $f(x)=\begin{cases}3 & ; \ x\in Z\\ -2 & ; \ x\notin Z\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)+f(2)$ کدام است؟

۱) $-6$ ۲) $3$

۳) $9$ ۴) $-3$

۱۱۹- کدام یک از مجموعه‌های زیر فقط همسایگی راست عدد ۲ را شامل می‌شود؟

۱) $(2\,,3)$ ۲) $(1\,,2)$

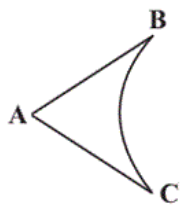
۳) $(0\,,4)$ ۴) $(1\,,3)-\{2\}$

۱۲۰- اگر دامنهٔ تابع $y=[x]+[-x]$ بازهٔ $[-2\,,2]$ باشد، این تابع در چند نقطه از دامنه‌اش حد ندارد؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) در تمامی نقاط حد دارد.

## هندسه۲- سوالات موازی - ۱۰ سوال -

۱۴۱- زمینی با مساحت $8\sqrt{3}$ مطابق شکل زیر در اختیار داریم، به‌طوری که A، B و C رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. بدون آن‌که محیط زمین را تغییر داده باشیم، با کمک تبدیل هندسی مناسب، می‌توانیم مساحت زمین را دو برابر کنیم. طول پاره‌خط AB کدام است؟




۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$

۳) $6\sqrt{3}$ ۴) $8\sqrt{3}$

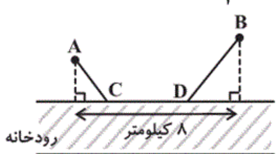
۱۴۲- دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط L و به فاصلهٔ ۵ از آن هستند و نقطهٔ M به‌گونه‌ای روی خط L واقع شده است که $AM+MB$ کم‌ترین مقدار است. اگر اندازهٔ AB، ۱۰ باشد، اندازهٔ AM کدام است؟

۱) ۵ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $10\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{10}$

۱۴۳- از بین همهٔ ذوزنقه‌هایی با قاعده‌های به طول ۵ و ۷ که در قاعدهٔ به طول ۷ مشترک هستند و دارای مساحت ۲۴ می‌باشند، کم‌ترین محیط ممکن کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) $16+\sqrt{20}$ ۳) $12+\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ۴) $12+2\sqrt{17}$

۱۴۴- دو شهر A و B مطابق شکل به فاصله‌های ۱ و ۲ کیلومتری از یک رودخانه و در یک طرف آن واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. طول کوتاه‌ترین مسیر ACDB کدام است؟




۱) ۵

۲) ۷

۳) ۹

۴) ۱۱

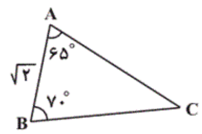
۱۴۵- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، نسبت شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $ABD$ به شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $ACD$ همواره برابر کدام است؟

۱) $\frac{AB}{AD}$ ۲) $\frac{BD}{AC}$ ۳) $\frac{AD}{AB}$ ۴) $\frac{AC}{BD}$

۱۴۶- مثلث $ABC$ که رابطهٔ $\frac{\hat{C}}{۴}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{A}}{۲}$ بین زاویه‌های آن برقرار است، درون یک دایره محاط می‌باشد. اگر $AC=\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۷- در شکل روبه‌رو، مجموع فاصله‌های نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث از سه رأس آن کدام است؟




۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۸- در مثلث $ABC$، طول دو ضلع $AC$ و $AB$، به‌ترتیب ۱ و $\sqrt{۳}$ برابر طول شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است. اندازهٔ زاویهٔ $A$ چند درجه است؟

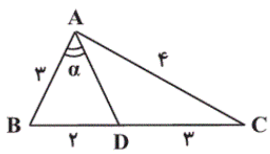
۱) ۳۰ یا ۹۰ ۲) ۹۰ یا ۱۲۰ ۳) ۹۰ یا ۱۵۰ ۴) ۱۲۰ یا ۱۵۰

۱۴۹- در مثلث $ABC$، نقطهٔ $I$ محل برخورد نیمسازهای داخلی است. اگر $IB\,.\,IC=IA\,.\,BC$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $A$ چند درجه است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

۱۵۰- در شکل مقابل مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۸}{۷}$ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۸}$




## آمار و احتمال - ۱۰ سوال

۱۶۱- در ۲۷ دادهٔ آماری میانگین ۱۲۳ محاسبه شده است. در بررسی دوباره داده‌ها متوجه شده‌ایم که به جای دادهٔ ۱۶۵، دادهٔ ۱۱۱ محاسبه گردیده است. با رفع این اشتباه میانگین واقعی کدام است؟

۱) ۱۲۳/۵ ۲) ۱۲۴/۵ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۲۵

۱۶۲- پایهٔ یازدهم مدرسه‌ای دارای ۳ کلاس ۳۰ نفره است. میانگین معدل این دانش‌آموزان ۱۶/۸ بوده است. اگر دبیران یک کلاس به همهٔ دانش‌آموزان آن کلاس در تمام درس‌ها ۰/۴ نمره و دبیران یک کلاس دیگر به تمام دانش‌آموزان آن کلاس در تمام درس‌ها ۰/۲ نمره اضافه کنند، میانگین معدل کل دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم این مدرسه کدام خواهد شد؟

۱) ۱۶/۹۵ ۲) ۱۷/۱ ۳) ۱۷/۰۵ ۴) ۱۷

۱۶۳- اگر میانگین و مد در داده‌های ۵۰، ۴۵، ۱۵، ۶۰، $x$ و ۵۵ با هم برابر باشند، میانهٔ داده‌ها کدام است؟

۱) ۴۷/۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۲/۵ ۴) ۵۵

۱۶۴- میانگین ۸ دادهٔ آماری برابر $\alpha$ است. اگر داده‌های ۱۲، ۱۴ و ۱۸ را از این داده‌ها حذف کنیم و داده‌های باقی‌مانده را دو برابر کنیم، میانگین داده‌های جدید $\alpha + 11$ خواهد شد، $\alpha$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲/۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴/۱

۱۶۵- در تفسیر و تحلیل مسائل آماری، در نظر گرفتن کدام شاخص گرایش به مرکز کافی است؟

۱) مد ۲) میانگین ۳) میانه ۴) یک شاخص به تنهایی کافی نیست.

۱۶۶- واریانس ۴ دادهٔ آماری برابر با صفر است. اگر داده‌های ۵، ۷ و ۹ را به آن‌ها اضافه کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر با ۷ می‌شود. واریانس داده‌های جدید تقریباً کدام است؟

۱) ۱/۱۴ ۲) ۱/۲۸ ۳) ۱/۵۶ ۴) ۱/۸۵

۱۶۷- واریانس داده‌های ۳۰، ۲۹، ۲۶، ۲۶، ۲۵، ۲۳، ۲۱ و ۲۰ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲/۵

۱۶۸- ۲۰ دادهٔ آماری با واریانس ۶ مفروض‌اند. اگر ۴ دادهٔ جدید به داده‌های اولیه اضافه کنیم به گونه‌ای که انحراف آن‌ها از میانگین داده‌های اولیه به‌ترتیب ۴، ۰، ۲- و ۲- باشد، واریانس این ۲۴ داده کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) قابل محاسبه نیست.

۱۶۹- انحراف معیار ۷ دادهٔ آماری برابر با ۳/۴ و میانگین این داده‌ها برابر ۱۰ است. اگر هر داده را ۲ برابر کرده و از هر کدام ۳ واحد کم کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۱۷۰- در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۶۱، ۵۰، ۶۴، ۲۳، ۴۵، ۱۷، ۷۴، ۵۴، ۲۸، ۵۹ و ۳۲، میانگین داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

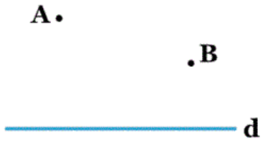
۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

## هندسه ۲ - گواه - ۱۰ سوال

۱۳۱- از بین مثلث‌هایی که در ضلع $AB = 16$ مشترک و مساحت آن‌ها ۴۸ می‌باشد، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۱۳۲- در شکل زیر، هرگاه فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از خط d به‌ترتیب برابر ۱۰ و ۵ واحد و همچنین طول AB برابر ۱۵ واحد باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر $AM+MB$ که M روی خط d باشد، کدام است؟



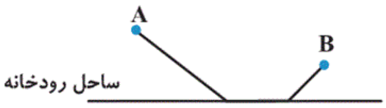

۱) $۴\sqrt{۲۱}$

۲) $۵\sqrt{۱۷}$

۳) $۶\sqrt{۱۵}$

۴) ۲۰

۱۳۳- مطابق شکل دو روستای A و B به فاصلهٔ $۵\sqrt{۲}$ کیلومتر از هم و به‌ترتیب به‌فاصله‌های ۲ و ۱ کیلومتر از ساحل رودخانه مفروض‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به‌طوری که ۱ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟



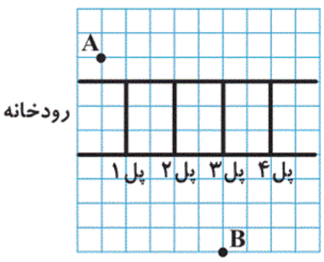

۱) $۱+۳\sqrt{۵}$

۲) $۱+۳\sqrt{۲}$

۳) ۷

۴) $۱+۳\sqrt{۷}$

۱۳۴- دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند. از کدام پل حرکت کنیم تا کم‌ترین فاصلهٔ ممکن برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ B پیموده شود؟



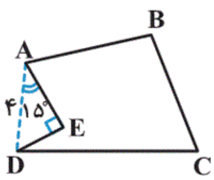

۱) پل ۱

۲) پل ۲

۳) پل ۳

۴) پل ۴

۱۳۵- می‌خواهیم بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چندضلعی ABCDE و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب، مساحت آن را افزایش دهیم. مساحت شکل جدید چند واحد بیش‌تر از مساحت شکل اولیه است؟



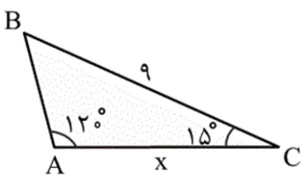

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

۱۳۶- در شکل روبه‌رو، مقدار x کدام است؟



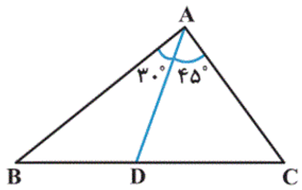

۱) $۳\sqrt{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۳) $۳\sqrt{۶}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۳۷- در مثلث $ABC$ شکل مقابل، $AB = ۳AC$ است. نسبت $\frac{BD}{DC}$ کدام است؟



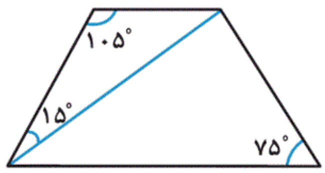

۱) ۳

۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $۳\sqrt{۲}$

۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۳۸- در شکل زیر یکی از قطرهای ذوزنقه رسم شده است. با توجه به زوایای مشخص شده، نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟



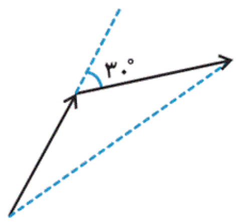

۱) $\sin ۷۵^\circ$

۲) $\frac{\sin ۱۰۵^\circ}{\sqrt{۲}}$

۳) $\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۹- قایقی به مدت ۵ ثانیه با سرعت ثابت $۳/۶\frac{m}{s}$ در حرکت است. سپس جهت حرکتش را ۳۰ درجه منحرف کرده و به مدت ۶ ثانیه با سرعت ثابت $۲\frac{m}{s}$ ادامه حرکت می‌دهد. مقدار جابه‌جایی این متحرک در این مدت چه‌قدر است؟




