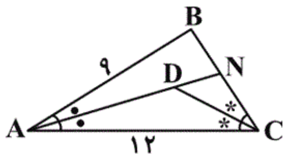
## هندسه ۲ - ۱۰ سوال -

۱۳۱- سه پاره‌خط به طول‌های $۶x-۱$، $۳x-۲$ و $۲x+۲$ اضلاع یک مثلث هستند. اگر $x_۱ < x < x_۲$ باشد، بیش‌ترین مقدار $x_۲ - x_۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۵}$
۲) $\frac{۴۶}{۳۵}$
۳) $\frac{۲}{۷}$
۴) $\frac{۳۶}{۳۵}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۲- در شکل مقابل، AN و CD نیمساز زوایای داخلی مثلث ABC هستند. اگر $AD = ۳DN$ باشد، طول BC کدام است؟




۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

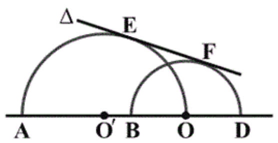
آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۳- از نقطه‌ای به فاصلهٔ ۳ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵، وتری با کوتاه‌ترین طول ممکن رسم می‌کنیم. اگر این وتر، یک ضلع مستطیل محاط در دایره باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۲۴
۲) $۱۶\sqrt{۳}$
۳) ۴۸
۴) $۲۴\sqrt{۲}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۴- در شکل مقابل، خط $\Delta$ در نقاط E و F بر دو نیم دایره مماس است. اگر O و $O'$، مراکز دو نیم دایره و $AB = BD = ۴$ باشد، طول EF کدام است؟




۱) $\sqrt{۵}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۵- نقطهٔ $A'$ دوران یافتهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ با زاویهٔ $۹۰^\circ$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ است. اگر $A'$ مجانس A باشد، مرکز تجانس کدام نقطه می‌تواند باشد؟

۱) $(۰,\frac{۵}{۳})$
۲) $(۰,۵)$
۳) $(\frac{۲}{۳},۰)$
۴) $(۲,۰)$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۶- تصویر خط D به معادلهٔ $۲x-۳y=۶$، تحت تبدیل $T(x,y)=(y-۲\,,\,۲x-۱)$، از نقطه‌ای به کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۲\,,\,۲)$
۲) $(۱\,,\,۷)$
۳) $(-۲\,,\,۵)$
۴) $(-۱\,,\,۶)$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۷- سه خط متمایز $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ در نقطهٔ A یکدیگر را قطع می‌کنند. چند صفحه وجود دارد که شامل این سه خط باشد؟

۱) چنین صفحه‌ای وجود ندارد.
۲) بی‌شمار
۳) دقیقاً یک
۴) حداکثر یک

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۸- در فضا اگر ...... یکی از ...... را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.

۱) خطی/ دو خط موازی
۲) صفحه‌ای/ دو صفحهٔ متقاطع
۳) خطی/ دو خط متقاطع
۴) صفحه‌ای/ دو خط موازی

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۹- دو خط متنافر $L$ و $L'$ مفروض‌اند. از نقطهٔ $A$ روی خط $L$، خط $\Delta$ را موازی $L'$ رسم می‌کنیم. صفحهٔ شامل خطوط $L$ و $\Delta$ نسبت به خط $L'$ کدام وضع را دارد؟

۱) خط $L'$ موازی با صفحه و خارج آن قرار دارد.
۲) متقاطع
۳) خط $L'$ به تمامی درون این صفحه قرار دارد.
۴) بسته به شرایط می‌تواند متقاطع یا موازی باشد.

آزمون ۳۰ فروردین

۱۴۰- خط $d$ موازی صفحهٔ $P$ است، اما خط $d'$ با صفحهٔ $P$ موازی نمی‌باشد. چند خط در فضا وجود دارد که با صفحهٔ $P$ موازی بوده و دو خط $d$ و $d'$ را قطع کند؟

۱) یک
۲) دو
۳) بی شمار
۴) هیچ

آزمون ۳۰ فروردین

## دیفرانسیل و انتگرال - ۱۰ سوال

۸۱- کدام گزینه در مورد تابع $y = x^{2}e^{-x^{2}}$ صحیح است؟

۱) دارای دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.
۲) دارای یک مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.
۳) دارای یک مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.
۴) دارای دو مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

آزمون ۳۰ فروردین

۸۲- جهت تقعر نمودار تابع $f(x) = Ln(1 - Lnx)$ تنها در بازهٔ $(a,b)$ رو به پایین است، بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $e - 1$
۲) $1$
۳) $e$
۴) $+\infty$

آزمون ۳۰ فروردین

۸۳- اگر نقطهٔ $A(2,-1)$ ماکزیمم نسبی تابع $y = \dfrac{ax+b}{x^{2} - 5x + 4}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) $-2$
۲) $-1$
۳) صفر
۴) $1$

آزمون ۳۰ فروردین

۸۴- تابع $f(x) = 5\cos 3x - k\cos 5x$ در $x = \pi$ مینیمم نسبی دارد. مقدار $k$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

آزمون ۳۰ فروردین

۸۵- نقطهٔ عطف تابع $y = e^{(\tan^{-1} x)}$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

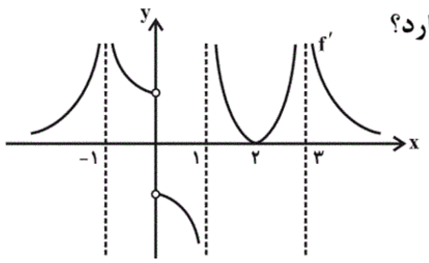
آزمون ۳۰ فروردین

۸۶- نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ برای تابع $y=\frac{e^x-\sin x}{e^x+\sin x}$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) مینیمم نسبی ۳) عطف ۴) عادی

آزمون ۳۰ فروردین

۸۷- اگر نمودار تابع $f'$ به‌صورت زیر باشد، تابع پیوستهٔ $f$ چند ماکزیمم و مینیمم موضعی دارد؟




۱) بدون Max ـ دو Min

۲) یک Max ـ بدون Min

۳) یک Max ـ یک Min

۴) یک Max ـ دو Min

آزمون ۳۰ فروردین

۸۸- اگر آهنگ متوسط تغییر $f(x)=\sqrt{\frac{\sin x}{1-\cos x}}$ در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۲},\pi\right]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای $f$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ باشد، $k$ کدام است؟ ($\frac{k\sqrt{۲}}{\pi}$)

۱) $-۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

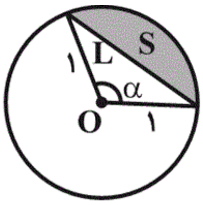
آزمون ۳۰ فروردین

۸۹- ذره‌ای روی مسیر $y^۴+۴=۵xy^۴$ در حرکت است. وقتی ذره در نقطه‌ای به عرض $y=۱$ قرار دارد، نسبت سرعت مؤلفهٔ $x$ آن به سرعت مؤلفهٔ $y$ آن کدام است؟

۱) $\frac{۲۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۲۴}{۵}$ ۳) $-\frac{۱۶}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۱۶}$

آزمون ۳۰ فروردین

۹۰- در شکل زیر، آهنگ تغییرات مساحت ناحیهٔ هاشورخورده نسبت به $L$ کدام است؟




۱) $\frac{L^۳}{\sqrt{۴-(۲-L^۲)^۲}}$ ۲) $\frac{۲L}{\sqrt{۴-L^۲}}$ ۳) $\frac{L^۲}{۲\sqrt{۴-L^۲}}$ ۴) $\frac{L^۳}{\sqrt{۴-L^۲}}$

آزمون ۳۰ فروردین

## هندسه‌ی تحلیلی - ۱۰ سوال -

۱۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ماتریس $A^{-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۲- اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه، متقارن و وارون‌پذیر باشند، آنگاه ماتریس $B^t(BAB^{-1})^t(B^{-1}A^{-1})$ همواره برابر کدام است؟

۱) $I$

۲) $AB$

۳) $B^{-1}A^{-1}$

۴) $B^2$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۳- اگر $A$ یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۳ و $|A^*| = 4|A| - 4$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $\left|\frac{1}{2}A\right|$ کدام است؟ ($A^*$ ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های ماتریس $A$ است.)

