



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، رادیان - ۶ سوال

۶۳- طول برف‌پاکن اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. اگر برف‌پاکن کمانی به اندازه ۱۲۰ درجه طی کند، طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن

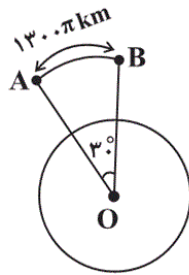
تقریباً چند سانتی‌متر است؟ ($\pi \approx 3/14$)

- ۱۵۰ (۱) ۶۰ (۲) ۲۵ (۳) ۵۰ (۴)

۶۴- اگر اندازه یک زاویه برحسب رادیان ۳ برابر شود به اندازه آن زاویه برحسب درجه، 60° اضافه می‌شود. اندازه زاویه اولیه برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{12}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

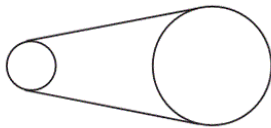
۶۵- ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای به دور زمین در حال حرکت است. اگر این ماهواره مسافتی معادل 1300π کیلومتر را طی کند، با توجه به شکل، ماهواره در چه فاصله‌ای از سطح زمین برحسب کیلومتر در حال حرکت است؟ (شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر است.)



- ۱۴۰۰ (۱)
 $\frac{1300\pi}{3}$ (۲)
۷۸۰۰ (۳)
 $\frac{149\pi}{3}$ (۴)

۶۶- در شکل زیر، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های ۱۰ cm و $2/5$ cm را به هم وصل کرده است. وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{4}$ رادیان می‌چرخد

قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟

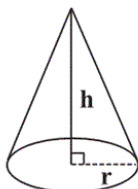


- (۱) 5π (۲) $\frac{5\pi}{2}$
(۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) 2π

۶۸- در مدت زمانی معین، نوک عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت عقربه‌ای با طول ۸ سانتی‌متر، 16π سانتی‌متر مسافت را طی می‌کند. در این مدت زمان، نوک عقربه ساعت‌شمار با طول ۶ سانتی‌متر، چه مسافتی را برحسب سانتی‌متر طی می‌کند؟

- (۱) π (۲) 4π (۳) 6π (۴) 12π

۷۱- در شکل مقابل، یک مخروط با شعاع قاعده r و ارتفاع $h = 2\sqrt{2}r$ نشان داده شده است. در شکل گسترده مخروط، اندازه زاویه قطاع حاصل چند درجه است؟



- (۱) ۹۰
(۲) ۱۲۰
(۳) ۱۳۵
(۴) ۱۵۰

حسابان ۱، نسبت های مثلثاتی برخی زوایا - ۴ سوال

۷۳- مقدار $\cos(-\frac{5\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۷۸- اگر $a = \frac{2\cos 25^\circ - \sin 34^\circ}{\sin 11^\circ + 2\cos 16^\circ}$ باشد، مقدار $\tan 2^\circ$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{2}$ (۲) a (۳) $-a$ (۴) $-\frac{2}{a}$

۷۹- اگر $\cos(\frac{5\pi}{2} + \theta) = \frac{3}{5}$ باشد، حداکثر مقدار عبارت $A = 2\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) + \cos(3\pi - \theta)$ کدام می تواند باشد؟

- (۱) $0/6$ (۲) $0/8$ (۳) $1/2$ (۴) $2/4$

۸۰- کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

- (۱) $\sin 4 > \cos(-1)$ (۲) $\cos 2 > \sin 1$
(۳) $\sin 3 < \cos(-1)$ (۴) $\sin(-4) < \cos(-2)$

حسابان ۱، توابع مثلثاتی - ۴ سوال

۷۴- مجموع اعداد صحیح عضو دامنه تابع $y = \sqrt{\cos x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

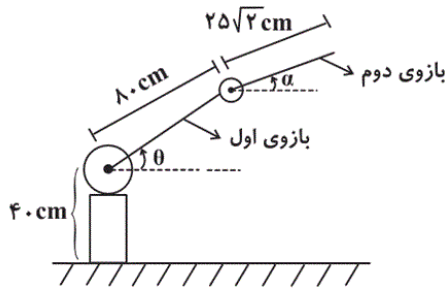
۷۵- نمودارهای توابع $y = -|\sin x|$ و $y = -\frac{1}{y}$ در بازه $(-\pi, \pi)$ ، در چند نقطه همدیگر را قطع می کنند؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۶- مجموع و تعداد جواب های معادله $\frac{|\cos x|}{x^2} = 1$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) صفر و ۲ (۲) صفر و ۳ (۳) 2 و $\frac{\pi}{2}$ (۴) 3 و $\frac{\pi}{2}$

۷۷- شکل زیر ربات است که از دو بازوی متصل به هم برای برداشتن اجسام استفاده می‌کند. این ربات برای برداشتن یک شیء، بازوی دوم خود را در حالت زاویه $\alpha = -45^\circ$ نسبت به افق قرار داده است. اگر بازوی اول در وضعیت افقی قرار گیرد، ارتفاع جسم از سطح زمین برحسب سانتی‌متر کدام است؟



- (۱) ۲۰
- (۲) ۱۵
- (۳) ۳۵
- (۴) ۱۰

حسابان ۱، تابع لگاریتمی و لگاریتم - ۲ سوال -

۶۹- نمودار تابع $y = \log_{3/2}(x+2)$ از کدام ناحیه مختصاتی نمی‌گذرد؟

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

۶۲- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) لگاریتم اعداد بزرگ‌تر از ۱ همواره مثبت است.
- (۲) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.
- (۳) تابع $y = 1 + \log_3^x$ محور x ها را قطع می‌کند.
- (۴) تابع لگاریتم تابعی یک‌به‌یک است.