۱) $۱۲\sqrt{۱۳-۶\sqrt{۳}}$

۲) $۶\sqrt{۱۳-۶\sqrt{۳}}$

۳) $۱۲\sqrt{۱۳+۶\sqrt{۳}}$

۴) $۶\sqrt{۱۳+۶\sqrt{۳}}$

۱۴۰- اندازهٔ میانه‌های مثلثی برابر با ۴، ۵ و ۷ می‌باشد. مجموع مربعات اندازه‌های اضلاع آن کدام است؟

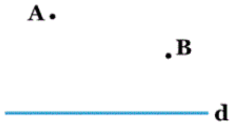
۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

## هندسه۲- گواه-سوالات موازی - ۱۰ سوال

۱۵۱- از بین مثلث‌هایی که در ضلع $AB = ۱۶$ مشترک و مساحت آن‌ها ۴۸ می‌باشد، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۱۵۲- در شکل زیر، هرگاه فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از خط d به‌ترتیب برابر ۱۰ و ۵ واحد و همچنین طول AB برابر ۱۵ واحد باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر $AM + MB$ که M روی خط d باشد، کدام است؟



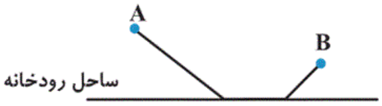

۱) $۴\sqrt{۲۱}$

۲) $۵\sqrt{۱۷}$

۳) $۶\sqrt{۱۵}$

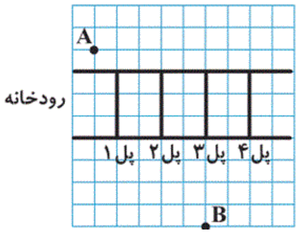
۴) ۲۰

۱۵۳- مطابق شکل دو روستای $A$ و $B$ به فاصلهٔ $۵\sqrt{۲}$ کیلومتر از هم و به‌ترتیب به‌فاصله‌های ۲ و ۱ کیلومتر از ساحل رودخانه مفروض‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از $A$ به $B$ بسازیم، به‌طوری که ۱ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟



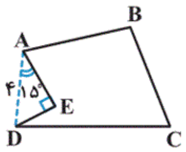

۱) $۱+۳\sqrt{۵}$
۲) $۱+۳\sqrt{۲}$
۳) ۷
۴) $۱+۳\sqrt{۷}$

۱۵۴- دو نقطهٔ $A$ و $B$ در دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند. از کدام پل حرکت کنیم تا کم‌ترین فاصلهٔ ممکن برای رفتن از نقطهٔ $A$ به نقطهٔ $B$ پیموده شود؟



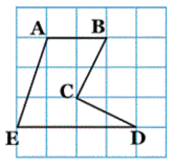

۱) پل ۱
۲) پل ۲
۳) پل ۳
۴) پل ۴

۱۵۵- می‌خواهیم بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چندضلعی $ABCDE$ و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب، مساحت آن را افزایش دهیم. مساحت شکل جدید چند واحد بیش‌تر از مساحت شکل اولیه است؟



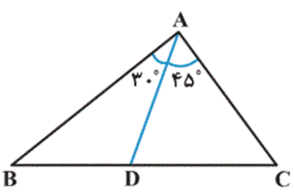

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

۱۵۶- در نقاط شبکه‌ای شکل زیر، زمینی داریم به شکل چندضلعی $ABCDE$ که دور آن را با فنس پوشانده‌ایم. بدون کم و زیاد کردن فنس‌ها و تعداد اضلاع زمین به کمک تبدیل هندسی مناسب مساحت زمین را افزایش داده‌ایم. مساحت زمین افزایش یافته کدام است؟ (فاصلهٔ بین نقاط شبکه‌ای یک واحد است.)



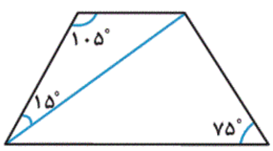

۱) ۱۱
۲) ۱۱/۵
۳) ۱۲
۴) ۱۲/۵

۱۵۷- در مثلث $ABC$ شکل مقابل، $AB = ۳AC$ است. نسبت $\frac{BD}{DC}$ کدام است؟



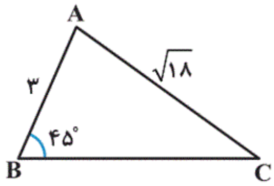

۱) ۳
۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۵۸- در شکل زیر یکی از قطرهای ذوزنقه رسم شده است. با توجه به زوایای مشخص شده، نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟




۱) $\sin ۷۵^\circ$
۲) $\frac{\sin ۱۰۵^\circ}{\sqrt{۲}}$
۳) $\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۵۹- با توجه به شکل مقابل، حاصل $\hat{B}+\hat{C}$ کدام است؟




۱) $۱۲۰^\circ$

۲) $۱۰۵^\circ$

۳) $۷۵^\circ$

۴) $۶۰^\circ$

۱۶۰- در مثلث ABC ، $AC=۳\sqrt{۶}$ ، $AB=۶$ و $\hat{C}=۴۵^\circ$ است. اختلاف کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۶}$ ۲) ۶ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۶}$

## ۸۱–

(مهرداد ملوندی)

راه‌حل اول: ابتدا عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$\tan ۵۰^\circ - \tan ۴۰^\circ = \frac{\sin ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ} - \frac{\sin ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ} = \frac{\sin ۵۰^\circ \cos ۴۰^\circ - \sin ۴۰^\circ \cos ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ \cos ۴۰^\circ}$$

$$\frac{\sin(۵۰^\circ - ۴۰^\circ)}{\cos ۵۰^\circ \cos ۴۰^\circ} = \frac{\sin ۱۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ \cos ۴۰^\circ} = \frac{\sin ۱۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۸۰^\circ} = \frac{۲\sin ۱۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}$$

پس:

$$\frac{۲\sin ۱۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} \times \cos ۱۰^\circ = \frac{۲\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} \times \cos ۱۰^\circ = ۲\sin ۱۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

می‌دانیم: $\cot \frac{x}{۲} - \tan \frac{x}{۲} = ۲\cot x$

از طرفی: $\tan ۵۰^\circ = \cot ۴۰^\circ$

$$\Rightarrow \text{عبارت مورد نظر} = (\cot ۴۰^\circ - \tan ۴۰^\circ) \times \cos ۱۰^\circ$$

$$= (۲\cot ۸۰^\circ) \times \cos ۱۰^\circ = ۲\tan ۱۰^\circ \times \cos ۱۰^\circ = ۲\sin ۱۰^\circ$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

## ۸۲–

(حمید علیزاده)

$$۱ + \sin ۲۲۰^\circ = m \Rightarrow ۱ + \sin(۲۷۰^\circ - ۵۰^\circ) = m$$

$$\Rightarrow ۱ - \cos ۵۰^\circ = m \Rightarrow ۲\sin^۲ ۲۵^\circ = m \Rightarrow \sin^۲ ۲۵^\circ = \frac{m}{۲}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۳- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \sin(90^\circ - 40^\circ)\sin(90^\circ - 20^\circ)}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{(\sin 20^\circ \cos 20^\circ)\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}\sin 40^\circ)\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{4}\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{1}{4}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۴- (محمدمصطفی ابراهیمی)

اولاً زوایای $15^\circ$ و $75^\circ$ متمم هستند. پس: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$.

$$\sin 15^\circ \times \cos 75^\circ - \frac{1}{2} = \sin 15^\circ \times \sin 15^\circ - \frac{1}{2}$$

$$= \sin^2 15^\circ - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 15^\circ)$$

۱✓ ۲ ۳ ۴

۸۵- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$1 - \sin^2\theta - \cos^4\theta$$

$$= \cos^2\theta - \cos^4\theta = \cos^2\theta(1 - \cos^2\theta)$$

$$= \cos^2\theta \times \sin^2\theta = (\cos\theta\sin\theta)^2 = (\frac{1}{2}\sin 2\theta)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$$

$$= \frac{1}{4} \times a^2 = \frac{a^2}{4}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

**۸۶-** (فریدون ساعتی)

می‌دانیم $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ بنابراین:

$$\cos ۷۵^\circ=\cos(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\cos۴۵^\circ\cos۳۰^\circ-\sin۴۵^\circ\sin۳۰^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۶}}{۴}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{۴}$$
$$\xrightarrow{a\ ,\ b\in N}\begin{cases}a=۶\\b=۲\end{cases}\Rightarrow \log_۴^{b^a}=\log_۴^{۲^۶}=\log_{۲^۲}^{۲^۶}=\frac{۶}{۲}=۳$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۸۷-** (امیرهوشنگ خمسه)

با استفاده از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲+b^۲-ab)$ می‌نویسیم:

$$\underbrace{(\sin\frac{\pi}{۱۲}+\cos\frac{\pi}{۱۲})}_{A}(\underbrace{\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}+\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}}_{۱}-\underbrace{\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}}_{\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۱۲}})$$
$$=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times(۱-\frac{۱}{۴})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۸}$$

توجه: $A^۲=\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}+\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}+۲\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}$

$$\Rightarrow A^۲=۱+\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

**۸۸-** (علی شهرابی)

صورت و مخرج تساوی دوم را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(\sin x\sin y-\cos x\cos y)(\sin x\sin y+\cos x\cos y)}{(\sin y\cos x-\sin x\cos y)(\sin y\cos x+\sin x\cos y)}=۲\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow\frac{-\cos(x+y)\cos(y-x)}{\sin(y-x)\sin(y+x)}=۲\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow -\cot(x+y)\cot(y-x)=۲\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow -\cot\frac{۵\pi}{۶}\cot(y-x)=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{۳}\cot(y-x)=۲\sqrt{۳}$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۸۹-** (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$\cos 6\alpha \cos\alpha + \sin 3\alpha \sin 8\alpha \xlongequal{\alpha = \frac{\pi}{9} \text{ رادیان}}$$

$$\cos\frac{6\pi}{9} \times \cos\frac{\pi}{9} + \sin\frac{3\pi}{9} \times \sin\frac{8\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{8\pi}{9}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{9} = -(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{9})$$

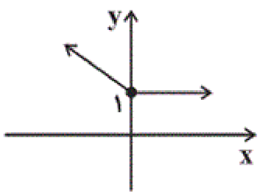
$$= -(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9})) = -\cos(\frac{4\pi}{9}) = -\cos 80^\circ = \cos 100^\circ$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۹۰-** (علی بهرمندپور)

نمودار تابع $f(x)+g(x)$ به صورت زیر است:




بنابراین: $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = 1$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲ و ۱۳۰ تا ۱۳۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

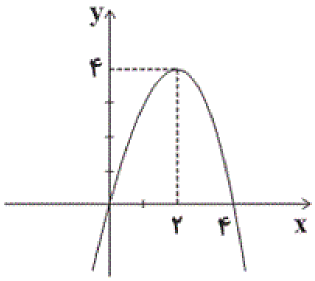
۹۱- (محمد پوراحمدی)

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = -x^۲ + ۴x = -(x^۲ - ۴x)$$

$$= -(x^۲ - ۴x + ۴ - ۴) = -(x-۲)^۲ + ۴$$

طبق نمودار، وقتی $x \to ۲$ ، تابع با مقادیر کمتر از ۴ به این عدد نزدیک می‌شود، پس:




$$\lim_{x\to۲} [f(x)] = \lim_{x\to۲} [-(x-۲)^۲ + ۴] = ۳$$

$$\lim_{x\to۲} f(x) = \lim_{x\to۲} (-(x-۲)^۲ + ۴) = ۴ \Rightarrow [\lim_{x\to۲} f(x)] = ۴$$

$[\lim_{x\to a} f(x)]$ به معنی جزء صحیح مقدار حد تابع f وقتی $x \to a$ است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۲- (سینا محمدپور)

با توجه به نمودار، تابع در سه نقطهٔ $x = ۳$ ، $x = ۴$ و $x = -۴$ حد ندارد.