۱) $\frac{1}{6}$

۲) $\frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{2}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۴- اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه و $(AB)^2 - AB = I$ باشد، حاصل $(AB - I)^{-1}$ همواره برابر کدام است؟

۱) $BA$

۲) $B$

۳) $A$

۴) $AB$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه ماتریس $(P^{-1}AP)^9$ کدام است؟

۱) $-I$

۲) $-A$

۳) $I$

۴) $A$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۶- اگر $A$ ماتریسی وارون‌پذیر از مرتبهٔ ۳ باشد، ماتریس $A^*$ (ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های $A$) کدام یک از ماتریس‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۷- اگر $A^2=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $B^2=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۵ & -۸ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۸- اگر $A$ یک ماتریس متقارن وارون‌پذیر و $A^3=A$ باشد، ماتریس $(AA^t-A^{-1})(A+A^{-1})^t$ همواره برابر کدام ماتریس است؟ ($O$ ماتریس صفر است.)

۱) $O$

۲) $۲(A-I)$

۳) $۲(I-A)$

۴) $I$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۹- اگر $A^3=I$ باشد، حاصل $A(A+I)^{-1}$ همواره برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(A^2-A+I)$

۲) $\frac{۱}{۲}(A^2+A+I)$

۳) $\frac{۱}{۲}(-A^2+A+I)$

۴) $\frac{۱}{۲}(A^2+A-I)$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۰ & \frac{۲}{۳} & -۱ \end{bmatrix}$ و $AA^*=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $a+b+c$ کدام است؟ ($A^*$ ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های $A$ است.)

۱) ۸-

۲) ۴-

۳) ۶-

۴) ۸

آزمون ۳۰ فروردین

## ریاضیات گسسته - ۱۰ سوال

۱۲۱- فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی از سه پیشامد سادهٔ a ، b و c تشکیل شده است. اگر $P(a)=۲P(b)$ و $P(c)=\frac{۱}{۲}P(\{a,b\})$ ، احتمال وقوع پیشامد $\{a,c\}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۹}$
۴) $\frac{۵}{۹}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۲- کیسه‌ای شامل ۲ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی است. از این کیسه سه مهره به تصادف و به‌طور متوالی و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که یکی از آنها آبی و دوتای دیگر قرمز باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۳- در خانواده‌ای با ۴ فرزند، احتمال این که فرزند دختر وجود نداشته باشد یا تعداد دخترها از پسرها بیش‌تر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۱۱}{۱۶}$
۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۴- تعداد مهره‌های آبی و قرمز در یک کیسه، دو عدد متوالی هستند. اگر دو مهره همزمان از این کیسه خارج کنیم، احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره برابر $\frac{۲}{۵}$ است. تعداد مهره‌های داخل کیسه کدام است؟

۱) ۵
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۱

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۵- دو ماشین آسفالت هر کدام در طول یک ماه بین ۱۰ تا ۳۰ کیلومتر آسفالت ریزی می‌کنند. احتمال آن که در یک ماه اختلاف طول آسفالت‌ریزی شده توسط دو ماشین بیش از ۵ کیلومتر باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۱۶}$
۲) $\frac{۵}{۱۶}$
۳) $\frac{۱۱}{۱۶}$
۴) $\frac{۹}{۱۶}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۶- اگر $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ باشد، $P(A\cup B')$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{6}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۷- $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ با احتمال غیرصفر هستند. اگر $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(A|B)=2P(B|A)=\frac{2}{3}$، آنگاه $P(A\cup B)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{5}{18}$
۲) $\frac{6}{18}$
۳) $\frac{7}{18}$
۴) $\frac{8}{18}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۸- در پرتاب دو تاس با هم، اگر اختلاف ارقام رو شده حداکثر برابر ۳ باشد، با کدام احتمال هر دو رقم ظاهر شده زوج هستند؟

۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{7}{30}$
۳) $\frac{4}{15}$
۴) $\frac{3}{10}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۹- اگر برای دو پیشامد مستقل $A$ و $B$، $P(B)=\frac{12}{25}$ و $P(A\cup B)=\frac{17}{25}$ باشد، $P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{65}$
۲) $\frac{1}{5}$
۳) $\frac{14}{65}$
۴) $\frac{3}{13}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۰- احتمال قبولی مریم در کنکور ۰/۲ و احتمال قبولی فاطمه در کنکور ۰/۴ می‌باشد. اگر پیشامدهای قبولی این دو نفر مستقل از یکدیگر باشد، آنگاه احتمال آن‌که فقط یکی از آن دو در کنکور قبول شوند، کدام است؟

۱) ۰/۵۲
۲) ۰/۴۸
۳) ۰/۴۴
۴) ۰/۴۲

## رياضي پايه - ۲۰ سوال -

۹۱- کدام رابطه تابع نیست؟

۱) $۲y-|y|=x$
۲) $۲y+|y|=x$
۳) $y-\sqrt{y}=\sqrt{x}$
۴) $y+\sqrt{y}=\sqrt{x}$

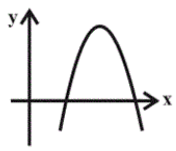
آزمون ۳۰ فروردین

۹۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x^۲-x)^۲+۲x^۲-۲x-۳=۰$ کدام است؟

۱) $-۲$
۲) ۲
۳) ۱
۴) $-۱$

آزمون ۳۰ فروردین

۹۳- اگر نمودار تابع $y=ax^۲+bx+\frac{۱}{a}$ به‌صورت زیر باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر قطعاً درست خواهد بود؟




۱) $a>۲$
۲) $a<-۲$
۳) $b>۲$
۴) $b<-۲$

آزمون ۳۰ فروردین

۹۴- معادلهٔ محور تقارن تابع $f(x)=(x-۱)^۲+(x-۲)^۲+...+(x-۱۰)^۲$ کدام است؟

۱) $x=\frac{۵۵}{۲}$
۲) $x=-\frac{۵۵}{۲}$
۳) $x=\frac{۱۱}{۲}$
۴) $x=-\frac{۱۱}{۲}$

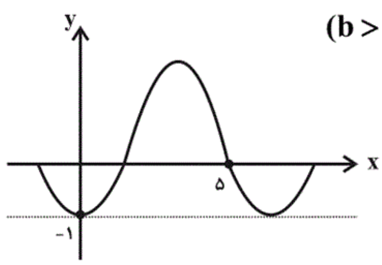
آزمون ۳۰ فروردین

۹۵- اگر تمام جواب‌های نامعادلهٔ $۳x^۲+۲|x|-۵<۰$، به صورت $a<x<b$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۵}{۶}$
۳) ۲
۴) ۱

آزمون ۳۰ فروردین

۹۶- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=۱+a\cos(b\pi x)$ می‌باشد. حاصل $a+b$ کدام است؟ $(b>۰)$




۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $-\frac{۵}{۳}$
۴) $-\frac{۲}{۳}$

آزمون ۳۰ فروردین

۹۷- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ده جملهٔ اول ۳۳ برابر مجموع پنج جملهٔ اول آن است. جملهٔ پنجم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۶۴

آزمون ۳۰ فروردین

۹۸- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P_1(x)$ بر $x^2-3x+5$ برابر $-2x-3$ و چندجمله‌ای $P_2(x)$ بر $x^2-3x+5$ برابر $4-2x$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P_1(x)P_2(x)$ بر $x^2-3x+5$ به ازای $x=3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

آزمون ۳۰ فروردین

۹۹- اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادلهٔ $4x^2-2x-1=0$ باشند، به ازای کدام مقدار $m$، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $4x^2-6x+m=0$ به صورت $\{\alpha+2\beta,\beta+2\alpha\}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۰- اگر معادلهٔ $\frac{ax+b}{x^2-9}=\frac{x+1}{x-3}+\frac{3-x}{x+3}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۹ ۴) صفر