حسابان ۱، ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی - ۴ سوال -

۶۱- اگر $\log_3^a = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $A = \log_{\frac{1}{9}}^{a\sqrt[3]{9}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) -۱
- (۳) $-\frac{1}{3}$
- (۴) $-\frac{2}{3}$

۷۰- اگر لگاریتم عدد x در پایه \sqrt{a} با لگاریتم عدد y در پایه $a\sqrt[3]{a}$ برابر باشد، کدام رابطه بین x و y برقرار است؟ ($a, x, y > 0$ و $a \neq 1$)

- (۱) $x^3 = y^8$
- (۲) $x^8 = y^3$
- (۳) $x^5 = y^3$
- (۴) $x^3 = y^5$

۶۷- رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ بین بزرگی زلزله برحسب ریشتر (M) و مقدار انرژی آزاد شده برحسب ارگ (E) برقرار است. اگر به بزرگی زمین‌لرزه‌ای برحسب ریشتر ۲ واحد اضافه شود، مقدار انرژی آزاد شده برحسب ارگ چند برابر می‌شود؟

- (۱) ۲
- (۲) ۶
- (۳) ۱۰۰
- (۴) ۱۰۰۰

۷۲- اگر $\log xy + \log x \log y = -1$ و $x + y = 2$ باشد، قدرمطلق اختلاف x و y کدام است؟

(۴) $1/6$

(۳) $1/7$

(۲) $1/8$

(۱) $1/9$

هندسه ۲، تبدیل های هندسی - ۱۰ سوال

۱۰۱- کدام گزینه در مورد تبدیل همانی نادرست است؟

(۱) اگر تبدیل همانی باشد، آن گاه همواره طولیاست.

(۲) اگر تبدیل همانی باشد، آن گاه بی شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

(۳) اگر تبدیل همانی نباشد، آن گاه بی شمار نقطه ثابت تبدیل ندارد.

(۴) اگر تبدیل انتقالی همانی نباشد، آن گاه نقطه ثابت تبدیل ندارد.

۱۰۲- شش ضلعی منتظم ABCDEF را با بردار \overline{CD} انتقال می دهیم. مساحت ناحیه مشترک بین شش ضلعی و تصویرش چه کسری از مساحت

شش ضلعی منتظم است؟

(۴) $1/6$

(۳) $1/4$

(۲) $1/3$

(۱) $1/2$

۱۰۳- اگر R تبدیل دوران حول نقطه O با زاویه 40° درجه و فاصله نقطه A تا $R(R(R(A)))$ برابر ۲ باشد، آن گاه طول OA کدام است؟

(۲) $2\sqrt{3}/3$

(۱) ۱

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) ۲

۱۰۴- طول ضلع مربع ABCD برابر ۲ است. M نقطه ای دلخواه روی AD و N وسط CD است. بازتاب MN نسبت به خط AB را $M'N'$ و

بازتاب $M'N'$ نسبت به خط CD را $M''N''$ می نامیم. مساحت چهارضلعی $M''N''M'N$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

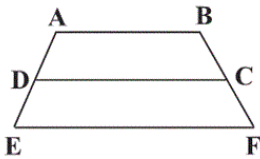
۱۰۵- مثلث ABC در یک تجانس معکوس بر مثلث A'B'C' تصویر می‌شود. اگر مثلث A'B'C' در مثلث ABC محاط باشد، آن‌گاه نسبت این

تجانس کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
 (۲) $-\frac{1}{3}$
 (۳) $-\frac{2}{3}$
 (۴) $-\frac{1}{4}$

۱۰۶- در شکل مقابل ذوزنقه ABCD با تجانس بر ذوزنقه CDEF تصویر می‌شود. اگر $AB = 4$ و $EF = 9$ باشد، آن‌گاه مرکز و نسبت این

تجانس کدام است؟



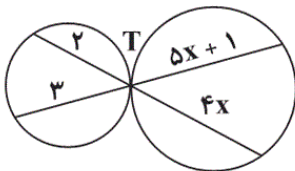
(۱) محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{9}{4}$

(۲) محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{9}{4}$

(۳) محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{3}{2}$

(۴) محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{3}{2}$

۱۰۷- در شکل مقابل، دو دایره در نقطه T بر هم مماس‌اند. مقدار x کدام است؟



(۱) ۲۵/۰

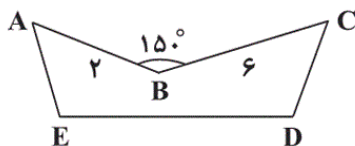
(۲) ۵/۰

(۳) ۱

(۴) ۲

۱۰۸- زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم به کمک تبدیل هندسی مناسب بدون تغییر در طول اضلاع و محیط شکل، مساحت زمین را افزایش

دهیم. میزان افزایش مساحت این زمین کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۱۲

(۳) $6\sqrt{3}$

(۴) $12\sqrt{3}$

۱۰۹- مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC به طول اضلاع $AB = AC = 4$ مفروض است. نقطه M روی ضلع AB طوری قرار دارد که

$AM = 3$ است. اگر M' بازتاب یافته M نسبت به خط BC و نقطه M'' بازتاب یافته M' نسبت به خط AC باشد، آن‌گاه طول MM''

کدام است؟

$7\sqrt{2}$ (۴)

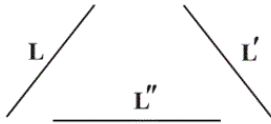
۷ (۳)