بنابراین مجموع طول نقاطی که تابع f در آن‌ها حد ندارد، برابر است با:

$$۳ + ۴ + (-۴) = ۳$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۳- (علی بهرمندپور)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = a^۲ - ۳a \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = [a^-] - ۳ = a - ۱ - ۳ = a - ۴$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۳a - (a - ۴) = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow f(-\frac{a}{۳}) = f(-\frac{۲}{۳}) = [-\frac{۲}{۳}] - ۳ = -۱ - ۳ = -۴$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

**۹۴-** *(سینا محمدپور)*

توابع مربوط به گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» در $x=a$ تعریف شده نیستند.
از طرفی با توجه به مفهوم و تعریف حد واضح است که در تابع گزینه‌های «۲» و «۴» با نزدیک شدن متغیر $x$ به نقطهٔ $x=a$ (از هر طرف)، آن‌گاه $f(x)$ به هر میزان دلخواه به عدد مشخصی نزدیک می‌شود. در نتیجه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود دارد. اما در تابع گزینهٔ «۳» با نزدیک شدن متغیر $x$ به نقطهٔ $x=a$ (از دو طرف)، $f(x)$ به عدد مشخص و یکسانی میل نمی‌کند. پس $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد. ضمناً در گزینهٔ «۱»، تابع در $x=a$ تعریف شده است.

*(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)*

۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴

**۹۵-** *(یاسین سپهر)*

دامنه تابع $f$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x+b\neq 0 \Rightarrow x\neq -b$$
$$a-x^2>0 \Rightarrow x^2<a \Rightarrow -\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$$
$$\Rightarrow D_f=(-\sqrt{a}\,,\ \sqrt{a})-\{-b\}$$

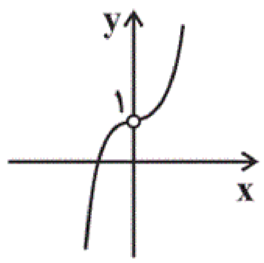
با توجه به اطلاعات مساله باید $\sqrt{a}=2$ باشد، چون همسایگی چپ ۲ است. پس $a=4$.
از طرفی $-b=1$ می‌باشد چون دامنهٔ تابع یک همسایگی محذوف ۱ می‌باشد. بنابراین $b=-1$ است. در نتیجه: $a+b=4-1=3$

*(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)*

۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴

**۹۶-** (سینا محمدپور)

**ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:**




**روشن است که با نزدیک شدن مقدار $x$ به $x=0$ (از دو طرف)، مقدار $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شود. لذا مقدار تابع در نقطهٔ $x=0$، هر چه باشد، تاثیری در موجود بودن حد تابع $f(x)$ در این نقطه ندارد. در نتیجه $f(0)=m$، هر مقدار دلخواهی را می‌تواند اختیار کند.**

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

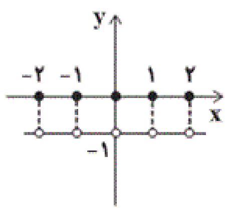
۱ ۲ ۳✓ ۴

**۹۷-** (میثم حمزه‌لویی)

**ابتدا تابع $y=[f(x)]$ را تشکیل می‌دهیم و ساده می‌کنیم:**

$$y=[f(x)]=[\underbrace{[x]}_{\in Z}-x]=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & , \quad x\in Z\\ -1 & , \quad x\notin Z\end{cases}$$

**پس نمودار تابع به صورت مقابل است:**



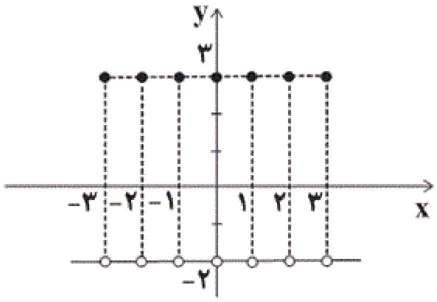

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}[f(x)]=-1$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۹۸-** *(امیرهوشنگ خمسه)*

**شکل تابع $f$ را رسم می‌کنیم.**




**مطابق شکل وقتی $x$ به هر سه عدد نزدیک می‌شود مقدار حد ۲- می‌شود و $f(2)=3$ خواهد بود.**

$\Rightarrow$ **حاصل عبارت** $= -2 + (-2) + (-2) + 3 = -3$

*(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

---

**۹۹-** *(سیدعادل حسینی)*

**فرض می‌کنیم:** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = L$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{3f(x)+x}{2f^2(x)-8x^2} = \frac{3L+1}{2L^2-8} = 1$$

$$\Rightarrow 2L^2 - 3L - 9 = 0 \Rightarrow (2L+3)(L-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} |f(x) - \frac{3}{4}| = |3 - \frac{3}{4}| = \frac{9}{4} \\ L = -\frac{3}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} |f(x) - \frac{3}{4}| = |-\frac{3}{2} - \frac{3}{4}| = \frac{9}{4} \end{cases}$$

*(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)*

۱✓ ۲ ۳ ۴

**۱۰۰-** (پوریا محدث)

ابتدا ضابطهٔ f را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=[x]+٣([x]+[-x])\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x\in Z \\ [x]-٣ & ; \quad x\notin Z \end{cases}$$

$$a\in Z: \lim_{x\to a^-} f(x)=[a^-]-٣=a-١-٣=a-۴$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=[a^+]-٣=a-٣$$

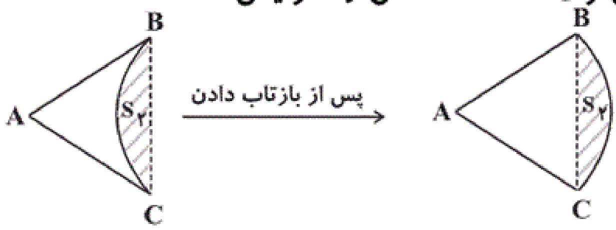
$$\Rightarrow a-۴=٢a-۶\Rightarrow a=٢$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

**۱۲۱-** (محمد خندان)

با کمک تبدیل بازتاب می‌توان مساحت شکل را افزایش داد.




اگر مساحت مثلث را $S_١$ و مساحت ناحیهٔ هاشور زده را $S_٢$ بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} \text{مساحت شکل اولیه} = S_١-S_٢=٨\sqrt{٣} \\ \text{مساحت شکل جدید} = S_١+S_٢=١۶\sqrt{٣} \end{cases}\Rightarrow S_١=١٢\sqrt{٣}$$

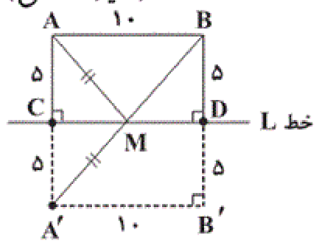
حال با توجه به رابطهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

$$S_١=\frac{AB^٢\sqrt{٣}}{۴}=١٢\sqrt{٣}\Rightarrow AB=۴\sqrt{٣}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحهٔ ۵۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

**۱۲۲-** (امیر غلامی)




$AM + MB$ کم‌ترین مقدار $= |A'B| = \sqrt{۱۰^۲ + ۱۰^۲} = ۱۰\sqrt{۲}$

از آنجایی که $\overset{\Delta}{ACM} \sim \overset{\Delta}{BMD}$، داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{A'B} = \frac{۵}{۵+۵} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}A'B = ۵\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

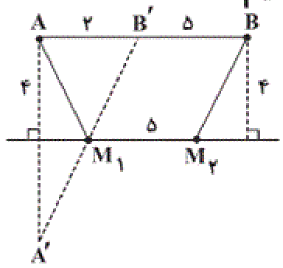
۱ ۲✓ ۳ ۴

---

**۱۲۳-** (امیر غلامی)

این مساله را می‌توان در قالب مساله کوتاه‌ترین مسیر هرون حل کرد. کافیست طول کوتاه‌ترین مسیر $AM_۱M_۲B$ را تعیین کنیم که مسیر $M_۱M_۲$ روی خطی به موازات خط $AB$ قرار دارد و طول آن ۵ می‌باشد. فاصلهٔ نقاط $B$ و $A$ از این خط همان ارتفاع ذوزنقه است که با استفاده از مساحت به دست می‌آید. $\frac{۱}{۲}(۵+۷)\times h = ۲۴ \Rightarrow h = ۴$

کافیست کم‌ترین مقدار $AM_۱ + BM_۲$ را تعیین کنیم:




کم‌ترین مقدار برای $AM_۱ + BM_۲$

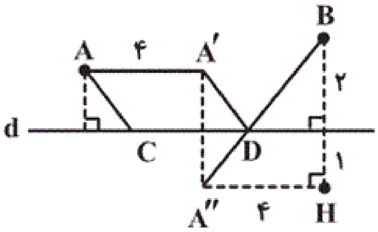
$= AM_۱ + M_۱B' = A'M_۱ + M_۱B' = A'B' = \sqrt{۲^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۶۸} = ۲\sqrt{۱۷}$

$\Rightarrow$ کمترین محیط ذوزنقه $= ۵ + ۷ + ۲\sqrt{۱۷} = ۱۲ + ۲\sqrt{۱۷}$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

**۱۲۴-** (محمد خندان)




**نقطهٔ A را تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ موازی خط d (به سمت راست) و به طول ۴ بر نقطهٔ A′ تصویر می‌کنیم. قرینهٔ A′ را نسبت به خط d، A″ و نقطهٔ تلاقی خط d و پاره خط A″B را نقطهٔ D می‌نامیم. سپس CD را به طول ۴ روی خط d جدا می‌کنیم. مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. داریم:**

$$A''B^{۲} = BH^{۲} + A''H^{۲} = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow A''B = ۵$$

$$\Rightarrow A''D + BD = ۵$$

$$\xrightarrow[\text{طولپایی بازتاب}]{A'D = A''D} A'D + BD = ۵$$

$$\xrightarrow[\text{طولپایی انتقال}]{AC = A'D} AC + BD = ۵$$

$$\text{طول مسیر } ACDB = AC + CD + DB$$

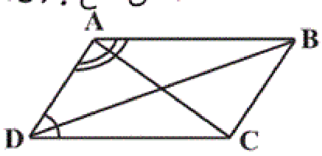
$$= (AC + BD) + CD = ۵ + ۴ = ۹$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

---

**۱۲۵-** (علی فتح‌آبادی)




**دو زاویهٔ A و D مکمل یکدیگرند، پس:**

$$\hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{A} = \sin\hat{D}$$

$$\text{قضیهٔ سینوس‌ها}: \begin{cases} \overset{\Delta}{ABD}: \dfrac{BD}{\sin\hat{A}} = ۲R \Rightarrow R = \dfrac{BD}{۲\sin\hat{A}} \\ \overset{\Delta}{ACD}: \dfrac{AC}{\sin\hat{D}} = ۲R' \Rightarrow R' = \dfrac{AC}{۲\sin\hat{D}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{BD}{AC}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۶- (علی فتح‌آبادی)

با توجه بـه رابطـهٔ $\frac{\hat{C}}{۴}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{A}}{۲}$ مـی‌تـوان انـدازهٔ زاویـه‌هـای مثلـث را مشخص کرد.

$$\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}}{۴}=K \Rightarrow \hat{A}=۲K \quad , \quad \hat{B}=۳K \quad , \quad \hat{C}=۴K$$

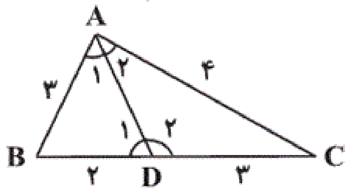
$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲K+۳K+۴K=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow K=۲۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=۴۰^\circ \\ \hat{B}=۶۰^\circ \\ \hat{C}=۸۰^\circ \end{cases}$$

با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی ایـن مثلـث را به دست می‌آوریم

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

با نوشتن قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث‌های $ABD$ و $ACD$ داریم:




$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABD}: \dfrac{BD}{\sin \hat{A}_1} = \dfrac{AB}{\sin \hat{D}_1} \Rightarrow \dfrac{۲}{\sin \hat{A}_1} = \dfrac{۳}{\sin \hat{D}_1} \\ \overset{\Delta}{ACD}: \dfrac{CD}{\sin \hat{A}_2} = \dfrac{AC}{\sin \hat{D}_2} \Rightarrow \dfrac{۳}{\sin \hat{A}_2} = \dfrac{۴}{\sin \hat{D}_2} \end{cases}$$

چون $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ مکمل یکدیگر هستند، پس مقدار $\sin\hat{D}_1$ و $\sin \hat{D}_2$ برابر است، پس:

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{D}_1 = \sin \hat{D}_2$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\sin\hat{A}_1 = \frac{۴}{۳}\sin \hat{A}_2 \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \frac{۸}{۹}\sin \hat{A}_2 \qquad (*)$$

مثلث $ABC$ قائم‌الزاویه است $(BC^۲ = AB^۲ + AC^۲)$، پس دو زاویهٔ $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ متمم یکدیگر هستند، بنابراین:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = ۹۰^\circ \Rightarrow \sin \hat{A}_2 = \cos \hat{A}_1$$

$$\xrightarrow{(*)} \sin \hat{A}_1 = \frac{۸}{۹}\cos \hat{A}_1 \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}_1}{\cos \hat{A}_1} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \tan \hat{A}_1 = \frac{۸}{۹}$$

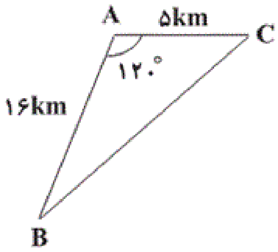
دقت داشته باشید که بدون استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها نیز می‌توان به مطلوب مسأله دست یافت کافیست از نقطهٔ $D$ به ضلع $AB$ عمود کرده و از تالس و سپس روابط مثلثاتی کمک بگیرید.