آزمون ۳۰ فروردین

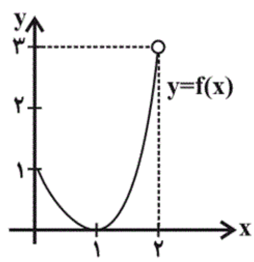
۱۰۱- اگر $\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}+\sqrt{x^2+x+2x\sqrt{x}}=x+1$ باشد، حدود $x$ کدام است؟

۱) $x\le 1$ ۲) $1\le x\le 3$

۳) $0\le x\le 1$ ۴) $0\le x\le 3$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۲- اگر نمودار تابع $f$ به‌صورت زیر باشد، برد تابع $y=3-2\sqrt{f^2(x)+16}$ کدام است؟




۱) $[3-4\sqrt{5},-5]$

۲) $[-7,-5)$

۳) $(-7,-5]$

۴) $(3-4\sqrt{5},-5]$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۳- تابع $f(x)=\begin{cases} |2x+1| & , \quad x \geq 3 \\ -x+h & , \quad 0 < x < 3 \\ -\sqrt{-x}-2 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است. بیش‌ترین مقدار $h$ برای این که تابع $f$ یک‌به‌یک باشد، کدام است؟

۱) $-2$ ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) ۱۰

آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۴- نمودارهای تابع خطی $f$ و تابع درجه دوم $g$، محور $y$ها را به ترتیب با عرض‌های ۲ و ۳ قطع می‌کنند. اگر $(fog)(x)=2x^2+x-1$ باشد، $(f-g)(x)$ کدام است؟

۱) $-2x^2-2x+1$ ۲) $x^2-2$ ۳) $x^2+x-1$ ۴) $2x^2-1$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۵- اگر $f=\{(1,\frac{1}{2}),(5,3),(3,5),(2,1)\}$ و $g(x)=2x^3+5x-2$ باشد، حاصل $(f^{-1}og^{-1})(5)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

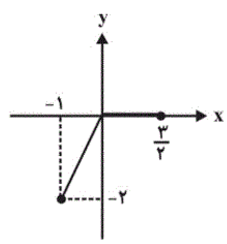
آزمون ۳۰ فروردین

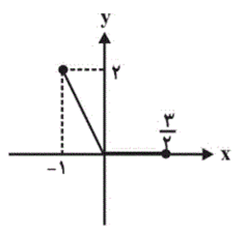
۱۰۶- تابع متناوب $f$ با دورهٔ تناوب ۴ در بازهٔ $[0,4)$ به‌صورت $f(x)=\sqrt{x+k}$ تعریف شده است. اگر $f(-7)=2$ باشد، مقدار $k$ کدام است؟

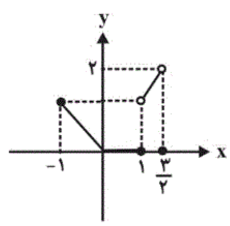
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۳

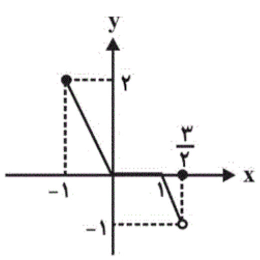
آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۷- نمودار تابع $f(x)=2x[\frac{x}{2}]$ در بازهٔ $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ کدام است؟( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱)


۲)


۳)


۴)


آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۸- معادلهٔ $m+x^{۲}-\cos x=۰$ فقط یک جواب دارد. $m$ کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۹- معادلهٔ $\sin^{۳}x+\cos^{۳}x=\cos x$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۰- حاصل عبارت $\sin^{-۱}(\cos ۵x\cos ۶x-\sin ۵x\sin ۶x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۸}$
۲) $\frac{۳\pi}{۸}$
۳) $-\frac{\pi}{۸}$
۴) $-\frac{۳\pi}{۸}$

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۳۱ (حسین حاجیلو)

شرط آن‌که a و b و c اندازه‌های سه ضلع یک مثلث باشند آن است که:

(با در نظر گرفتن $a=2x+2$، $b=3x-2$ و $c=6x-1$)

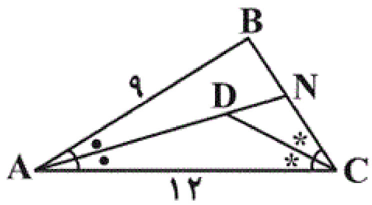
$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases},\begin{cases} a+b>c \Rightarrow (2x+2)+(3x-2)>6x-1 \Rightarrow x<1 \\ b+c>a \Rightarrow (3x-2)+(6x-1)>2x+2 \Rightarrow x>\frac{5}{7} \\ a+c>b \Rightarrow (2x+2)+(6x-1)>3x-2 \Rightarrow x>-\frac{3}{5} \end{cases}$$

از اشتراک سه نامعادلهٔ بالا داریم $\frac{5}{7}<x<1$ (توجه کنید که به‌ازای این مقادیر x، a، b و c مثبت هستند)، پس بیش‌ترین مقدار $x_2-x_1$ برابر است با $1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$.

(هندسه ۲- استدلال در هندسه: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(رضا عباسی اصل)




$AD = ۳DN \Rightarrow AD = ۳k, DN = k$

از B به D وصل می‌کنیم. می‌دانیم نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند، پس نیمساز زاویهٔ B از نقطه تلاقی نیمسازهای زاویه‌های A و C یعنی D می‌گذرد. پس BD نیمساز زاویهٔ B است. حال:

BD نیمساز زاویهٔ B است. $BD \Rightarrow \frac{AB}{BN} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow BN = ۳$

CD نیمساز زاویهٔ C است. $CD \Rightarrow \frac{AC}{CN} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow CN = ۴$

$BC = BN + CN = ۷$

(هندسه ۲- استدلال در هندسه: صفحه‌های ۱۳، ۱۴ و ۳۵)

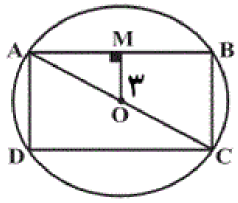
✓ ۱ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

(محمد خندان)

کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ M در دایره رسم می‌شود آن است که بر MO عمود باشد. طول این وتر برابر است با:

$$AB = ۲\sqrt{R^۲ - OM^۲} = ۲\sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۸$$




با استفاده از قضیهٔ تالس چون AC دو برابر AO است، طول ضلع BC نیز دو برابر طول MO است، پس $BC = ۶$.

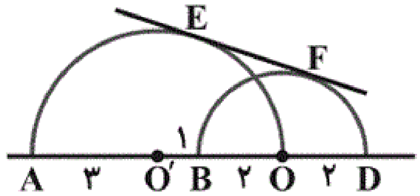
$$S_{ABCD} = ۸ \times ۶ = ۴۸$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۴- (رضا عباسی‌اصل)




مطابق شکل $BO = OD = ۲$ و داریم:

$$AO = ۴ + ۲ = ۶ \Rightarrow ۲R' = ۶ \Rightarrow R' = ۳$$

$$BD = ۴ \Rightarrow ۲R = ۴ \Rightarrow R = ۲$$

$$d = OO' = ۱ + ۲ = ۳$$

طول پاره خط $EF$، برابر طول مماس مشترک خارجی دو دایره است:

$$EF = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۹ - ۱} = ۲\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۳۰ فروردین

۱۳۵- (حسین حاجیلو)

طبق فرض، $A'$ دوران یافتهٔ $A(۱,۲)$ حول مبدأ مختصات، با زاویه $-۹۰^\circ$ است، پس $A'(۲,-۱)$. از طرفی اگر $A$ و $A'$ مجانس هم باشند، مرکز تجانس روی خط گذرنده از $A$ و $A'$ واقع است.