$5\sqrt{2}$ (۲)

۵ (۱)

۱۱۰- سه خط L، L' و L'' مطابق شکل در صفحه مفروض‌اند. با کدام تبدیل می‌توان پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کرد به طوری که دو سر

آن روی L و L' و موازی L'' باشد؟



(۱) بازتاب

(۲) انتقال

(۳) دوران

(۴) هیچ‌کدام

حسابان ۱ - سوالات موازی ، رادیان - ۹ سوال -

۸۸- در مدت زمانی معین، نوک عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت عقربه‌ای با طول ۸ سانتی‌متر، 16π سانتی‌متر مسافت را طی می‌کند. در این مدت زمان، نوک عقربه ساعت‌شمار با طول ۶ سانتی‌متر، چه مسافتی را برحسب سانتی‌متر طی می‌کند؟

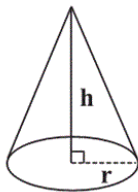
12π (۴)

6π (۳)

4π (۲)

π (۱)

۹۱- در شکل مقابل، یک مخروط با شعاع قاعده r و ارتفاع $h = 2\sqrt{2}r$ نشان داده شده است. در شکل گسترده مخروط، اندازه زاویه قطاع حاصل چند درجه است؟



۹۰ (۱)

۱۲۰ (۲)

۱۳۵ (۳)

۱۵۰ (۴)

۸۳- طول برف‌پاکن اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. اگر برف‌پاکن کمانی به اندازه 120° درجه طی کند، طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن تقریباً چند سانتی‌متر است؟ ($\pi \approx 3/14$)

۵۰ (۴)

۲۵ (۳)

۶۰ (۲)

۱۵۰ (۱)

۸۴- اگر اندازه یک زاویه برحسب رادیان ۳ برابر شود به اندازه آن زاویه برحسب درجه، 60° اضافه می‌شود. اندازه زاویه اولیه برحسب رادیان کدام است؟

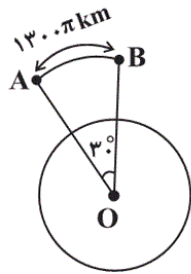
$\frac{\pi}{3}$ (۴)

$\frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{\pi}{6}$ (۲)

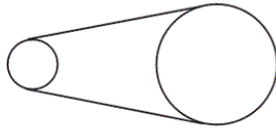
$\frac{\pi}{12}$ (۱)

۸۵- ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای به دور زمین در حال حرکت است. اگر این ماهواره مسافتی معادل 1300π کیلومتر را طی کند، با توجه به شکل، ماهواره در چه فاصله‌ای از سطح زمین بر حسب کیلومتر در حال حرکت است؟ (شعاع زمین 6400 کیلومتر است.)



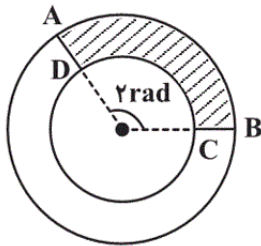
- (۱) 1400
 (۲) $\frac{1300\pi}{3}$
 (۳) 7800
 (۴) $\frac{149\pi}{3}$

۸۶- در شکل زیر، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های 10 cm و $2/5\text{ cm}$ را به هم وصل کرده است. وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{4}$ رادیان می‌چرخد قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



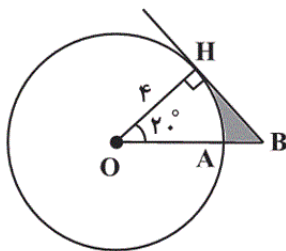
- (۱) 5π
 (۲) $\frac{5\pi}{2}$
 (۳) $\frac{\pi}{2}$
 (۴) 2π

۹۹- دو دایره هم‌مرکز با شعاع‌های r و R مطابق شکل زیر مفروض‌اند ($R > r$). اگر محیط قسمت هاشورخورده با محیط دایره کوچک‌تر برابر باشد، حاصل $\frac{R}{r}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{3\pi}{2}$
 (۲) π
 (۳) $\frac{\pi}{2}$
 (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۰۰- در شکل زیر، مساحت قسمت سایه‌خورده کدام است؟



- (۱) $8\left(\tan\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{9}\right)$
 (۲) $4\left(\tan\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{9}\right)$
 (۳) $4\left(\tan\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{9}\right)$
 (۴) $8\left(\tan\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{9}\right)$

۹۴- کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (۱) اگر روی محیط دایره‌ای به اندازه 1 واحد حرکت کنیم، زاویه مرکزی ایجادشده معادل یک رادیان است.
 (۲) π° از 1 رادیان بیش‌تر است.
 (۳) $\frac{3/14}{180}$ رادیان تقریباً یک درجه است.
 (۴) 12° معادل $\frac{\pi}{12}$ رادیان است.

۹۵- کدام گزینه درست است؟

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_{\frac{1}{2}}^2 \quad (2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^5 > \log_{\frac{1}{2}}^4 \quad (4)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{200} > \log_{\frac{1}{2}}^{200} \quad (1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^3 > \log_{\frac{1}{2}}^5 \quad (3)$$

۸۲- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) لگاریتم اعداد بزرگ‌تر از ۱ همواره مثبت است. (۲) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.
 (۳) تابع $y = 1 + \log_3^x$ محور x ها را قطع می‌کند. (۴) تابع لگاریتم تابعی یک‌به‌یک است.