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۱۲۸-** *(فرشاد فرامرزی)*

**۲۰ دقیقه معادل $\frac{۱}{۳}$ ساعت است و دو موتورسوار بعد از گذشت این زمان در فاصله‌های $AC = ۱۵ \times \frac{۱}{۳} = ۵km$ و $AB = ۴۸ \times \frac{۱}{۳} = ۱۶km$ از نقطهٔ شروع یعنی $A$ قرار دارند. با توجه به شکل و قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:**




$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC \times AB \times \cos ۱۲۰°$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۵^۲ + ۱۶^۲ - ۲ \times ۵ \times ۱۶ \times (-\frac{۱}{۲}) = ۳۶۱$$

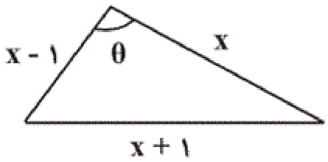
$$\Rightarrow BC = \sqrt{۳۶۱} = ۱۹km$$

*(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)*

۱ | ۲ ✓ | ۳ | ۴

 (مهرداد اسپیدکار)

طول اضلاع مثلث را $x-1$ ، $x$ و $x+1$ فرض می‌کنیم. مقـدار کسـینوس یک زاویهٔ این مثلث داده شده است، چـون مقـدار آن منفـی اسـت، پـس زاویهٔ آن منفرجه است و روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع مثلث است. بنـابراین با توجه به شکل داریم:

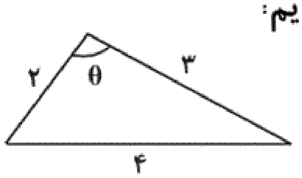



قضیهٔ کسینوس‌ها : $(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 - 2x(x-1)\underbrace{\cos\theta}_{-\frac{1}{4}}$

$$\Rightarrow x^2+2x+1 = x^2+x^2-2x+1+\frac{1}{2}(x^2-x)$$

$$\Rightarrow 3x^2-9x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=3 \end{cases}$$

پس طول اضلاع مثلث ۲، ۳ و ۴ است، حال با توجه بـه قضـیهٔ سـینوس‌هـا اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را به دست می‌آوریم:




$$\cos\theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ سینوس‌ها}} 2R = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{15}}$$

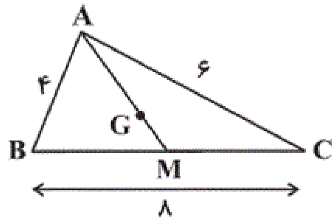
$$\Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{64\pi}{15}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

**۱۳۰-** (امیرهوشنگ خمسه)

**مرکز ثقل هر مثلث، محل همرسی میانه‌های آن مثلث است. با توجه به شکل داریم:**




$$\text{(قضیهٔ میانه‌ها)}: b^{2}+c^{2}=2AM^{2}+\frac{a^{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 16+36=2AM^{2}+\frac{64}{2}\Rightarrow AM=\sqrt{10}$$

**حال با توجه به این که میانه‌ها یکدیگر را با نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، داریم:**

$$AG=2GM\Rightarrow GM=\frac{AM}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

**۱۰۱-** (مهرداد ملوندی)

**راه‌حل اول: ابتدا عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم:**

$$\tan 50^{\circ}-\tan 40^{\circ}=\frac{\sin 50^{\circ}}{\cos 50^{\circ}}-\frac{\sin 40^{\circ}}{\cos 40^{\circ}}=\frac{\sin 50^{\circ}\cos 40^{\circ}-\sin 40^{\circ}\cos 50^{\circ}}{\cos 50^{\circ}\cos 40^{\circ}}$$

$$\frac{\sin(50^{\circ}-40^{\circ})}{\cos 50^{\circ}\cos 40^{\circ}}=\frac{\sin 10^{\circ}}{\sin 40^{\circ}\cos 40^{\circ}}=\frac{\sin 10^{\circ}}{\frac{1}{2}\sin 80^{\circ}}=\frac{2\sin 10^{\circ}}{\sin 80^{\circ}}$$

**پس:**

$$\frac{2\sin 10^{\circ}}{\sin 80^{\circ}}\times\cos 10^{\circ}=\frac{2\sin 10^{\circ}}{\cos 10^{\circ}}\times\cos 10^{\circ}=2\sin 10^{\circ}$$

**راه‌حل دوم:**

**می‌دانیم:**

$$\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}=2\cot x$$

**از طرفی:**

$$\tan 50^{\circ}=\cot 40^{\circ}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت مورد نظر}=(\cot 40^{\circ}-\tan 40^{\circ})\times\cos 10^{\circ}$$

$$=(2\cot 80^{\circ})\times\cos 10^{\circ}=2\tan 10^{\circ}\times\cos 10^{\circ}=2\sin 10^{\circ}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

---

**۱۰۲-** (حمید علیزاده)

$$1+\sin 220^\circ = m \Rightarrow 1+\sin(270^\circ - 50^\circ) = m$$

$$\Rightarrow 1-\cos 50^\circ = m \Rightarrow 2\sin^2 25^\circ = m \Rightarrow \sin^2 25^\circ = \frac{m}{2}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱    ۲✓    ۳    ۴

---

**۱۰۳-** (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \sin(90^\circ - 40^\circ)\sin(90^\circ - 20^\circ)}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{(\sin 20^\circ \cos 20^\circ)\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}\sin 40^\circ)\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{4}\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{1}{4}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱    ۲    ۳✓    ۴

---

**۱۰۴-** (محمدمصطفی ابراهیمی)

اولاً زوایای $15^\circ$ و $75^\circ$ متمم هستند. پس: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$.

$$\sin 15^\circ \times \cos 75^\circ - \frac{1}{2} = \sin 15^\circ \times \sin 15^\circ - \frac{1}{2}$$

$$= \sin^2 15^\circ - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1-2\sin^2 15^\circ)$$

می‌دانیم $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2 \alpha$ پس:

$$-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 15^\circ) = -\frac{1}{2}(\cos(2\times 15^\circ))$$

۱✓    ۲    ۳    ۴

-۱۰۵ (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$1-\sin^2\theta-\cos^4\theta$$
$$=\cos^2\theta-\cos^4\theta=\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$=\cos^2\theta\times\sin^2\theta=(\cos\theta\sin\theta)^2=(\frac{1}{2}\sin 2\theta)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2\theta$$
$$=\frac{1}{4}\times a^2=\frac{a^2}{4}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

✓۱ ۲ ۳ ۴

---

-۱۰۶ (فریدون ساعتی)

می‌دانیم $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ بنابراین:

$$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{4}$$
$$\xrightarrow{a\ ,\ b\in N}\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}\Rightarrow \log_4^{b^a}=\log_4^{2^6}=\log_{2^2}^{2^6}=\frac{6}{2}=3$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

---

۱ ۲ ✓۳ ۴

-۱۰۷ (امیرهوشنگ خمسه)

با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$ می‌نویسیم:

$$\underbrace{(\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12})}_{A}(\underbrace{\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}}_{1}-\underbrace{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}_{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12}})$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times(1-\frac{1}{4})=\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

توجه: $A^2=\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}+2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

$$\Rightarrow A^2=1+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

---

✓۱ ۲ ۳ ۴

۱۰۸- (علی شهرابی)

**صورت و مخرج تساوی دوم را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:**

$$\frac{(\sin x\sin y-\cos x\cos y)(\sin x\sin y+\cos x\cos y)}{(\sin y\cos x-\sin x\cos y)(\sin y\cos x+\sin x\cos y)}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{-\cos(x+y)\cos(y-x)}{\sin(y-x)\sin(y+x)}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow-\cot(x+y)\cot(y-x)=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow-\cot\frac{۵\pi}{۶}\cot(y-x)=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{۳}\cot(y-x)=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\cot(y-x)=۲$$

| ۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴ |
|---|---|---|---|

۱۰۹- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$\cos۶\alpha\cos\alpha+\sin۳\alpha\sin۸\alpha\ \xlongequal{\alpha=\frac{\pi}{۹}\ \text{رادیان}}$$

$$\cos\frac{۶\pi}{۹}\times\cos\frac{\pi}{۹}+\sin\frac{۳\pi}{۹}\times\sin\frac{۸\pi}{۹}=\cos\frac{۲\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۹}+\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{۸\pi}{۹}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۹}+\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۹}=-(\cos\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۹}-\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۹})$$

$$=-(\cos(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹}))=-\cos(\frac{۴\pi}{۹})=-\cos۸۰^\circ=\cos۱۰۰^\circ$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

| ۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴ |
|---|---|---|---|

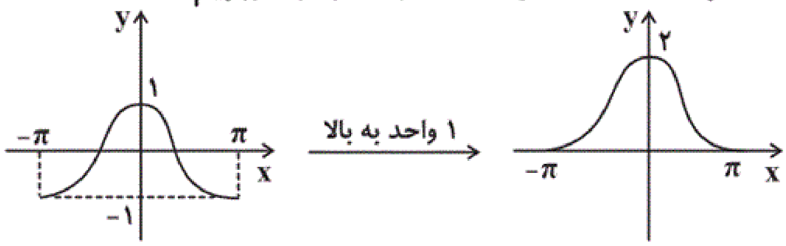
**-۱۱۰** (علی شهرابی)

**ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:**

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۲}-x)=\sin(۴\pi+\frac{۳\pi}{۲}-x)=\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$$

**پس:** $y=۱-(-\cos x)=۱+\cos x$

**کافیست نمودار $y=\cos x$ را یک واحد به بالا ببریم:**




$y=\cos x$ ، $y=\cos x+۱$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

**-۱۱۱** (علی شهرابی)

**اول برد f را برحسب a حساب می‌کنیم:**

$$-۱\le \sin x\le ۱ \xrightarrow{\times(-۲)} -۲\le -۲\sin x\le ۲$$
$$\xrightarrow{+a} -۲+a\le f(x)\le ۲+a$$

**پس بازهٔ $[-۵\ ,\ -۱]$ همان بازهٔ $[-۲+a\ ,\ ۲+a]$ است. در نتیجه:**

$$\begin{cases}-۲+a=-۵\\ ۲+a=-۱\end{cases}\Rightarrow a=-۳$$

**با جای‌گذاری $a=-۳$ ، برد g را حساب می‌کنیم:**

$$-۱\le \cos x\le ۱ \xrightarrow{\times(-۳)} -۳\le -۳\cos x\le ۳$$
$$\xrightarrow{+۱} -۲\le g(x)\le ۴$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