$$AA' : y - ۲ = \frac{-۱ - ۲}{۲ - ۱}(x - ۱) \Rightarrow AA' : y = -۳x + ۵$$

که در بین گزینه‌ها، تنها نقطهٔ $(۰,۵)$ روی این خط واقع است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

(مهرداد ملوندی)

$$(X , Y) = T(x , y) = (y - ۲ , ۲x - ۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = y - ۲ \Rightarrow y = X + ۲ \\ Y = ۲x - ۱ \Rightarrow x = \dfrac{Y + ۱}{۲} \end{cases}$$

$$۲x - ۳y = ۶ \Rightarrow ۲\left(\frac{Y + ۱}{۲}\right) - ۳(X + ۲) = ۶$$

$$\Rightarrow Y + ۱ - ۳X - ۶ = ۶ \Rightarrow Y - ۳X = ۱۱$$

**در بین نقاط داده شده، تنها نقطهٔ $(۵ , -۲)$ در معادلهٔ این خط صدق می‌کند.**

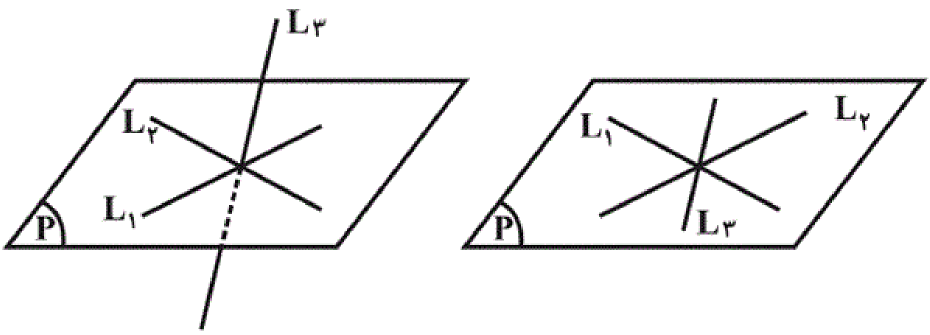
*(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

 (مجتبی حقیقت‌لاری)

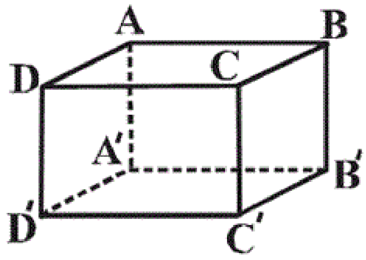
اگر خط $L_۳$، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را در نقطهٔ مشترک آنها یعنی در نقطهٔ $A$ قطع کند، در این صورت هر سه خط از یک نقطه می‌گذرند. در این حالت، خط $L_۳$ هم می‌تواند در صفحهٔ گذرنده از خطوط متقاطع $L_۱$ و $L_۲$ واقع شود و هم می‌تواند در داخل آن صفحه قرار نگیرد. بنابراین حداکثر یک صفحه شامل این سه خط وجود دارد.




(هندسه ۲- هندسهٔ فضایی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۳۰ فروردین



**(۱) $AB$ ، خط $BB'$ را قطع کرده ولی $CC'$ که موازی $BB'$ است را قطع نکرده است.**

**(۲) صفحهٔ $ABCD$ ، صفحهٔ $CBB'C'$ را قطع کرده ولی صفحهٔ $A'B'C'D'$ که با صفحهٔ $CBB'C'$ متقاطع است را قطع نمی‌کند و با آن موازی است.**

**(۳) $AB$ ، خط $BB'$ را قطع کرده ولی $B'C'$ که متقاطع با $BB'$ است را قطع نکرده است.**

*(هندسه ۲- هندسهٔ فضایی: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۳۹ *(نصیر محبی‌نژاد)*

**صفحهٔ شامل خطوط $L$ و $\Delta$ را $P$ می‌نامیم. چون خط $L'$ با خط $\Delta$ از صفحهٔ $P$ موازی است بنابراین $L'$ با صفحهٔ $P$ موازی خواهد بود. اما از آن‌جا که $L$ و $L'$ متنافرند، $L'$ روی این صفحه قرار ندارد.**

**قضیه: اگر خطی با یکی از خط‌های صفحه‌ای موازی باشد با آن صفحه موازی است.**

*(هندسه ۲- هندسهٔ فضایی: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۱)*

۱✓ ۲ ۳ ۴

-۱۴۰ *(محمدرضا دلاورنژاد)*

**صفحهٔ $Q$ را موازی صفحهٔ $P$ و شامل خط $d$ رسم می کنیم. فرض کنید خط $d'$، صفحهٔ $P$ را در نقطهٔ $A$ قطع نماید. اگر $A \notin d$، کلیه خطوط صفحهٔ $Q$ که نقطهٔ $A$ را به یکی از نقاط خط $d$ وصل می‌کنند، جواب مسئله‌اند و اگر $A \in d$، تمام خطوط گذرنده از $A$ در صفحهٔ $Q$ شرایط مورد نظر را دارند. بنابراین مسأله، بی‌شمار جواب دارد.**

*(هندسه ۲- هندسهٔ فضایی: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۸۱ (محمدمصطفی ابراهیمی)

$$y' = ۲xe^{-x^۲} + x^۲(-۲xe^{-x^۲}) = ۲xe^{-x^۲}(۱ - x^۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pm ۱$$

**مشتق را تعیین علامت می‌کنیم. می‌دانیم $e^{-x^۲}$ عبارتی همواره مثبت است،**

**پس:**

| $x$ | | $-۱$ | | $۰$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | $۰$ | $+$ | | $+$ |
| $۱-x^۲$ | $-$ | $۰$ | $+$ | | $+$ | $۰$ | $-$ |
| $y'$ | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

**تابع در نقاطی به طول $x = \pm ۱$ دارای ماکزیمم نسبی و در نقطه‌ای به طول $x = ۰$ دارای مینیمم نسبی است.**

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۱ تا ۱۹۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را تعیین می‌کنیم. اولاً $x>0$ است و ثانیاً باید $1-Lnx>0$ باشد. پس:

$$1-Lnx>0 \Rightarrow 1>Lnx \Rightarrow Lne>Lnx \Rightarrow e>x$$

$$\Rightarrow D_f=(0,e)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x}\times\frac{1}{1-Lnx}=\frac{-1}{x(1-Lnx)}$$

$$f''(x)=\frac{(x(1-Lnx))'}{(x(1-Lnx))^2}=\frac{x(-\frac{1}{x})+(1-Lnx)}{x^2(1-Lnx)^2}=-\frac{Lnx}{x^2(1-Lnx)^2}$$

با توجه به دامنهٔ تابع $f$، تقعر این تابع در بازهٔ $(1,e)$ رو به پایین و در بازهٔ $(0,1)$ رو به بالا است.

$$(a,b)=(1,e)\Rightarrow b-a=e-1$$

*(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۱ و ۱۸۲)*

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

$$y'=\frac{a(x^2-5x+4)-(2x-5)(ax+b)}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$y'(2)=0\Rightarrow a(2^2-5\times2+4)-(2\times2-5)\overbrace{(2a+b)}^{=2}=0$$

$$\Rightarrow -2a+2=0\Rightarrow a=1\xrightarrow{(*)}b=0\Rightarrow a+b=1$$

*(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۳۰ فروردین

(کاظم اجلالی)

مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = -۱۵\sin ۳x + ۵k\sin ۵x \Rightarrow f'(\pi) = ۰$$

مشتق دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f''(x) = -۴۵\cos ۳x + ۲۵k\cos ۵x \Rightarrow f''(\pi) = ۴۵ - ۲۵k$$

اگر $f''(\pi) > ۰$ باشد، آن‌گاه طبق آزمون مشتق دوم، $f$ در $x = \pi$ مینیمم نسبی خواهد داشت. یعنی:

$$۴۵ - ۲۵k > ۰ \Rightarrow k < \frac{۹}{۵}$$

بنابراین به ازای $k = ۱$، تابع در $x = \pi$ دارای مینیمم نسبی است.