۹۳- نمودار وارون تابع $f(x) = \log_a^{(x+2)}$ از کدام نواحی محورهای مختصات الزاماً عبور می‌کند؟
 (۱) اول و دوم (۲) دوم و سوم (۳) فقط سوم (۴) سوم و چهارم

۸۹- نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ از کدام ناحیه مختصاتی نمی‌گذرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

حسابان ۱ - سوالات موازی ، ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی - ۷

۹۰- اگر لگاریتم عدد x در پایه \sqrt{a} با لگاریتم عدد y در پایه $a\sqrt{a}$ برابر باشد، کدام رابطه بین x و y برقرار است؟ ($a \neq 1$ و $a, x, y > 0$)
 (۱) $x^3 = y^8$ (۲) $x^8 = y^3$ (۳) $x^5 = y^3$ (۴) $x^3 = y^5$

۹۲- اگر $\log xy + \log x \log y = -1$ و $x + y = 2$ باشد، قدرمطلق اختلاف x و y کدام است؟
 (۱) $1/9$ (۲) $1/8$ (۳) $1/7$ (۴) $1/6$

۸۷- رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ بین بزرگی زلزله برحسب ریشتر (M) و مقدار انرژی آزاد شده برحسب ارگ (E) برقرار است. اگر به بزرگی زمین‌لرزه‌ای برحسب ریشتر ۲ واحد اضافه شود، مقدار انرژی آزاد شده برحسب ارگ چند برابر می‌شود؟
 (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۰۰۰

۸۱- اگر $\log_3^a = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $A = \log_{\frac{1}{9}} a^{\sqrt[3]{9}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) -1 (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۹۶- معادله $\log_x(\sqrt{2}+x) + \log_x(\sqrt{2}-x) = 4$ در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۹۷- حاصل ضرب جواب‌های معادله $\log_3(4 \times 3^x - 1) = 2x + 1$ چقدر از حاصل جمع آن‌ها بیش‌تر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) ۲

۹۸- اگر $\log_{\sqrt{3}} = m$ و $\log_3^{\circ} = n$ باشد، حاصل $m \log \sqrt{125}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{n-1}{n}$ (۲) $\frac{n-1}{4n}$ (۳) $\frac{n+1}{2n}$ (۴) $\frac{n+1}{n}$

هندسه ۲- سوالات موازی، تبدیل‌های هندسی - ۱۰ سوال

۱۱۱- کدام گزینه در مورد تبدیل همانی نادرست است؟

- (۱) اگر تبدیل همانی باشد، آن‌گاه همواره طولیاست.
 (۲) اگر تبدیل همانی باشد، آن‌گاه بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.
 (۳) اگر تبدیل همانی نباشد، آن‌گاه بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل ندارد.
 (۴) اگر تبدیل انتقالی همانی نباشد، آن‌گاه نقطه ثابت تبدیل ندارد.

۱۱۲- چندضلعی منتظمی در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. اگر این چندضلعی با دوران‌های ۳۰ و ۴۵ درجه حول نقطه O برخوردش

منطبق بشود، آن‌گاه تعداد اضلاع این چندضلعی کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۱۱۳- شش‌ضلعی منتظم ABCDEF را با بردار \overline{CD} انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیه مشترک بین شش‌ضلعی و تصویرش چه کسری از مساحت

شش‌ضلعی منتظم است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۱۴- اگر R تبدیل دوران حول نقطه O با زاویه 40° درجه و فاصله نقطه A تا $R(R(R(A)))$ برابر ۲ باشد، آن گاه طول OA کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۱۵- طول ضلع مربع $ABCD$ برابر ۲ است. M نقطه‌ای دلخواه روی AD و N وسط CD است. بازتاب MN نسبت به خط AB را $M'N'$ و

بازتاب $M'N'$ نسبت به خط CD را $M''N''$ می‌نامیم. مساحت چهارضلعی $M''N''M'N$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۶- مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC به طول اضلاع $AB = AC = 4$ مفروض است. نقطه M روی ضلع AB طوری قرار دارد که

$AM = 3$ است. اگر M' بازتاب یافته M نسبت به خط BC و نقطه M'' بازتاب یافته M' نسبت به خط AC باشد، آن گاه طول MM''

کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $5\sqrt{2}$
(۳) ۷ (۴) $7\sqrt{2}$

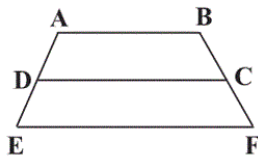
۱۱۷- مثلث ABC در یک تجانس معکوس بر مثلث $A'B'C'$ تصویر می‌شود. اگر مثلث $A'B'C'$ در مثلث ABC محاط باشد، آن گاه نسبت این

تجانس کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۱۱۸- در شکل مقابل دوزنقه ABCD با تجانس بر دوزنقه CDEF تصویر می‌شود. اگر $AB = 4$ و $EF = 9$ باشد، آن‌گاه مرکز و نسبت این

تجانس کدام است؟



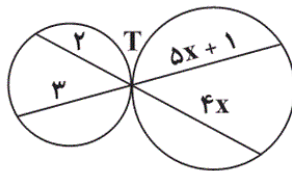
(۱) محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{9}{4}$

(۲) محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{9}{4}$

(۳) محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{3}{2}$

(۴) محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{3}{2}$

۱۱۹- در شکل مقابل، دو دایره در نقطه T بر هم مماس‌اند. مقدار x کدام است؟



(۱) ۰/۲۵

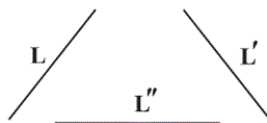
(۲) ۰/۵

(۳) ۱

(۴) ۲

۱۲۰- سه خط L ، L' و L'' مطابق شکل در صفحه مفروض‌اند. با کدام تبدیل می‌توان پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کرد به طوری که دو سر