**باید $\sin x\ge ۰$ باشد. با توجه به نمودار، برای اعداد طبیعی یک رقمی، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۷ ، ۸ و ۹، شرط $\sin x\ge ۰$ برقرار است. پس ۶ عدد طبیعی یک رقمی در دامنهٔ تابع است.**

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(مهرداد اسپیدکار) **-۱۱۳**

$$\cos\frac{۲۰\pi}{۳} = \cos(۶\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

(حسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(سینا محمدپور) **-۱۱۴**

**توابع مربوط به گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» در $x = a$ تعریف شده نیستند. از طرفی با توجه به مفهوم و تعریف حد واضح است که در تابع گزینه‌های «۲» و «۴» با نزدیک شدن متغیر $x$ به نقطهٔ $x = a$ (از هر طرف)، آن‌گاه $f(x)$ به هر میزان دلخواه به عدد مشخصی نزدیک می‌شود. در نتیجه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود دارد. اما در تابع گزینهٔ «۳» با نزدیک شدن متغیر $x$ به نقطهٔ $x = a$ (از دو طرف)، $f(x)$ به عدد مشخص و یکسانی میل نمی‌کند. پس $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد. ضمناً در گزینهٔ «۱»، تابع در $x = a$ تعریف شده است.**

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(یاسین سپهر) **-۱۱۵**

**دامنه تابع $f$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:**

$$x + b \neq ۰ \Rightarrow x \neq -b$$

$$a - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < a \Rightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow D_f = (-\sqrt{a}\ ,\ \sqrt{a}) - \{-b\}$$

**با توجه به اطلاعات مساله باید $\sqrt{a} = ۲$ باشد، چون همسایگی چپ ۲ است. پس $a = ۴$.**

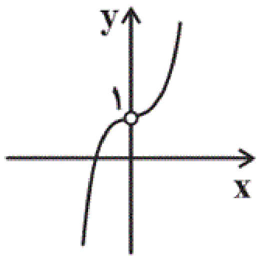
**از طرفی $-b = ۱$ می‌باشد چون دامنهٔ تابع یک همسایگی محذوف ۱ می‌باشد. بنابراین $b = -۱$ است. در نتیجه:** $a + b = ۴ - ۱ = ۳$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۱۱۶–** (سینا محمدپور)

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:




روشن است که با نزدیک شدن مقدار $x$ به $x=0$ (از دو طرف)، مقدار $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شود. لذا مقدار تابع در نقطهٔ $x=0$، هر چه باشد، تاثیری در موجود بودن حد تابع $f(x)$ در این نقطه ندارد. در نتیجه $f(0)=m$، هر مقدار دلخواهی را می‌تواند اختیار کند.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

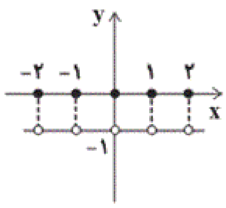
۱    ۲    ۳ ✓    ۴

**۱۱۷–** (میثم حمزه‌لویی)

ابتدا تابع $y=[f(x)]$ را تشکیل می‌دهیم و ساده می‌کنیم:

$$y=[f(x)]=[\underbrace{[x]}_{\in Z}-x]=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & , \quad x\in Z\\ -1 & , \quad x\notin Z\end{cases}$$

پس نمودار تابع به صورت مقابل است:



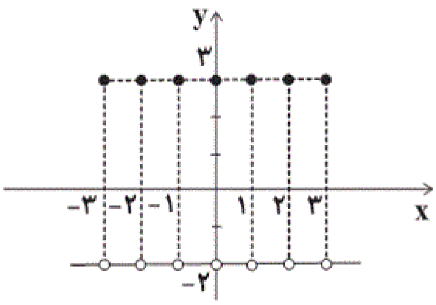

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}[f(x)]=-1$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۱    ۲    ۳ ✓    ۴

**۱۱۸-** (امیرهوشنگ خمسه)

**شکل تابع f را رسم می‌کنیم.**



**مطابق شکل وقتی x به هر سه عدد نزدیک می‌شود مقدار حد ۲- می‌شود و ۳ = f(۲) خواهد بود.**

**$\Rightarrow$ حاصل عبارت = ۲- + (۲-) + (۲-) + ۳ = ۳-**

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

---

**۱۱۹-** (یاسین سپهر)

**اگر $r > ۰$ باشد در این صورت بازهٔ $(a , a + r)$ را یک همسایگی راست عدد a می‌گوییم.**

**با توجه به تعریف فوق بازهٔ (۳ ، ۲) همسایگی راست ۲ است.**

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

**بازهٔ (۲ ، ۱) ، همسایگی چپ عدد ۲ می‌باشد.**

**بازهٔ (۴ , ۰) یک همسایگی ۲ است.**

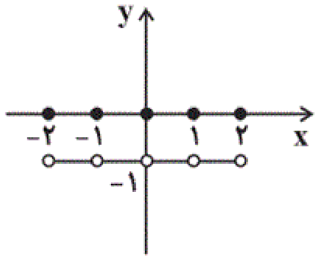
**مجموعهٔ {۲} − (۳ , ۱) همسایگی محذوف ۲ می‌باشد.**

(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

**۱۲۰-** *(سعید مدیرخراسانی)*

**با توجه به ضابطه و نمودار تابع، این تابع فقط در نقاط $x=-۲$ و $x=۲$ از دامنه‌اش حد ندارد، زیرا تابع در همسایگی راست نقطهٔ $x=۲$ و در همسایگی چپ نقطهٔ $x=-۲$ تعریف نمی‌شود.**



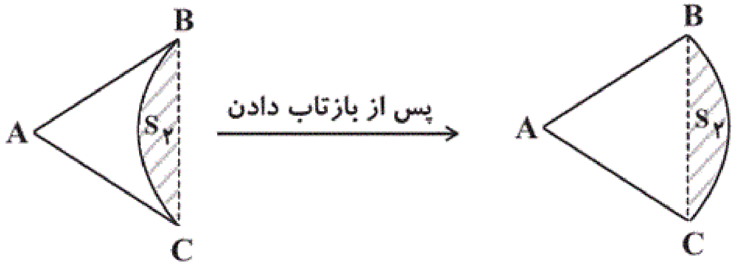

$$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ; \quad x\in Z \\ -۱ & ; \quad x\notin Z \end{cases}$$

*(حسابان ۱- حد و پیوستگی- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

**۱۴۱-** *(محمد خندان)*

**با کمک تبدیل بازتاب می‌توان مساحت شکل را افزایش داد.**

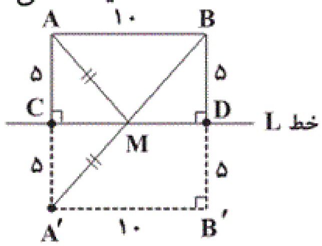



**اگر مساحت مثلث را $S_۱$ و مساحت ناحیهٔ هاشور زده را $S_۲$ بگیریم، داریم:**

$$\begin{cases} \text{مساحت شکل اولیه} = S_۱-S_۲=۸\sqrt{۳} \\ \text{مساحت شکل جدید} = S_۱+S_۲=۱۶\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow S_۱=۱۲\sqrt{۳}$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۲- (امیر غلامی)




$AM + MB$ کم‌ترین مقدار $= |A'B| = \sqrt{۱۰^۲ + ۱۰^۲} = ۱۰\sqrt{۲}$

از آنجایی که $\overset{\Delta}{ACM} \sim \overset{\Delta}{BMD}$ ، داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{A'B} = \frac{۵}{۵+۵} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}A'B = ۵\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

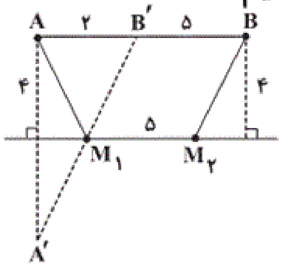
۱    ۲✓    ۳    ۴

---

۱۴۳- (امیر غلامی)

این مساله را می‌توان در قالب مساله کوتاه‌ترین مسیر هرون حل کرد. کافیست طول کوتاه‌ترین مسیر $AM_۱M_۲B$ را تعیین کنیم که مسیر $M_۱M_۲$ روی خطی به موازات خط $AB$ قرار دارد و طول آن ۵ می‌باشد. فاصلهٔ نقاط $B$ و $A$ از این خط همان ارتفاع ذوزنقه است که با استفاده از مساحت به دست می‌آید. $\frac{۱}{۲}(۵+۷)\times h = ۲۴ \Rightarrow h = ۴$

کافیست کم‌ترین مقدار $AM_۱ + BM_۲$ را تعیین کنیم:




کم‌ترین مقدار برای $AM_۱ + BM_۲$

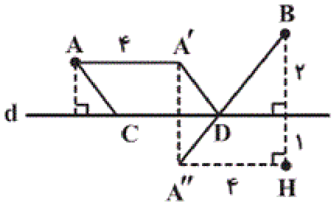
$$= AM_۱ + M_۱B' = A'M_۱ + M_۱B' = A'B' = \sqrt{۲^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۶۸} = ۲\sqrt{۱۷}$$

$\Rightarrow$ کمترین محیط ذوزنقه $= ۵ + ۷ + ۲\sqrt{۱۷} = ۱۲ + ۲\sqrt{۱۷}$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱    ۲    ۳    ۴✓

**۱۴۴-** *(محمد خندان)*



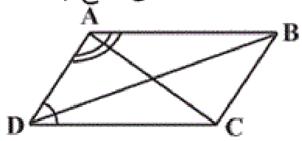

نقطهٔ A را تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ موازی خط d (به سمت راست) و به طول ۴ بر نقطهٔ A' تصویر می‌کنیم. قرینهٔ A' را نسبت به خط d، نقطهٔ A'' و نقطهٔ تلاقی خط d و پاره خط A''B را نقطهٔ D می‌نامیم. سپس CD را به طول ۴ روی خط d جدا می‌کنیم. مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. داریم:

$$A''B^{۲} = BH^{۲} + A''H^{۲} = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow A''B = ۵ \Rightarrow A''D + BD = ۵$$

$$\xrightarrow[\text{طولپایی بازتاب}]{A'D = A''D} A'D + BD = ۵$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۱۴۵-** *(علی فتح‌آبادی)*




دو زاویهٔ A و D مکمل یکدیگرند، پس:

$$\hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{A} = \sin\hat{D}$$

$$\text{قضیهٔ سینوس‌ها}: \begin{cases} \overset{\Delta}{ABD}: \dfrac{BD}{\sin\hat{A}} = ۲R \Rightarrow R = \dfrac{BD}{۲\sin\hat{A}} \\ \overset{\Delta}{ACD}: \dfrac{AC}{\sin\hat{D}} = ۲R' \Rightarrow R' = \dfrac{AC}{۲\sin\hat{D}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{BD}{AC}$$

*(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

–۱۴۶ (علی فتح‌آبادی)

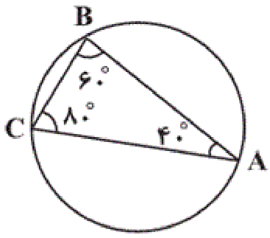
با توجه بـه رابطـهٔ $\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}}{۴}$ مـی‌تـوان انـدازهٔ زاویـه‌هـای مثلـث را مشخص کرد.

$$\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}}{۴}=K \Rightarrow \hat{A}=۲K \ , \ \hat{B}=۳K \ , \ \hat{C}=۴K$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲K+۳K+۴K=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow K=۲۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=۴۰^\circ \\ \hat{B}=۶۰^\circ \\ \hat{C}=۸۰^\circ \end{cases}$$

حال با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی ایـن مثلـث را به دست می‌آوریم:




$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=۲R$$

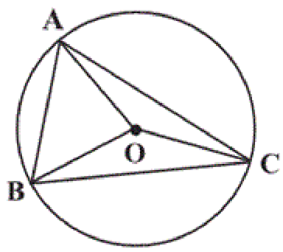
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{\sin۶۰^\circ}=۲R \Rightarrow R=۱$$