*(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)*

✓ ۱ | ۲ | ۳ | ۴

آزمون ۳۰ فروردین

(محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$y' = \frac{۱}{۱ + x^{۲}} e^{\tan^{-۱} x}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-۲x}{(۱ + x^{۲})^{۲}} \times e^{\tan^{-۱} x} + \frac{۱}{(۱ + x^{۲})^{۲}} \times e^{\tan^{-۱} x} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{e^{(\tan^{-۱} x)}}{(۱ + x^{۲})^{۲}} \times (۱ - ۲x) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

**با توجه به این‌که جهت تقعر در $x = \frac{۱}{۲}$ عوض می‌شود این نقطه، نقطهٔ عطف است.**

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = e^{\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲})} > ۰$$

**بنابراین $x > ۰$ و $y > ۰$ است و نقطهٔ موردنظر در ناحیهٔ اول قرار دارد.**

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۱ تا ۱۸۴)

✓ $\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

آزمون ۳۰ فروردین

-۸۶ (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$y=\frac{e^x-\sin x}{e^x+\sin x}\Rightarrow y'=\frac{۲e^x(\sin x-\cos x)}{(e^x+\sin x)^۲}$$

مشتق به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ برابر صفر می‌شود و در این نقطه از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد. پس این نقطه، یک نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است.

توجه کنید که برای تعیین علامت مشتق در مجاورت نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$، کافی است فقط عبارت $\sin x-\cos x$ را تعیین علامت کنیم؛ زیرا $e^x$ و $\left(e^x+\sin x\right)^۲$ همواره مثبت‌اند:

$$\Rightarrow\begin{cases} x\to(\frac{\pi}{۴})^-\Rightarrow \sin x<\cos x\Rightarrow \sin x-\cos x<۰ \\ x\to(\frac{\pi}{۴})^+\Rightarrow \sin x>\cos x\Rightarrow \sin x-\cos x>۰ \end{cases}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۸۷ (حبیب شفیعی)

در توابع پیوسته و مشتق‌پذیر، نقاطی که علامت $f'$ در آن تغییر کند، اکسترمم موضعی‌اند. حال اگر از مثبت به منفی تغییر کند ماکزیمم و اگر از منفی به مثبت تغییر کند، مینیمم موضعی محسوب می‌شوند. بنابراین تابع $f$ در $x=۰$ ماکزیمم و در $x=۱$ می‌نیمم موضعی دارد.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: مشابه تمرین ۱۵ صفحهٔ ۱۹۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{2}(1+\cot^2\frac{x}{2})}{2\sqrt{\cot\frac{x}{2}}}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=\frac{-\frac{1}{2}(1+(1)^2)}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\pi}=\frac{k\sqrt{2}}{\pi}\times\frac{-1}{2}\Rightarrow k=2\sqrt{2}$$

(حسابان - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۷۵ تا ۱۸۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴



-۸۹ (فریدون ساعتی)

$$y^4+4=5xy^4\xrightarrow{y=1}(1)^4+4=5x(1)^4\Rightarrow 5=5x\Rightarrow x=1$$

$$y^4+4=5xy^4\xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{از طرفین نسبت به } t}4y'_t y^3+0=5x'_t y^4+5x(4y'_t y^3)$$

$$\Rightarrow 4y'_t(1)^3+0=5x'_t(1)^4+5(1)(4y'_t(1)^3)$$

$$\Rightarrow 4y'_t=5x'_t+20y'_t\Rightarrow -16y'_t=5x'_t\Rightarrow\frac{x'_t}{y'_t}=\frac{-16}{5}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

قضیهٔ کسینوس‌ها:

$$L^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} - ۲(۱)(۱)\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \cos^{-۱}\left(\frac{۲ - L^{۲}}{۲}\right)$$

$$S = \text{مساحت قطاع - مساحت مثلث} = \pi(۱)^{۲}\left(\frac{\alpha}{۲\pi}\right) - \frac{۱}{۲}(۱)(۱)\sin\alpha$$

$$= \frac{\alpha}{۲} - \frac{\sin\alpha}{۲}$$

$$\frac{dS}{dL} = \frac{dS}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dL} = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{\cos\alpha}{۲}\right)\left(\frac{\left(\frac{۲L}{۲}\right)}{\sqrt{۱ - \left(\frac{۲ - L^{۲}}{۲}\right)^{۲}}}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{L^{۲}}{۲}\right)\frac{۲L}{\sqrt{۴ - (۲ - L^{۲})^{۲}}} = \frac{L^{۳}}{۲\sqrt{۴L^{۲} - L^{۴}}} = \frac{L^{۲}}{۲\sqrt{۴ - L^{۲}}}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۱- (علی‌اصغر فرضی)

همسازهٔ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم برابر است با:

$$A_{۲۳} = (-۱)^{۵}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۴$$

طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$|A| = (-۶-۲-۱۸)-(۶+۲-۱۸) = -۱۶$$

$$A^{-۱} \text{ درایهٔ سطر سوم و ستون دوم} = \frac{A_{۲۳}}{|A|} = \frac{-۴}{-۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۲- (محسن رجبی)

مـی‌دانـیم بـرای دو مـاتریس مربعـی $A$ و $B$، $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$ و

$(AB)^{t} = B^{t}A^{t}$ است. بنابراین داریم:

$$\underbrace{B^{t}(BAB^{-۱})^{t}}\underbrace{B^{-۱}A^{-۱}} = ((BA\underbrace{B^{-۱})B}_{I})^{t}(AB)^{-۱}$$

$$= (BA)^{t}(AB)^{-۱} = A^{t}B^{t}(AB)^{-۱} = (AB)(AB)^{-۱} = I$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۱۳ (کوروش شاه‌منصوریان)

$$|A^*| = |A|^{n-1} = |A|^{3-1} = |A|^2 = 4|A| - 4$$

$$|A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

$$\left|\frac{1}{2}A\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times |A| = \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4}$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۱۴ (علی‌اصغر فرضی)

$$(AB)^2 - AB = I \Rightarrow AB(AB - I) = I \Rightarrow (AB - I)^{-1} = AB$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ و ۱۳۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۳۰ فروردین

(نوید مجیدی)

اگر $A$ و $P$ ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند و $P$ وارون‌پذیر باشد،

برای هر $n\in N$ داریم:

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

در این سؤال داریم:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=P$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$A^3 = A^2A = IA = A, \ldots$$

در حالت کلی توان‌های زوج $A$ برابر $I$ و توان‌های فرد آن برابر خود $A$

خواهند شد. در نتیجه:

$$(P^{-1}AP)^9 = P^{-1}A^9P = PAP = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=-A$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(امیرحسین ابومحبوب)

اگر $A$ یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۳ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس الحاقی $A$ (ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های $A$) برابر است با $|A|^{۲}$ و چون ماتریس $A$ وارون‌پذیر است پس $|A| \neq ۰$، در نتیجه دترمینان ماتریس الحاقی قطعاً مثبت است که تنها گزینهٔ «۲» این ویژگی را دارد (ماتریس گزینهٔ «۲» یک ماتریس بالا مثلثی است و دترمینان آن برابر حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی یعنی برابر ۱ است).