آن روی L و L' و موازی L'' باشد؟



(۱) بازتاب

(۲) انتقال

(۳) دوران

(۴) هیچ‌کدام

آمار و احتمال، مبانی احتمال - ۲ سوال

۱۲۱- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. یک فرزند را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این فرزند، فقط یک برادر کوچک‌تر داشته باشد، کدام است؟

(۴) $\frac{13}{32}$

(۳) $\frac{3}{8}$

(۲) $\frac{5}{16}$

(۱) $\frac{11}{32}$

۱۲۲- احتمال اعتصاب کارگران در کارخانه‌ای ۸۰ درصد است. احتمال اتمام به موقع کار در صورت اعتصاب ۳۰ درصد و در صورت عدم اعتصاب ۶۰ درصد است. اگر بدانیم کار به موقع به اتمام رسیده است، چقدر احتمال دارد که اعتصاب رخ نداده باشد؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

آمار و احتمال، توصیف و نمایش داده‌ها

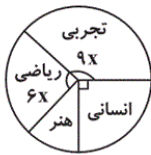
فراوانی نسبی	فراوانی	قد دانش‌آموزان
۰/۱	y	$140 \leq H < 150$
z	۱۵	$150 \leq H < 160$
۰/۴	x	$160 \leq H < 170$

۱۲۷- در جدول فراوانی روبه‌رو، حاصل $\frac{x-y}{z}$ کدام است؟
 (۱) ۱۰
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۶
 (۴) ۱۸

۱۲۸- در یک جدول فراوانی با پنج دسته، مجموع فراوانی‌های نسبی دسته‌های اول و دوم برابر $\frac{2}{5}$ و مجموع فراوانی‌های نسبی دسته‌های چهارم و پنجم برابر $\frac{3}{8}$ است. زاویه مرکزی متناظر با دسته سوم در نمودار دایره‌ای این داده‌ها چند درجه است؟

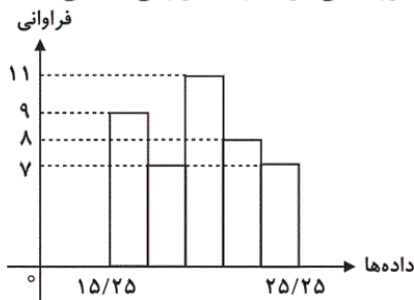
- (۱) ۶۳ (۲) ۷۲ (۳) ۸۱ (۴) ۹۰

۱۲۹- نمودار دایره‌ای زیر، وضعیت ۱۰۰۰ دانش‌آموز از رشته‌های مختلف را در سال ۹۵ نمایش می‌دهد. اگر زاویه‌های مربوط به رشته‌های علوم انسانی و هنر به ترتیب 90° و 45° باشد، تعداد دانش‌آموزان رشته ریاضی کدام است؟



- (۱) ۱۵۰
 (۲) ۲۵۰
 (۳) ۲۰۰
 (۴) ۳۰۰

۱۳۰- در نمودار بافت‌نگاشت (مستطیلی) زیر، به داده‌های آماری موردنظر سه داده ۱۷، ۲۱ و ۲۲ افزوده می‌شود. درصد فراوانی نسبی دسته چهارم کدام خواهد شد؟ (طول دسته‌ها با هم برابر است.)



- (۱) ۲۵
 (۲) ۱۵
 (۳) ۳۰
 (۴) ۲۰

آمار و احتمال، پیشامدهای مستقل و وابسته -

۱۳۳- در آزمایش تصادفی یک بار پرتاب یک تاس سالم، کدام دو پیشامد مستقل از هم هستند؟

- (۱) $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$
 (۲) $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$
 (۳) $A = \{2, 3\}$ و $B = \{4, 5\}$
 (۴) $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 3, 6\}$

۱۳۴- احتمال قبولی علی و اشکان در درس آمار و احتمال به ترتیب $0/7$ و $0/6$ است. احتمال این که دقیقاً یکی از آن‌ها در این درس قبول شود کدام است؟
 (۱) $0/88$ (۲) $0/46$ (۳) $0/28$ (۴) $0/18$

۱۲۵- جعبه‌ای شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۲ مهره زرد است. دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری از این جعبه بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال حداقل یک مهره انتخابی، قرمز است؟

$$\frac{37}{49} \quad (4)$$

$$\frac{33}{49} \quad (3)$$

$$\frac{27}{49} \quad (2)$$

$$\frac{24}{49} \quad (1)$$

۱۲۶- اگر $P(A \cup B) = 0/9$ ، $P(A) = 0/75$ و A و B دو پیشامد مستقل باشند، حاصل $P(A \cap B')$ کدام است؟

$$0/15 \quad (4)$$

$$0/4 \quad (3)$$

$$0/6 \quad (2)$$

$$0/3 \quad (1)$$

۶۳-

(علیرضا پورقلی)

ابتدا ۱۲۰° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۳} \text{ rad}$$

طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن برابر است با:

$$L = r\theta = ۲۴ \times \frac{۲\pi}{۳} \approx ۱۶ \times ۳ / ۱۴ \approx ۵۰ \text{ cm}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\frac{\alpha + ۶^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{۳R}{\pi} \Rightarrow \frac{\alpha + ۶^\circ}{۱۸۰^\circ} = ۳ \times \frac{R}{\pi} \xrightarrow{\frac{R}{\pi} = \frac{\alpha}{۱۸۰^\circ}} \frac{\alpha + ۶^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{۳\alpha}{۱۸۰^\circ}$$

$$\Rightarrow ۳\alpha = \alpha + ۶^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۶^\circ \Rightarrow \alpha = ۳^\circ \Rightarrow \frac{۳^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۶} \text{ rad}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲

۱

۶۵-

(امیر حسین گل‌سرفی)

زاویه مرکزی O برابر است با ۳۰ درجه یا همان $\frac{\pi}{۶}$ رادیان. بنابراین داریم:

$$\widehat{AB} = ۱۳۰۰\pi = \frac{\pi}{۶} \times OA \Rightarrow OA = ۱۳۰۰\pi \times \frac{۶}{\pi} = ۷۸۰۰$$

$OA =$ فاصله ماهواره از سطح زمین + شعاع زمین

$\Rightarrow ۷۸۰۰ = ۶۴۰۰ +$ فاصله ماهواره از سطح زمین

$\Rightarrow ۱۴۰۰ \text{ km} =$ فاصله ماهواره از سطح زمین

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲

۱

(امین قربانعلی پور)

مسافتی که یک نقطه روی قرقره بزرگ تر طی می کند برابر است با:

$$L = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi \text{ cm}$$

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم وصل شده اند، پس مسافتی که یک نقطه روی قرقره کوچک تر طی می کند نیز برابر $5\pi \text{ cm}$ است.

$$\theta' = \frac{L'}{r'} = \frac{5\pi}{2/5} = 2\pi$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سید عادل حسینی)

ابتدا زاویه دوران عقربه دقیقه شمار را به دست می آوریم:

$$8\theta_1 = 16\pi \Rightarrow \theta_1 = 2\pi \text{ rad}$$

عقربه دقیقه شمار یک دور کامل را طی کرده است. این یعنی مدت زمان مورد نظر یک ساعت بوده است. حال می دانیم که در یک ساعت، عقربه

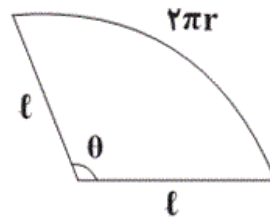
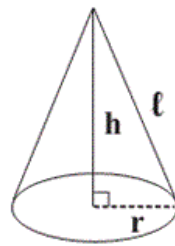
ساعت شمار $\frac{\pi}{6}$ رادیان می چرخد. بنابراین مسافت طی شده توسط نوک

$$6 \times \frac{\pi}{6} = \pi \quad \text{سانتی متر} \quad \text{عقربه ساعت شمار برابر است با:}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

شکل گسترده مخروط، قطاعی است که شعاع آن برابر مولد مخروط (ℓ) و طول کمان آن برابر محیط قاعده مخروط ($2\pi r$) است. از روی شکل مخروط داریم:



$$\begin{aligned} \ell^2 &= h^2 + r^2 = (2\sqrt{2}r)^2 + r^2 \\ &= 8r^2 + r^2 = 9r^2 \Rightarrow \ell = 3r \end{aligned}$$

طول هر کمان از دایره، برابر حاصل ضرب اندازه شعاع در زاویه مرکزی مقابل به کمان برحسب رادیان است، بنابراین:

$$2\pi r = \ell\theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi r}{\ell} \xrightarrow{\ell=3r} \theta = \frac{2\pi r}{3r} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

حالا زاویه را برحسب درجه به دست می آوریم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{2}{3} \times 180^\circ = 120^\circ$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با استفاده از رابطه های $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ و $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ ، داریم:

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۸ تا ۱۰۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی بهرمندپور)

$$a = \frac{3 \cos 25^\circ - \sin 34^\circ}{\sin 11^\circ + 2 \cos 16^\circ} = \frac{3 \cos(27^\circ - 2^\circ) - \sin(36^\circ - 2^\circ)}{\sin(9^\circ + 2^\circ) + 2 \cos(18^\circ - 2^\circ)}$$

$$= \frac{-3 \sin 2^\circ + \sin 2^\circ}{\cos 2^\circ - 2 \cos 2^\circ} = \frac{-2 \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ} = 2 \tan 2^\circ$$

$$\Rightarrow 2 \tan 2^\circ = a \Rightarrow \tan 2^\circ = \frac{a}{2}$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{3}{5} \Rightarrow -\sin \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{3}{5}$$

$$A = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) + \cos(3\pi - \theta) = -2 \cos \theta - \cos \theta = -3 \cos \theta$$

از طرفی با استفاده از اتحاد $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ، داریم:

$$\cos \theta = -\frac{4}{5} \quad \text{یا} \quad \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$A_{\max} = -3 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5} \quad \text{پس حداکثر } A \text{ برابر است با:}$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴ ✓

۳

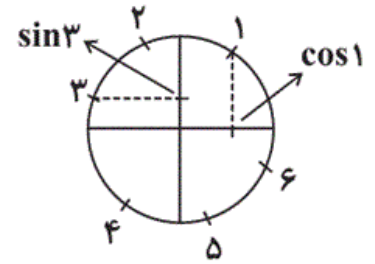
۲

۱

ابتدا توجه کنید که:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ rad} \approx 114^\circ \\ 3 \text{ rad} \approx 171^\circ \\ 4 \text{ rad} \approx 228^\circ \end{cases}$$

گزینه «۱» نادرست است، زیرا: $\cos(-1) < 0 < \sin 4$ گزینه «۲» نادرست است، زیرا: $\cos 2 < 0 < \sin 1$ گزینه «۴» نادرست است، زیرا: $\cos(-2) < 0 < \sin(-4)$

گزینه «۳» با توجه به دایره مثلثاتی (شکل بالا) درست است.