(هندسه ۲– روابط طولی در مثلث– صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

–۱۴۷ (امیرحسین ابومحبوب)

مطابق شکل $\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۶۵^\circ+۷۰^\circ)=۴۵^\circ$ است. با استفاده از قضیـهٔ سینوس‌ها، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را به دست می‌آوریم:



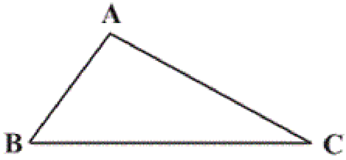

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=۲R \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{\sin۴۵^\circ}=۲R$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲R \Rightarrow R=۱$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۱۴۸-** *(فرشاد فرامرزی)*

**با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها داریم:**




$$\begin{cases} \dfrac{AC}{\sin\hat{B}} = 2R \Rightarrow \dfrac{R}{\sin\hat{B}} = 2R \Rightarrow \sin\hat{B} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 30^\circ \\ \hat{B} = 150^\circ \end{cases} \\ \dfrac{AB}{\sin\hat{C}} = 2R \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}R}{\sin\hat{C}} = 2R \Rightarrow \sin\hat{C} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 60^\circ \\ \hat{C} = 120^\circ \end{cases} \end{cases}$$

**چون مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است، دو جواب قابل قبول داریم:**

**جواب اول:** $\hat{B} = 30^\circ$ **و** $\hat{C} = 60^\circ$ **است که** $\hat{A} = 90^\circ$ **می‌شود.**

**جواب دوم:** $\hat{B} = 30^\circ$ **و** $\hat{C} = 120^\circ$ **است که** $\hat{A} = 30^\circ$ **می‌شود.**

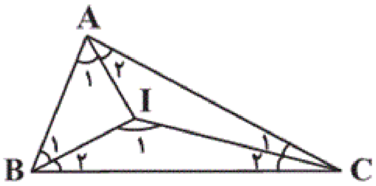
*(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)*

✓۱ ۲ ۳ ۴

---

**۱۴۹-** *(امیرهوشنگ خمسه)*

**در شکل مقابل داریم:**




$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \\ B\hat{I}C + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\hat{A}}{2} + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 90^\circ \\ B\hat{I}C + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow B\hat{I}C = 90^\circ + \dfrac{\hat{A}}{2}$$

**حال با توجه به رابطهٔ** $IB \,.\, IC = IA \,.\, BC$ **داریم:**

$$\frac{IC}{BC} = \frac{IA}{IB} \xrightarrow{\text{قضیهٔ سینوس‌ها}} \frac{\sin\hat{B}_2}{\sin\hat{I}_1} = \frac{\sin\hat{B}_1}{\sin\hat{A}_1}$$

$$\xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}_2} \sin\hat{I}_1 = \sin\hat{A}_1 \Rightarrow \sin(90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}) = \sin\frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\hat{A}}{2} = \sin\frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

*(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)*

۱ ۲ ✓۳ ۴

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABD}: \dfrac{BD}{\sin \hat{A}_1} = \dfrac{AB}{\sin \hat{D}_1} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin \hat{A}_1} = \dfrac{3}{\sin \hat{D}_1} \\ \overset{\Delta}{ACD}: \dfrac{CD}{\sin \hat{A}_2} = \dfrac{AC}{\sin \hat{D}_2} \Rightarrow \dfrac{3}{\sin \hat{A}_2} = \dfrac{4}{\sin \hat{D}_2} \end{cases}$$

چون $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ مکمل یکدیگر هستند، پس مقدار $\sin\hat{D}_1$ و $\sin \hat{D}_2$ برابر است، پس:

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \Rightarrow \sin\hat{D}_1 = \sin \hat{D}_2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\sin\hat{A}_1 = \frac{4}{3}\sin \hat{A}_2 \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \frac{8}{9}\sin \hat{A}_2 \qquad (*)$$

مثلث $ABC$ قائم‌الزاویه است ($BC^2 = AB^2 + AC^2$)، پس دو زاویهٔ $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ متمم یکدیگر هستند، بنابراین:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow \sin \hat{A}_2 = \cos \hat{A}_1$$

$$\xrightarrow{(*)} \sin \hat{A}_1 = \frac{8}{9}\cos \hat{A}_1 \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}_1}{\cos \hat{A}_1} = \frac{8}{9} \Rightarrow \tan \hat{A}_1 = \frac{8}{9}$$

دقت داشته باشید که بدون استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها نیز می‌توان به مطلوب مسأله دست یافت. کافیست از نقطهٔ $D$ به ضلع $AB$ عمود کرده و از تالس و سپس روابط مثلثاتی کمک بگیرید.

*(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)*

۱ | ۲ | ۳✓ | ۴

**۱۶۱-** *(امیرهوشنگ خمسه)*

$$123 = \frac{\sum x_i}{27} \Rightarrow \sum x_i = 3321$$

واضح است که $165 - 111 = 54$ واحد جمع داده‌ها را کم محاسبه کرده‌ایم. لذا جمع واقعی داده‌ها $3321 + 54 = 3375$ است. در نتیجه میانگین واقعی $\bar{x} = 123 + \dfrac{165-111}{27}$ یا همان ۱۲۵ است.

*(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)*

۱ | ۲ | ۳ | ۴✓

**۱۶۲-** (سهیل حسن‌خان‌پور)

مجموع معدل دانش‌آموزان قبل از اضافه کردن نمره به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۱۶/۸ = \frac{\text{مجموع معدل دانش‌آموزان}}{۳ \times ۳۰} \Rightarrow \text{مجموع معدل دانش‌آموزان} = ۱۵۱۲$$

مجموع معدل دانش‌آموزان در حالت دوم

$$= ۱۵۱۲ + ۳۰ \times ۰/۴ + ۳۰ \times ۰/۲ = ۱۵۱۲ + ۱۲ + ۶ = ۱۵۳۰$$

$$\text{میانگین معدل دانش‌آموزان در حالت دوم} = \frac{۱۵۳۰}{۳۰ \times ۳} = ۱۷$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

---

**۱۶۳-** (فرشاد فرامرزی)

هر دادهٔ معلوم تنها یک بار تکرار شده است؛ پس x باید با یکی از داده‌ها برابر باشد تا به عنوان مد در نظر گرفته شود، از طرفی مد با میانگین برابر است:

$$x = \frac{۵۵ + x + ۶۰ + ۱۵ + ۴۵ + ۵۰}{۶} \Rightarrow ۶x = x + ۲۲۵$$

$$\Rightarrow ۵x = ۲۲۵ \Rightarrow x = ۴۵$$

داده‌ها را مرتب می‌کنیم: ۱۵ , ۴۵ , ۴۵ , ۵۰ , ۵۵ , ۶۰

$$Q_۲ = \frac{۴۵ + ۵۰}{۲} = ۴۷/۵$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

---

**۱۶۴-** (سهیل حسن‌خان‌پور)

$$\text{مجموع ۸ دادهٔ اولیه} = ۸ \times \alpha = ۸\alpha \xrightarrow[\text{۱۸ , ۱۴ , ۱۲}]{\text{حذف داده‌های}}$$

$$\text{مجموع ۵ داده} = ۸\alpha - (۱۸ + ۱۴ + ۱۲) = ۸\alpha - ۴۴ \xrightarrow{\text{۲ برابر کردن ۵ داده}}$$

$$\text{مجموع ۵ داده در حالت جدید} = (۸\alpha - ۴۴) \times ۲ = ۱۶\alpha - ۸۸$$

$$\Rightarrow \text{میانگین ۵ داده در حالت جدید} = \frac{۱۶\alpha - ۸۸}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶\alpha - ۸۸}{۵} = \alpha + ۱۱ \Rightarrow ۱۶\alpha - ۸۸ = ۵\alpha + ۵۵$$

$$\Rightarrow ۱۱\alpha = ۱۴۳ \Rightarrow \alpha = ۱۳$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۶۵- *(امین کریمی)*

در تفسیر و تحلیل مسائل آماری، در نظر گرفتن تنها یک شاخص گرایش به مرکز کافی نیست. می‌بایست هر سه معیار میانگین، میانه و مد محاسبه شود و براساس هدف مورد بررسی، معیار مناسب انتخاب و برای انجام تفسیر، قضاوت و پیش‌بینی مورد استفاده قرار گیرد. *(آمار و احتمال- صفحهٔ ۸۹)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$۷ = \frac{۴x+۵+۷+۹}{۷} \Rightarrow ۴۹ = ۴x+۲۱ \Rightarrow ۴x = ۲۸ \Rightarrow x = ۷$$

بنابراین داده‌ها به صورت ۹، ۷ ، ۷ ، ۷ ، ۷ ، ۷ ، ۵ هستند. واریانس این داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{(۵-۷)^۲ + ۵(۷-۷)^۲ + (۹-۷)^۲}{۷} = \frac{۸}{۷} \simeq ۱/۱۴$$

*(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶ و ۹۳ تا ۹۵)*

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۶۷- *(حامد چوقادی)*

نکته: روش میانگین‌گیری سریع: در این روش عددی را به عنوان میانگین در نظر می‌گیریم، سپس اختلاف داده‌ها از این عدد را نوشته و میانگین آن‌ها را حساب می‌کنیم. میانگین اختلاف‌ها را با عددی که در ابتدا در نظر گرفتیم جمع می‌کنیم تا میانگین اصلی داده‌ها به دست آید. به عنوان مثال در داده‌های سوال فرض می‌کنیم ۲۶ میانگین داده‌هاست. بنابراین اختلاف داده‌ها از میانگین در نظر گرفته شده به صورت زیر است:

$$-۶, -۵, -۳, -۱, ۰, ۰, ۳, ۴$$

$$\Rightarrow \text{میانگین اختلاف‌ها}: \overline{\Delta x} = \frac{-۸}{۸} = -۱ \Rightarrow \bar{x} = ۲۶ + (-۱) = ۲۵$$

| $x_i$ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۳ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۶ | ۲۹ | ۳۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i - \bar{x}$ | −۵ | −۴ | −۲ | ۰ | ۱ | ۱ | ۴ | ۵ |
| $(x_i - \bar{x})^۲$ | ۲۵ | ۱۶ | ۴ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱۶ | ۲۵ |

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۸}(x_i - \bar{x})^۲}{۸} = \frac{۸۸}{۸} = ۱۱$$

*(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۱۶۸-** (امیرحسین ابومحبوب)

$$\sigma^2_{\text{اولیه}} = \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2}{20} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2 = 6\times 20 = 120$$

با توجه به آن‌که مجموع انحراف از میانگین برای این ۴ داده صفر است، میانگین داده‌ها با افزودن داده‌های جدید تغییر نمی‌کند.

$$\sigma^2_{\text{جدید}} = \frac{120+4^2+0^2+(-2)^2+(-2)^2}{24} = \frac{144}{24} = 6$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

**۱۶۹-** (محمد پوراحمدی)

میانگین و انحراف معیار داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{x} = 2(10)-3 = 17 \ , \quad \sigma = 2\times 3/4 = 6/8$$

بنابراین ضریب تغییرات داده‌های جدید برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{6/8}{17} = 0/4$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۳ تا ۹۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

**۱۷۰-** (امیرحسین ابومحبوب)

داده‌ها را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، داریم:

۱۷ ، ۲۳ ، ۲۸ ، ۳۲ ، ۴۵ ، ۵۰ ، ۵۴ ، ۵۹ ، ۶۱ ، ۶۴ ، ۷۴

تعداد داده‌ها برابر ۱۱ است، پس دادهٔ وسط یعنی ۵۰، میانهٔ داده‌ها است و در نتیجه داده‌های سوم و نهم به‌ترتیب چارک اول و سوم داده‌ها می‌باشند.