*(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)*

۱ ‌ ۲✓ ‌ ۳ ‌ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

از آن‌جا که دترمینان ماتریس‌های $A^۲$ و $B^۲$، مخالف صفر هستند، پـس دو

ماتریس $A$ و $B$ وارون‌پذیرند و داریم:

$$BA = (\underbrace{B^۲B^{-۱}}_{B})(\underbrace{A^{-۱}A^۲}_{A}) = B^۲(B^{-۱}A^{-۱})A^۲ = B^۲(AB)^{-۱}A^۲$$

$$|AB| = -۱ \Rightarrow (AB)^{-۱} = -\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$BA = B^۲(AB)^{-۱}A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

*(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

چون $A$ وارون‌پذیر است، با ضـرب دو طـرف رابطـهٔ $A^{۳} = A$ در $A^{-۱}$، خواهیم داشت: $A^{۳}A^{-۱} = AA^{-۱} \Rightarrow A^{۲} = I$ . همچنین با توجه به رابطـهٔ $A^{۲} = I$ نتیجه می‌گیریم که $A = A^{-۱}$ است. حال از این که $A$ متقـارن است $(A^{t} = A)$، داریم:

$$(AA^{t} - A^{-۱})(A + A^{-۱})^{t} = (AA - A)(A + A)^{t}$$

$$= (A^{۲} - A)(۲A)^{t} = (I - A)۲(A^{t}) = ۲(I - A)(A)$$

$$= ۲(A - A^{۲}) = ۲(A - I)$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۱   ۲✓   ۳   ۴

(شروین سیاح‌نیا)

$$A^{3}=I\Rightarrow A^{3}+I=2I\Rightarrow (A+I)(A^{2}-A+I)=2I$$

$$\Rightarrow (A+I)^{-1}=\frac{1}{2}(A^{2}-A+I)$$

$$\Rightarrow A(A+I)^{-1}=\frac{1}{2}(A^{3}-A^{2}+A)=\frac{1}{2}(I-A^{2}+A)$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۴}$

آزمون ۳۰ فروردین

(نوید مجیدی)

با توجه به این‌که $|A|I = \begin{bmatrix} |A| & ۰ & ۰ \\ ۰ & |A| & ۰ \\ ۰ & ۰ & |A| \end{bmatrix} = AA^*$ ، پس ابتدا باید

$|A|$ را محاسبه کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۰ & \frac{۲}{۳} & -۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{R_۲ - R_۱ \to R_۲}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & \frac{۲}{۳} & -۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون اول}} |A| = ۱ \times \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ \frac{۲}{۳} & -۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۲ \times (-۱) - \frac{۲}{۳} \times (-۱) = -\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $a = b = c = |A| = \frac{-۴}{۳}$ است، که نتیجه می‌دهد

$a + b + c = ۳|A| = -۴$.

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ و ۱۳۵)

۱ ‏ ‏ ۲✓ ‏ ‏ ۳ ‏ ‏ ۴

۱۲۱- (هومن نورائی)

$$P(c)=\frac{۱}{۲}P(\{a,b\})=\frac{۱}{۲}(۱-P(c))\Rightarrow P(c)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(a)+P(b)+P(c)=۱\Rightarrow P(a)+\frac{۱}{۲}P(a)+\frac{۱}{۳}=۱\Rightarrow P(a)=\frac{۴}{۹}$$

$$P(\{a,c\})=P(a)+P(c)=\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۹}$$

(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۲- (مهرداد ملوندی)

**باید یکی از سه مهرهٔ انتخابی آبی باشد که ممکن است در یکی از انتخاب‌های اول، دوم یا سوم اتفاق بیفتد. احتمال مورد نظر برابر است با:**

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}\times\binom{۲}{۲}\times ۳!}{۶\times ۵\times ۴}=\frac{۴\times ۱\times ۶}{۶\times ۵\times ۴}=\frac{۱}{۵}$$

(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

۱۲۳- (سروش موئینی)

**تعداد دخترهای خانواده باید برابر صفر، ۳یا۴ باشد. اگر A پیشامد موردنظر باشد، آنگاه داریم:**

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۰}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}}{۲^۴}=\frac{۱+۴+۱}{۱۶}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۲۴ (هومن نورائی)

$$P\ (\text{هم‌رنگ بودن}) = \frac{۲}{۵} \Rightarrow P\ (\text{هم‌رنگ نبودن}) = ۱ - \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{۵}$$

فرض کنید n مهره از یک رنگ و $(n+۱)$ مهره از رنگ دیگر در کیسه وجود دارد. در این‌صورت داریم:

$$P\ (\text{هم‌رنگ نبودن}) = \frac{\binom{n}{۱}\times\binom{n+۱}{۱}}{\binom{۲n+۱}{۲}} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{n(n+۱)}{\frac{(۲n+۱)\times ۲n}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۶n+۳ = ۵n+۵ \Rightarrow n = ۲$$

$$\text{تعداد مهره‌های داخل کیسه} = ۲n+۱ = ۵$$

*(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)*

---

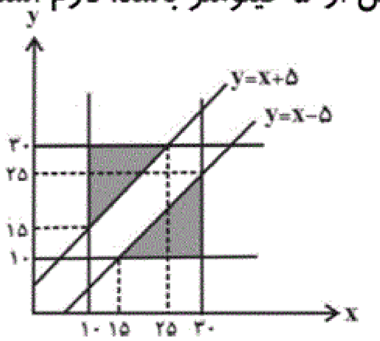
۱ ✓    ۲    ۳    ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۲۵ (امیرحسین ابومحبوب)

مساحت متناظر با فضای نمونه‌ای برابر است با: $a(S) = ۲۰\times ۲۰ = ۴۰۰$

طول آسفالت ریزی دو ماشین را با x و y نشان می‌دهیم. برای این که اختلاف طول آسفالت ریزی، بیش از ۵ کیلومتر باشد، لازم است $|y-x| > ۵$ گردد.




مساحت هر کدام از مثلث‌های هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\times ۱۵\times ۱۵ = \frac{۲۲۵}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$a(A) = ۲\times \frac{۲۲۵}{۲} = ۲۲۵$$

$$P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{۲۲۵}{۴۰۰} = \frac{۹}{۱۶}$$

*(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)*

۱    ۲    ۳    ۴ ✓

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۲۶ (آژنگ نوید)

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

$$\Rightarrow P(A\bigcup B)=P(A)+P(B-A)\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۲}+P(B-A)$$

$$\Rightarrow P(B-A)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A\bigcup B')=P[(A'\bigcap B)']=۱-P(A'\bigcap B)$$

$$=۱-P(B-A)=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۲۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۲۷ (محمدعلی نادرپور)

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)}{P(B)}P(B\mid A)$$

$$\Rightarrow ۲P(B\mid A)=\frac{P(A)}{P(B)}P(B\mid A)\Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)}=۲$$

$$\xrightarrow{P(A)=\frac{۱}{۳}} P(B)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{P(A\bigcap B)}{\frac{۱}{۶}}\Rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۹}$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۷}{۱۸}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۲۸ (سروش موئینی)

از ۳۶ حالت دو تاس، حالت‌های (۵,۱)، (۶,۱)، (۶,۲)، (۱,۵)، (۲,۶) و (۱,۶) که اختلاف اعداد رو شده بیشتر از ۳ است را حذف می‌کنیم. پس $n(B)=۳۰$ است. حالات مورد قبول هم عبارت‌اند از:

$$A\bigcap B=\{(۲,۲),(۲,۴),(۶,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۴)\}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با: $P(A\mid B)=\frac{۷}{۳۰}$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۲۹ (رضا عباسی‌اصل)

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\Rightarrow \frac{۱۷}{۲۵}=P(A)+\frac{۱۲}{۲۵}-P(A)\times\frac{۱۲}{۲۵}$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۲۵}=P(A)(۱-\frac{۱۲}{۲۵})\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۳}$$
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۱۲}{۶۵}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۳۰ (عباس اسدی‌امیرآبادی)

اگر پیشامد قبول شدن مریم و فاطمه را در کنکور به ترتیب با A و B نشان دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=۰/۲+۰/۴-۲(۰/۴)(۰/۲)=۰/۴۴$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

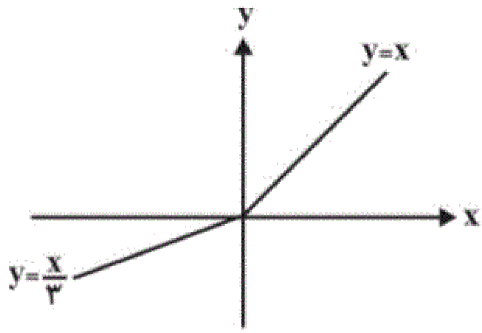
آزمون ۳۰ فروردین

(کاظم اجلالی)

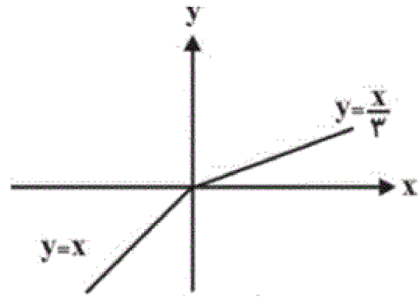
تابع بودن رابطهٔ $y-\sqrt{y}=\sqrt{x}$ را می‌توان با مثال نقض زیر رد کرد:

$$x=0 \Rightarrow y-\sqrt{y}=0 \Rightarrow y=\sqrt{y} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$$

روابط گزینه‌های (۱) و (۲) را می‌توان رسم کرد و تابع بودن آن‌ها را اثبات کرد.