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۱۰۴)

۴

۳ ✓

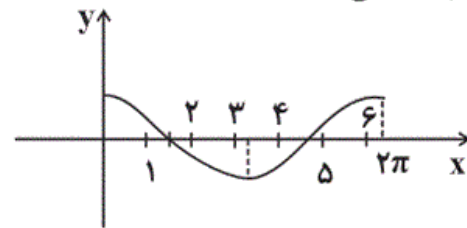
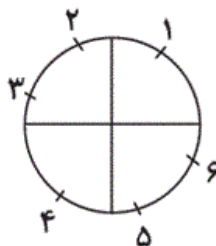
۲

۱

-۷۴

(سعید مدیرفراسانی)

اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند. با توجه به دایره مثلثاتی و نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، مقدار تابع $y = \cos x$ به ازای اعداد صحیح ۰، ۱، ۵ و ۶ مثبت و به ازای اعداد صحیح ۲، ۳ و ۴ منفی است.



پس مجموع اعداد صحیح عضو دامنه تابع $y = \sqrt{\cos x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر است با:

$$0 + 1 + 5 + 6 = 12$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

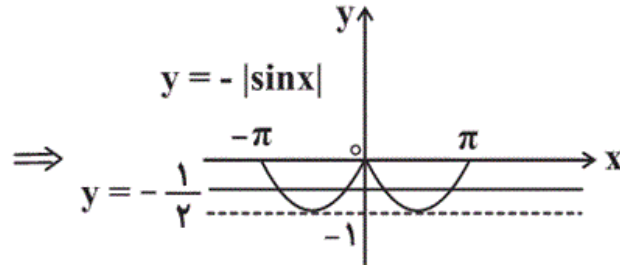
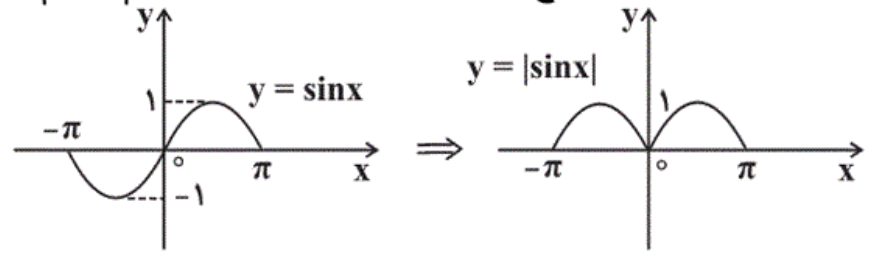
۴

۳ ✓

۲

۱

کافی است نمودارهای این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم نماییم:



نمودارهای رسم شده در بازه $(-\pi, \pi)$ در ۴ نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۴ ✓

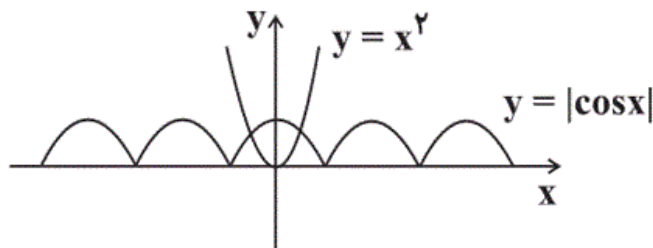
۳

۲

۱

$$\frac{|\cos x|}{x^2} = 1 \xrightarrow{x \neq 0} |\cos x| = x^2 \quad (1)$$

محل برخورد نمودارهای دو تابع $y = |\cos x|$ و $y = x^2$ جواب‌های معادله (۱) است.



معادله مورد نظر دو جواب دارد. حال چون هر دو تابع $y = x^2$ و $y = |\cos x|$ نسبت به محور y ها قرینه‌اند، محل برخوردها نسبت به محور y ها قرینه است. پس مجموع جواب‌ها صفر است.

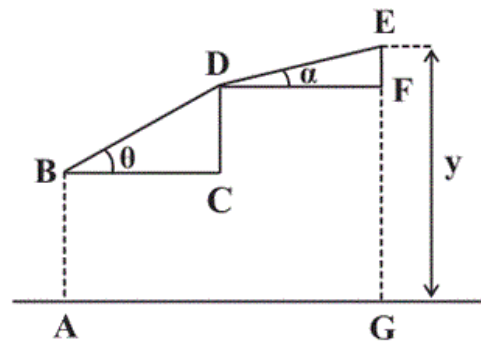
(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۴

۳

۲

۱



$$\sin \alpha = \frac{EF}{DE} \Rightarrow EF = DE \sin \alpha$$

$$\sin \theta = \frac{DC}{BD} \Rightarrow DC = BD \sin \theta$$

ارتفاع جسم از سطح زمین را به صورت تابع مثلثاتی زیر می‌نویسیم:

$$y = EF + DC + AB$$

$$\Rightarrow y = DE \sin \alpha + BD \sin \theta + AB$$

$$\frac{\alpha = -45^\circ, DE = 25\sqrt{2} \text{ cm}}{BD = 80 \text{ cm}, \theta = 0^\circ, AB = 40 \text{ cm}} \rightarrow EG = 25\sqrt{2} \sin(-45^\circ)$$

$$+ 80 \sin(0^\circ) + 40 = 25\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 + 40 = -25 + 40 = 15 \text{ cm}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

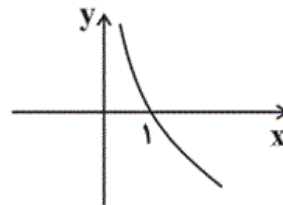
 ۴

 ۳

 ۲

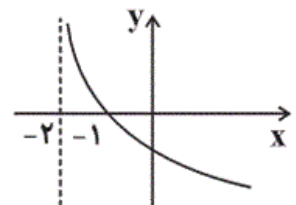
 ۱

(سیدمحمد صالح ارشاد)



$$y = \log_{\frac{3}{3}} x$$

۲ واحد به سمت چپ



$$y = \log_{\frac{3}{3}} (x+2)$$

پس نمودار این تابع از ناحیه اول نمی‌گذرد.