در نتیجه داده‌های داخل و روی جعبه عبارتند از:

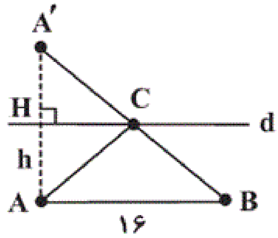
۲۸ ، ۳۲ ، ۴۵ ، ۵۰ ، ۵۴ ، ۵۹ ، ۶۱

میانگین این داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{28+32+45+50+54+59+61}{7} = \frac{329}{7} = 47$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴




$$S_{ABC} = \frac{AB \times h}{۲} \Rightarrow ۴۸ = \frac{۱۶ \times h}{۲} \Rightarrow h = ۶$$

پس رأس $C$ روی خطی به‌فاصلهٔ ۶ واحد از ضلع $AB$ قرار دارد.

چون مقدار $AB$ ثابت است و می‌خواهیم محیط $ABC$ کم‌ترین مقدار ممکن باشد، مسأله تبدیل می‌شود به پیدا کردن رأس $C$ روی خط $d$ به‌طوری که مقدار $AC+BC$ کم‌ترین باشد. با توجه به مسألهٔ اول هرون قرینهٔ $A$ را نسبت به $d$ پیدا می‌کنیم (نقطهٔ $A'$)، چون $AC = A'C$ بنابراین حداقل مقدار $AC+CB$ برابر است با:

$$AC + CB = A'C + BC = A'B$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'B$ داریم:

$$A'B = \sqrt{AA'^{۲} + AB^{۲}} = \sqrt{۱۲^{۲} + ۱۶^{۲}} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

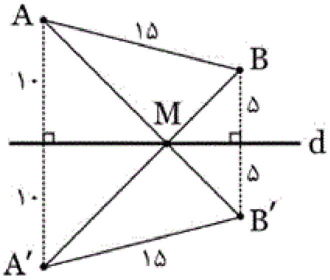
پس کم‌ترین محیط برابر است با: $۱۶ + ۲۰ = ۳۶$

*(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

 (کتاب آبی)

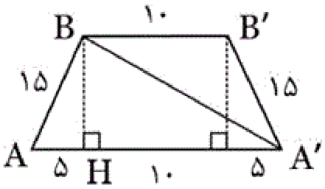
با توجه به مسألهٔ اول هرون، برای پیدا کردن طول حداقل مسیر $AM + MB$ ، قرینهٔ دو نقطهٔ $A$ و $B$ را نسبت به خط $d$ پیدا می‌کنیم.




چهارضلعی $ABB'A'$ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. با توجه به برابری $AM = A'M$ خواهیم داشت:

$$AM + MB = A'M + MB = A'B$$

بنابراین مسأله، تبدیل می‌شود به پیدا کردن قطر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که قاعده‌های آن ۱۰ و ۲۰ و ساق آن ۱۵ واحد است.




مطابق شکل در مثلث $ABH$ داریم:

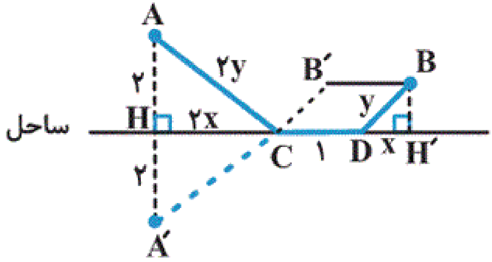
$$BH = \sqrt{AB^۲ - AH^۲} = \sqrt{۱۵^۲ - ۵^۲} = \sqrt{۲۰۰}$$

هم‌چنین در مثلث $A'BH$ داریم:

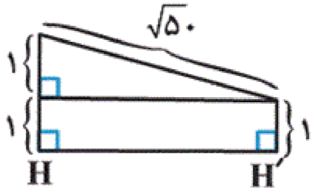
$$A'B = \sqrt{BH^۲ + A'H^۲} = \sqrt{۲۰۰ + ۲۲۵} = \sqrt{۴۲۵} = ۵\sqrt{۱۷}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱ | ۲ ✓ | ۳ | ۴




$CH = ۲DH'$ و $AC = ۲BD$




$HH'^{۲} + ۱ = ۵۰ \Rightarrow HH' = ۷$

$\Rightarrow ۲x + ۱ + x = ۷ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۴ + ۱۶} = ۲\sqrt{۵}$

$BD = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$

کوتاه‌ترین مسیر $ACDB$ : $۲\sqrt{۵} + ۱ + \sqrt{۵} = ۱ + ۳\sqrt{۵}$

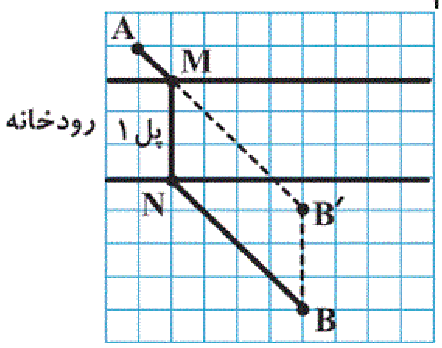
*(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)*

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

---

**۱۳۴-** *(کتاب آبی)*

چون می‌خواهیم از پلی عمود بر راستای رودخانه عبور کنیم، پس به ناچار یک مسیر عمودی به طول ۳ واحد داریم.




$B$ را ۳ واحد به بالا انتقال داده تا نقطهٔ $B'$ به دست بیاید. از نقطهٔ $A$ به $B'$ خطی رسم کرده و محل تلاقی این خط با راستای رودخانه را $M$ می‌نامیم و از $M$ به اندازهٔ سه واحد پایین آمده و نقطهٔ حاصل را $N$ می‌نامیم.

$AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است زیرا:

(چون $MNBB'$ متوازی‌الاضلاع است: $BN = MB'$ و $MN = BB'$)

طول مسیر $AMB'B$ = طول مسیر $AMNB$

۳+ طول مسیر $AB'$ = طول مسیر $AMB'B$

در حقیقت با انتقال دادن به اندازهٔ ۳ واحد مسأله را به کوتاه‌ترین مسیر ممکن بین $A$ و $B'$ تغییر دادیم.

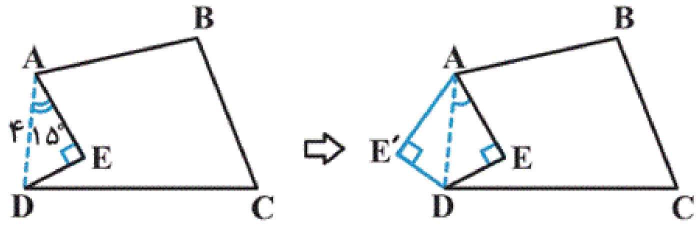
*(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)*

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

## ۱۳۵-

(کتاب آبی)

نقطهٔ E را نسبت به پاره‌خط AD بازتاب می‌دهیم. اختلاف مساحت شکل $ABCDE'$ با مساحت شکل ABCDE در مساحت چهارضلعی $AEDE'$ است. پس کافی است مساحت $AEDE'$ را بیابیم.




چهارضلعی $AEDE'$ از دو مثلث همنهشت AED و $AE'D$ تشکیل شده است. پس مساحت $AEDE'$ دو برابر مساحت مثلث AED است.

در مثلث قائم‌الزاویه ADE یک زاویه $15^\circ$ است.

۱    ۲✓    ۳    ۴

---

## ۱۳۶-

(کتاب آبی)

با توجه به مثلث رسم شده، $\hat{B} = 45^\circ$ می‌باشد، حال طبق قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{9}{\sin 120^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \rightarrow \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow x = 3\sqrt{6}$$

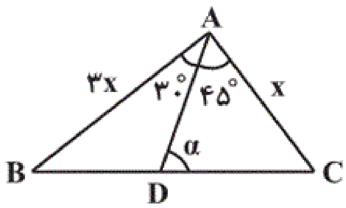
(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱    ۲    ۳✓    ۴

(کتاب آبی)

**۱۳۷-**

با توجه به فرض سؤال اندازه‌های اضلاع AB و AC را برابر ۳x و x در نظر می‌گیریم.




طبق قضیهٔ سینوس‌ها در دو مثلث ABD و ACD داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{۳x}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{BD}{\sin ۳۰^\circ}\\[2ex]\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{DC}{\sin ۴۵^\circ}\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}۳=\dfrac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۳۰^\circ}\times\dfrac{BD}{DC}$$

$$\Rightarrow \dfrac{BD}{DC}=۳\times\dfrac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\dfrac{۳}{\sqrt{۲}}=\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

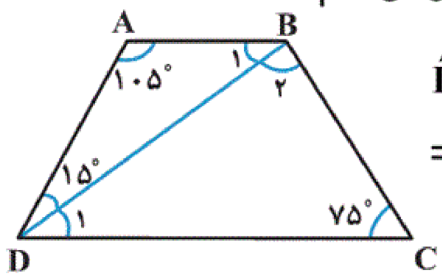
(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(کتاب آبی)

**۱۳۸-**

ابتدا اندازهٔ زوایای روی شکل را مشخص می‌کنیم.




$$\hat{D}_۱=\hat{B}_۱=۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۲=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ-۷۵^\circ=۴۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD}:\dfrac{AB}{\sin ۱۵^\circ}=\dfrac{BD}{\sin ۱۰۵^\circ}\\[2ex]\overset{\Delta}{BCD}:\dfrac{DC}{\sin ۴۵^\circ}=\dfrac{BD}{\sin ۷۵^\circ}\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{\sin ۷۵^\circ}{\sin ۱۰۵^\circ}\times\dfrac{\sin ۱۵^\circ}{\sin ۴۵^\circ}$$

چون دو زاویه $۷۵^\circ$ و $۱۰۵^\circ$ مکمل‌اند، پس sin آن‌ها مساوی است.

بنابراین داریم:

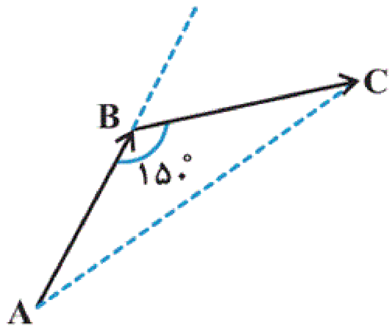
$$\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{\sin ۱۵^\circ}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۲}\sin ۱۵^\circ$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

**۱۳۹-** (کتاب آبی)

**ابتدا طول مسافت طی شده را در هر یک از دو مرحلهٔ حرکت محاسبه می‌کنیم.**




$$\overline{AB} = V_1 t_1 = 3/6 \times 5 = 18$$

$$\overline{BC} = V_2 t_2 = 2 \times 6 = 12$$

$$\overline{AC}^2 = (18)^2 + (12)^2 - 2(18)(12)\cos 150^\circ$$

$$= (6)^2[9 + 4 - 2 \times 3 \times 2 \times (\frac{-\sqrt{3}}{2})]$$

$$= (6)^2[13 + 6\sqrt{3}] \Rightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

**۱۴۰-** (کتاب آبی)

**اگر در مثلث $ABC$ رابطهٔ میانه‌ها را برای هر یک از میانه‌های $m_a$، $m_b$ و $m_c$ بنویسیم، خواهیم داشت:**

$$\left.\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ m_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \Rightarrow m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \\ m_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2} \Rightarrow m_c^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2a^2 - c^2) \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow (4)^2 + (5)^2 + (7)^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

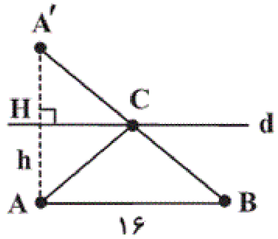
$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(90) = 120$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

**۱۵۱-** (کتاب آبی)

با توجه به مفروضات مسأله، ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع $AB$ را به‌دست می‌آوریم:




$$S_{ABC} = \frac{AB \times h}{۲} \Rightarrow ۴۸ = \frac{۱۶ \times h}{۲} \Rightarrow h = ۶$$

پس رأس $C$ روی خطی به‌فاصلهٔ ۶ واحد از ضلع $AB$ قرار دارد.