گزینهٔ (۱)




گزینهٔ (۲)

در گزینهٔ (۴) نیز داریم:

$$y+\sqrt{y}+\frac{1}{4}=\sqrt{x}+\frac{1}{4} \Rightarrow (\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2=\sqrt{x}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y}+\frac{1}{2}=\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{4}} \Rightarrow y=(\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2$$ تابع است:

(حسابان- تابع: صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(کاظم اجلالی)

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(x^۲ - x)^۲ + ۲(x^۲ - x) - ۳ = ۰$$

با قرار دادن $x^۲ - x = t$ داریم:

$$t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \quad , \quad t = -۳$$

$$\begin{cases} x^۲ - x = ۱ \Rightarrow x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = ۱ \\ x^۲ - x = -۳ \Rightarrow x^۲ - x + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow \quad \text{معادله جواب ندارد.} \end{cases}$$

(حسابان - محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(محمدرضا شوکتی‌بیرق)

**یادآوری: تابع درجهٔ دوم $y = ax^2 + bx + c$ وقتی دو ریشهٔ مثبت دارد که داشته باشیم:**

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

**هم‌چنین دهانهٔ سهمی در حالت $a < 0$ رو به پایین و در حالت $a > 0$ رو به بالاست.**

**مطابق نمودار داده شده، $a < 0$ است و از طرفی تابع، دو ریشهٔ مثبت دارد.**

**پس:**

$$\left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4 > 0 \Rightarrow b < -2 \text{ یا } b > 2 \\ -\frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a<0} b > 0 \\ \frac{\frac{1}{a}}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} b > 2$$

(حسابان - محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۹۴ (محمدرضا توجه)

$$f(x)=(x-۱)^۲+(x-۲)^۲+...+(x-۱۰)^۲$$

$$=(x^۲-۲x+۱)+(x^۲-۴x+۴)+...+(x^۲-۲۰x+۱۰۰)$$

$$=۱۰x^۲-۲x(۱+۲+...+۱۰)+k$$

$$=۱۰x^۲-۲x(\frac{۱۰\times۱۱}{۲})+k=۱۰x^۲-۱۱۰x+k$$

معادلهٔ محور تقارن تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ برابر $x=-\frac{b}{۲a}$ می‌باشد:

$$x=\frac{-(-۱۱۰)}{۲\times۱۰}=\frac{۱۱}{۲}$$

(حسابان - محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۹۵ (کتاب نوروز - سؤال ۳۶)

$$۳x^۲+۲|x|-۵=۰ \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است.}} \begin{cases}|x|=۱\\ |x|=\frac{-۵}{۳} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$(|x|-۱)\underbrace{(۳|x|+۵)}_{\text{مثبت}}<۰\Rightarrow|x|-۱<۰\Rightarrow-۱<x<۱$$

$$a<x<b\Rightarrow b=۱\,,\,a=-۱\Rightarrow b-a=۱-(-۱)=۲$$

(حسابان - محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۳ تا ۴۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

(محمدرضا ابراهیمی)

مقدار تابع در $x = ۰$ برابر $-۱$ است.

$$y(۰) = -۱ \Rightarrow ۱ + a\cos(۰) = ۱ + a = -۱ \Rightarrow a = -۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $y = ۱ - ۲\cos(b\pi x)$ خواهد بود.

مقدار تابع در $x = ۵$ برابر صفر است و این نقطه دومین جایی است که تابع برابر صفر می‌شود. تابع $y = ۱ - ۲\cos x$ ابتدا در $x = \frac{\pi}{۳}$ و سپس در $x = \frac{۵\pi}{۳}$ برابر صفر می‌شود. پس اگر در عبارت $(b\pi x)$ مقدار $x$ را برابر ۵ بگذاریم، باید برابر $\frac{۵\pi}{۳}$ باشد:

$$b\pi(۵) = \frac{۵\pi}{۳} \Rightarrow b = \frac{۱}{۳}$$

$$a + b = -۲ + \frac{۱}{۳} = -\frac{۵}{۳}$$

(ریاضی ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(کتاب نوروز – سؤال ۱۶)

$$\frac{S_{۱۰}}{S_{۵}}=\frac{a_۱\frac{(۱-q^{۱۰})}{۱-q}}{a_۱\frac{(۱-q^{۵})}{۱-q}}=\frac{۱-q^{۱۰}}{۱-q^{۵}}=\frac{(۱-q^{۵})(۱+q^{۵})}{۱-q^{۵}}$$

$$=۱+q^{۵}=۳۳\Rightarrow q^{۵}=۳۲\Rightarrow q=۲$$

$$\frac{a_۵}{a_۱}=\frac{a_۱q^{۴}}{a_۱}=q^{۴}=(۲)^{۴}=۱۶$$

(حسابان – محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

 (سعید مدیرخراسانی)

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P_۱(x)$ بر چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $R_۱(x)$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P_۲(x)$ بر چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $R_۲(x)$ باشد، در آن صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم $P_۱(x)P_۲(x)$ بر $f(x)$ برابر است با حاصل تقسیم $R_۱(x)R_۲(x)$ بر $f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} R_۱(x) = -۲x - ۳ \\ R_۲(x) = ۲x - ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow R_۱(x)R_۲(x) = (-۲x-۳)(۲x-۴)$$

$$= -۴x^۲ + ۲x + ۱۲$$

$$\begin{array}{l|l} -۴x^۲ + ۲x + ۱۲ & x^۲ - ۳x + ۵ \\ \hline \underline{-(-۴x^۲ + ۱۲x - ۲۰)} & -۴ \\ \quad -۱۰x + ۳۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow R(x) = -۱۰x + ۳۲ \Rightarrow R(۳) = ۲$$

(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱    ۲    ۳ ✓    ۴

۹۹- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\dfrac{-(-۲)}{۴}=\dfrac{۱}{۲} \\ P=\alpha\beta=-\dfrac{۱}{۴} \end{cases}$$

برای معادلهٔ جدید داریم:

$$P'=(\alpha+۲\beta)(\beta+۲\alpha)=۵\alpha\beta+۲(\alpha^۲+\beta^۲)$$

$$۵\alpha\beta+۲((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)=۵P+۲S^۲-۴P=۲S^۲+P$$

$$=۲(\frac{۱}{۲})^۲+(-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P'=\frac{m}{۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow m=۱$$

(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۹)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۰- (محمدطاهر شعاعی)

$$\frac{۳-x}{x+۳}+\frac{x+۱}{x-۳}=\frac{ax+b}{x^۲-۹}\Rightarrow\frac{(۳-x)(x-۳)+(x+۱)(x+۳)}{x^۲-۹}$$

$$=\frac{ax+b}{x^۲-۹}\Rightarrow -x^۲+۶x-۹+x^۲+۴x+۳=ax+b$$

$$\Rightarrow ۱۰x-۶=ax+b$$

اگر $a=۱۰$ و $b=-۶$ باشد، تساوی اخیر به‌ازای هر $x$ حقیقی به‌جز ۳ و ۳- برقرار است، یعنی معادله بی‌شمار جواب دارد. لذا $a+b=۱۰-۶=۴$.

(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۰۱ (میلاد منصوری)

**دامنهٔ $\sqrt{x}$ ایجاب می کند که $x \geq 0$. داریم:**

$$\sqrt{x^2 + x + 2x\sqrt{x}} + \sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x}} = \sqrt{(x+\sqrt{x})^2} + \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$= \left| \underbrace{x + \sqrt{x}}_{\text{مثبت است}} \right| + \left|\sqrt{x} - 1\right| = x + \sqrt{x} + \left|\sqrt{x} - 1\right|$$

**بنابراین:**

$$x + \sqrt{x} + \left|\sqrt{x} - 1\right| = x + 1 \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 1\right| = 1 - \sqrt{x}$$

**پس باید $\sqrt{x} - 1 \leq 0$ یعنی:**

$$\sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

(حسابان - محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴



-۱۰۲ (جمال‌الدین حسینی)

**با توجه به نمودار $y = f(x)$ داریم:**

$$0 \leq f(x) < 3$$

$$\Rightarrow 16 \leq f^2(x) + 16 < 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{f^2(x) + 16} < 5$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} -10 < -2\sqrt{f^2(x)+16} \leq -8$$

$$\xrightarrow{+3} -7 < 3 - 2\sqrt{f^2(x)+16} \leq -5 \Rightarrow R_y = (-7, -5]$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

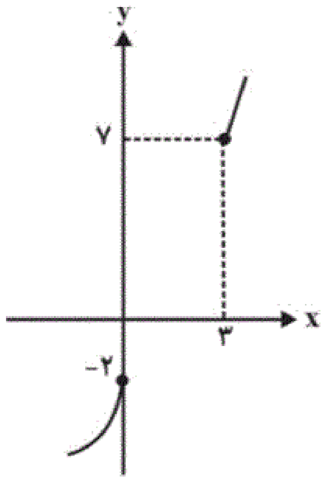
۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۳- (حبیب شفیعی)

ابتدا نمودارهای $y=|۲x+۱|=۲x+۱ \ (x\ge ۳)$ و $y=-\sqrt{-x}-۲$ را رسم

می‌کنیم. نمودار $g(x)=-x+h$ طوری باید باشد که هر خط

افقی $y=k$ نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.




۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

(حسین حاجیلو)

**$f$ یک تابع خطی است که محور $y$ها را با عرض ۲ قطع می‌کند، پس $f(x)=mx+۲$. $g$ یک تابع درجه دوم است که محور $y$ها را با عرض ۳ قطع می‌کند، پس $g(x)=ax^۲+bx+۳$.**

$$(fog)(x)=f(g(x))=m(ax^۲+bx+۳)+۲$$
$$\Rightarrow (fog)(x)=max^۲+mbx+(۳m+۲)$$

**اما طبق فرض سؤال $(fog)(x)=۲x^۲+x-۱$، پس، داریم:**

$$\begin{cases}(fog)(x)=max^۲+mbx+(۳m+۲)\\(fog)(x)=۲x^۲+x-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳m+۲=-۱\Rightarrow m=-۱\quad(*)\\mb=۱\xrightarrow{(*)}-b=۱\Rightarrow b=-۱\\ma=۲\xrightarrow{(*)}-a=۲\Rightarrow a=-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)=-x+۲\\g(x)=-۲x^۲-x+۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)=(-x+۲)-(-۲x^۲-x+۳)$$

$$=۲x^۲-۱$$

(حسابان- تابع، صفحه‌های ۶۴ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۰۵ (حبیب شفیعی)

$$g^{-۱}(۵) = a \Rightarrow g(a) = ۵ \Rightarrow ۲a^{۳} + ۵a - ۲ = ۵$$
$$\Rightarrow ۲a^{۳} + ۵a - ۷ = ۰$$

**مجموع ضرایب این معادله صفر است، پس $a = ۱$. البته این معادله جواب دیگری ندارد چرا که داریم:**

$$۲a^{۳} + ۵a - ۷ = (a-۱)(۲a^{۲} + ۲a + ۷) = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(g^{-۱}(۵)) = f^{-۱}(۱) = ۲$$

*(حسابان- تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳ و ۸۹ تا ۹۴)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

-۱۰۶ (هادی پلاور)

**چون $f$ متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است، داریم:**

$$f(x) = f(x + ۴n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

**بنابراین $f(-۷) = f(-۷ + ۲ \times ۴) = f(۱)$ است و داریم:**

$$f(۱) = f(-۷) = ۲ \Rightarrow \sqrt{۱ + k} = ۲ \Rightarrow k = ۳$$

*(حسابان- تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)*

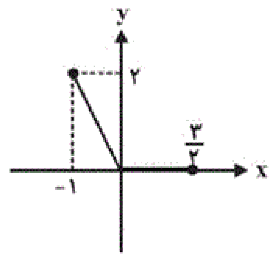
۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

(محمدطاهر شعاعی)

$$\begin{cases} -۱ \le x < ۰ \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = -۱ \Rightarrow f(x) = ۲x[\frac{x}{۲}] = -۲x \\ ۰ \le x \le \frac{۳}{۲} \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۰ \Rightarrow f(x) = ۲x[\frac{x}{۲}] = ۰ \end{cases}$$

پس تابع $f(x) = \begin{cases} -۲x & ; \quad -۱ \le x < ۰ \\ ۰ & ; \quad ۰ \le x \le \frac{۳}{۲} \end{cases}$ و نمودار آن به صورت زیر است:

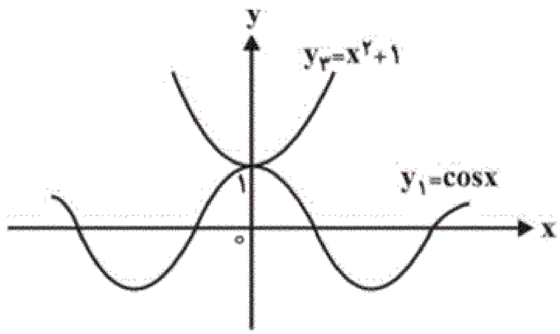



(حسابان- تابع: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

حالا معادلهٔ $\cos x = x^2 + m$ را در نظر بگیرید.

برای این‌که معادله یک جواب داشته باشد باید دو نمودار $y_1 = \cos x$ و $y_2 = x^2 + m$ در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند (مماس باشند.) با توجه به شکل قبلی باید نمودار $y_2 = x^2$ یک واحد به بالا بیاید. یعنی $m = 1$.




*(حسابان- محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۳۰ فروردین

۱۰۹- (حمید ستاری)

$$\sin^{۳} x = \cos x - \cos^{۳} x \Rightarrow \sin^{۳} x = \cos x(۱ - \cos^{۲} x)$$
$$\Rightarrow \sin^{۳} x = \cos x.\sin^{۲} x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^{۲} x = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = ۰, \pi , ۲\pi \\ \sin x = \cos x \xrightarrow{\text{بر } \cos x \text{ تقسیم می‌کنیم}} \tan x = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}$$

**در نتیجه معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ پنج جواب دارد.**

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$✓ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

آزمون ۳۰ فروردین

۱۱۰- (حمید علیزاده)

$$\sin^{-۱}(\cos(۶x + ۵x)) = \sin^{-۱}(\cos ۱۱x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۸}} \sin^{-۱}(\cos \frac{۱۱\pi}{۸})$$

$$\sin^{-۱}(\cos(\frac{۸\pi + ۳\pi}{۸})) = \sin^{-۱}(\cos(\pi + \frac{۳\pi}{۸})) = \sin^{-۱}(-\cos \frac{۳\pi}{۸})$$

$$= -\sin^{-۱}\left( \sin(\frac{\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۸}) \right) = -\sin^{-۱}(\sin \frac{\pi}{۸}) = -\frac{\pi}{۸}$$

(حسابان – مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷ و ۱۲۴ تا ۱۳۰)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$✓ $\boxed{۴}$

آزمون ۳۰ فروردین