چون مقدار $AB$ ثابت است و می‌خواهیم محیط $ABC$ کم‌ترین مقدار ممکن باشد، مسأله تبدیل می‌شود به پیدا کردن رأس $C$ روی خط $d$ که مقدار $AC + BC$ کم‌ترین باشد. با توجه به مسألهٔ اول هرون قرینهٔ $A$ را نسبت به $d$ پیدا می‌کنیم (نقطهٔ $A'$)، چون $AC = A'C$ بنابراین حداقل مقدار $AC + CB$ برابر است با:

$$AC + CB = A'C + BC = A'B$$

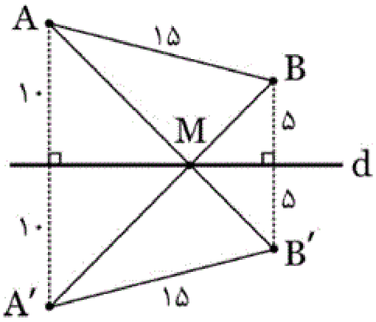
در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'B$ داریم:

$$A'B = \sqrt{AA'^۲ + AB^۲} = \sqrt{۱۲^۲ + ۱۶^۲} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

پس کم‌ترین محیط برابر است با: $۱۶ + ۲۰ = ۳۶$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

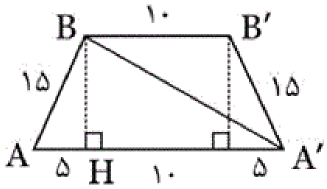
۱ ۲ ۳✓ ۴




چهارضلعی $ABB'A'$ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. با توجه به برابری $AM = A'M$ خواهیم داشت:

$$AM + MB = A'M + MB = A'B$$

بنابراین مسأله، تبدیل می‌شود به پیدا کردن قطر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که قاعده‌های آن ۱۰ و ۲۰ و ساق آن ۱۵ واحد است.




مطابق شکل در مثلث $ABH$ داریم:

$$BH = \sqrt{AB^{۲} - AH^{۲}} = \sqrt{۱۵^{۲} - ۵^{۲}} = \sqrt{۲۰۰}$$

هم‌چنین در مثلث $A'BH$ داریم:

$$A'B = \sqrt{BH^{۲} + A'H^{۲}} = \sqrt{۲۰۰ + ۲۲۵} = \sqrt{۴۲۵} = ۵\sqrt{۱۷}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

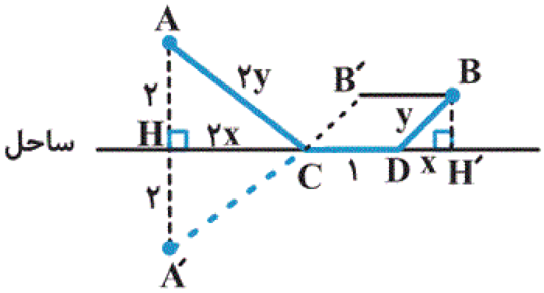
**۱۵۳-** (کتاب آبی)

چون قرار است یک کیلومتر از مسیر را در ساحل بسازیم، پس نقطهٔ $B$ را به‌اندازهٔ یک کیلومتر به سمت چپ انتقال می‌دهیم و آن‌را $B'$ می‌نامیم.

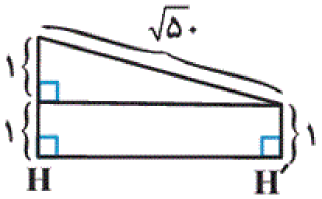
نقطهٔ $A$ را نسبت به ساحل بازتاب داده تا نقطهٔ $A'$ حاصل شود.

محل تلاقی $A'B'$ با خط ساحل را نقطهٔ $C$ می‌نامیم، مطابق شکل داریم:

(دو مثلث $AHC$ و $BH'D$ متشابه‌اند.)




$CH = ۲DH'$ و $AC = ۲BD$




$HH'^{۲} + ۱ = ۵۰ \Rightarrow HH' = ۷$

$\Rightarrow ۲x + ۱ + x = ۷ \Rightarrow x = ۲$

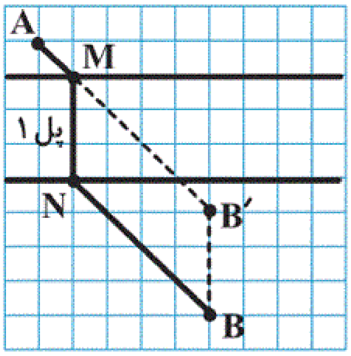
$\Rightarrow AC = \sqrt{۴ + ۱۶} = ۲\sqrt{۵}$ و $BD = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$

$ACDB$ کوتاه‌ترین مسیر: $۲\sqrt{۵} + ۱ + \sqrt{۵} = ۱ + ۳\sqrt{۵}$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

✓ $\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

چون می‌خواهیم از پلی عمود بر راستای رودخانه عبور کنیم، پس به ناچار یک مسیر عمودی به طول ۳ واحد داریم.




B را ۳ واحد به بالا انتقال داده تا نقطهٔ B′ به دست بیاید. از نقطهٔ A به B′ خطی رسم کرده و محل تلاقی این خط با راستای رودخانه را M می‌نامیم و از M به اندازهٔ سه واحد پایین آمده و نقطهٔ حاصل را N می‌نامیم.

AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است زیرا:

(چون $MNBB'$ متوازی‌الاضلاع است: $BN = MB'$ و $MN = BB'$)

طول مسیر $AMB'B$ = طول مسیر $AMNB$

۳+ طول مسیر $AB'$ = طول مسیر $AMB'B$

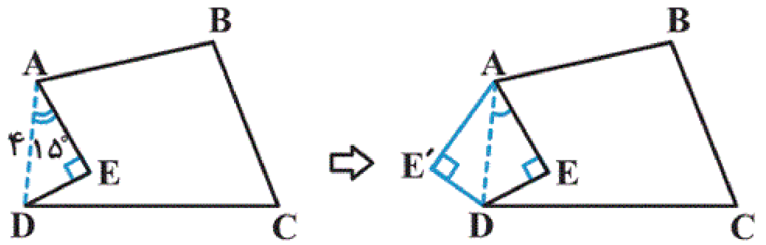
در حقیقت با انتقال دادن به اندازهٔ ۳ واحد مسأله را به کوتاه‌ترین مسیر ممکن بین A و B′ تغییر دادیم.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱ ✓    ۲    ۳    ۴

(کتاب آبی)

نقطهٔ $E$ را نسبت به پاره‌خط $AD$ بازتاب می‌دهیم. اختلاف مساحت شکل $ABCDE'$ با مساحت شکل $ABCDE$ در مساحت چهارضلعی $AEDE'$ است. پس کافی است مساحت $AEDE'$ را بیابیم.

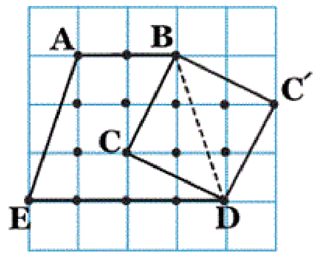



چهارضلعی $AEDE'$ از دو مثلث همنهشت $AED$ و $AE'D$ تشکیل شده است. پس مساحت $AEDE'$ دو برابر مساحت مثلث $AED$ است.

در مثلث قائم‌الزاویه $ADE$ یک زاویه $۱۵^\circ$ است، طبق کتاب درسی هندسه دهم ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است. پس مساحت این مثلث $\frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{۴}{۴} = ۲$ و مساحت $AEDE'$ برابر ۴ است.

(هندسه ۲– تبدیل‌های هندسی و کاربردها– صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴ و ۵۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴




برای محاسبهٔ مساحت $ABC'DE$ از قضیهٔ پیک استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ پیک: مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای که دارای $b$ نقطهٔ مرزی و $i$ نقطهٔ درونی است، عبارت است از: $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$

که مطابق شکل $b = ۹$ و $i = ۸$ است.

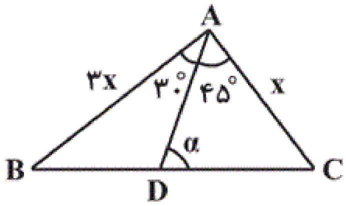
$$S_{ABC'DE} = \frac{۹}{۲} + ۸ - ۱ = ۱۱/۵$$

(هندسه ۲– تبدیل‌های هندسی و کاربردها– صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴ و ۵۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

**۱۵۷–** (کتاب آبی)

با توجه به فرض سؤال اندازه‌های اضلاع AB و AC را برابر ۳x و x در نظر می‌گیریم.




طبق قضیهٔ سینوس‌ها در دو مثلث ABD و ACD داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{۳x}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{BD}{\sin ۳۰^\circ} \\ \dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{DC}{\sin ۴۵^\circ} \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} ۳=\dfrac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۳۰^\circ}\times\dfrac{BD}{DC}$$

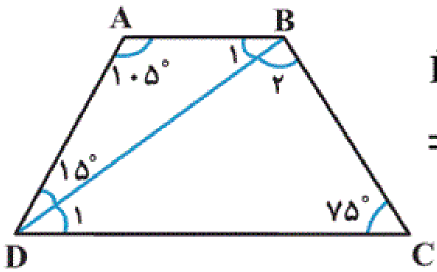
$$\Rightarrow \dfrac{BD}{DC}=۳\times\dfrac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\dfrac{۳}{\sqrt{۲}}=\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

(هندسه ۲– روابط طولی در مثلث– صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱    ۲✓    ۳    ۴

**۱۵۸–** (کتاب آبی)

ابتدا اندازهٔ زوایای روی شکل را مشخص می‌کنیم.




$$\hat{D}_۱=\hat{B}_۱=۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۲=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ-۷۵^\circ=۴۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}:\dfrac{AB}{\sin ۱۵^\circ}=\dfrac{BD}{\sin ۱۰۵^\circ} \\ \overset{\Delta}{BCD}:\dfrac{DC}{\sin ۴۵^\circ}=\dfrac{BD}{\sin ۷۵^\circ} \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \dfrac{AB}{DC}=\dfrac{\sin ۷۵^\circ}{\sin ۱۰۵^\circ}\times\dfrac{\sin ۱۵^\circ}{\sin ۴۵^\circ}$$

۱    ۲    ۳✓    ۴

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۱۸}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۳}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}=۳۰^\circ & \text{ق ق}\\ \hat{C}=۱۵۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=۴۵^\circ+۳۰^\circ=۷۵^\circ$$

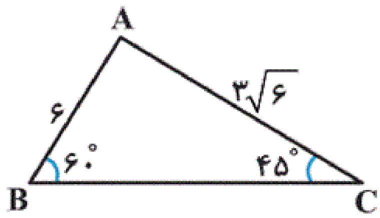
(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

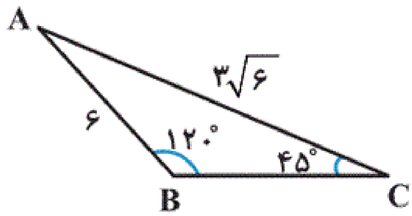
۱ ۲ ۳✓ ۴

بنابر قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\frac{۳\sqrt{۶}}{\sin\hat{B}}=\frac{۶}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

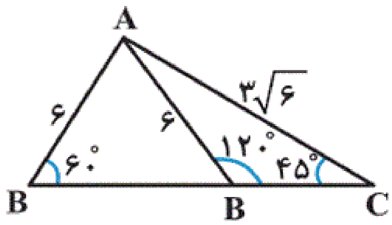
پس زاویهٔ B یا برابر ۶۰ درجه است یا ۱۲۰ درجه. بنابراین مثلث ABC به‌صورت یکی از دو حالت زیر است:




اختلاف محیط‌های دو مثلث فوق، برابر اختلاف ضلع BC در دو حالت است.

اگر این دو مثلث را در زاویهٔ C بر هم منطبق کنیم، مطابق شکل یک مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌شود که اختلاف ضلع BC در دو حالت برابر اندازهٔ ضلع این مثلث است که برابر ۶ می‌باشد.




(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