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

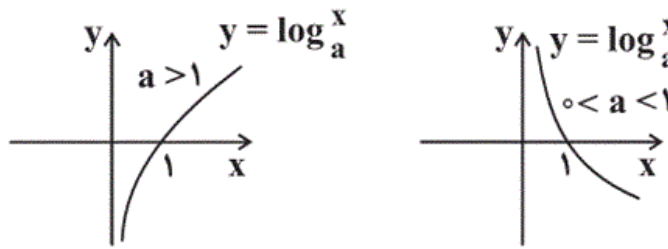
 ۴

 ۳

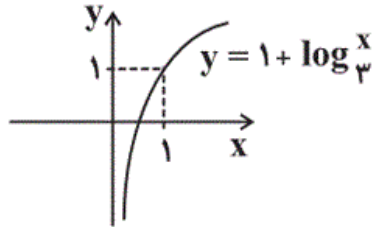
 ۲

 ۱

تابع $y = \log_a^x$ یک به یک است و برای x های منفی تعریف نمی شود.



در گزینه «۳» تابع $y = 1 + \log_3^x$ محور x ها را قطع می کند.



اگر پایه لگاریتم بین صفر و یک باشد، مقدار لگاریتم اعداد بزرگ تر از یک منفی می شود. پس گزینه «۱» نادرست است.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۱۰ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با استفاده از خواص لگاریتم داریم:

$$A = \log_{\frac{1}{9}}^{\sqrt[3]{9}} = \log_{\frac{1}{9}}^a + \log_{\frac{1}{9}}^{\sqrt[3]{9}} = \log_{3^{-2}}^a + \log_{3^{-2}}^{\sqrt[3]{9}} \\ = -\frac{1}{2} \log_3^a + \frac{2}{-2} \log_3^{\sqrt[3]{9}} \xrightarrow{\log_3^a = \frac{2}{3}} A = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{6} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۱۶ تا ۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهرداد اسپیدکار)

$$\log^x \sqrt{a} = \log^y_{a\sqrt{a}} \Rightarrow \log^x_{a^{\frac{1}{2}}} = \log^y_{a \times a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \log^x_{a^{\frac{1}{2}}} = \log^y_{a^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow 2 \log_a^x = \frac{3}{2} \log_a^y$$

$$\Rightarrow \log_a^{x^2} = \log_a^{y^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow x^2 = y^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{توان ۴}} (x^2)^4 = (y^{\frac{3}{2}})^4 \Rightarrow x^8 = y^6$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲✓

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

$$\begin{aligned} (1) \left\{ \log E_1 = 11/8 + 1/5 M_1 \right. \\ (2) \left\{ \log E_2 = 11/8 + 1/5 (M_1 + 2) \right. \end{aligned} \xrightarrow{\text{تفریق}} \log E_2 - \log E_1 = 3$$

$$\Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 3 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^3 = 1000 \Rightarrow E_2 = 1000 E_1$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۸ تا ۹۰)

۴✓

۳

۲

۱

$$\Rightarrow \begin{cases} \log y = -1 \\ \text{یا} \\ \log x = -1 \end{cases}$$

از طرفی $x + y = 2$ است، پس:

$$\begin{cases} \log y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{10} \Rightarrow x = 1/9 \Rightarrow x - y = 1/8 \\ \left\{ \begin{array}{l} \log y = -1 \\ x + y = 2 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10} \Rightarrow y = 1/9 \Rightarrow y - x = 1/8 \\ \left\{ \begin{array}{l} \log x = -1 \\ x + y = 2 \end{array} \right. \end{cases}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲✓

۱

۱۰۱-

(امیرحسین ابومحبوب)

تبدیل T را تبدیل همانی گوئیم، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم: $T(A) = A$

تبدیل همانی هر نقطه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند. پس تمام نقاط صفحه نقطه ثابت تبدیل هستند (درستی گزینه ۲)

اگر دو نقطه A و B را داشته باشیم برای تبدیل همانی T داریم: $T(A) = A$ و $T(B) = B$ پس $AB = AB$. بنابراین تبدیل همانی همواره طولپاست. (درستی گزینه ۱)

در انتقال غیرهمانی موقعیت تمام نقاط را تغییر می‌دهیم، پس این تبدیل هیچ‌گاه نقطه ثابت ندارد. (درستی گزینه ۴)

تبدیل بازتاب تبدیل همانی نیست، اما بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد. (نادرستی گزینه ۳) (هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۵۰)

۴

۳ ✓

۲

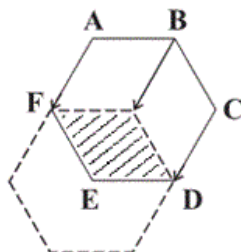
۱

۱۰۲-

(سیدسروش کریمی‌مراهی)

چون تبدیل انتقال طولپاست، پس شش ضلعی منتظم و تصویرش هم‌نهشت هستند، یعنی تمام اضلاع برابر بوده و ناحیه مشترک یک لوزی است. مساحت این لوزی شامل دو مثلث متساوی‌الاضلاع است و مساحت شش ضلعی منتظم شامل شش مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس نسبت

مساحت‌های آن‌ها $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ می‌باشد.



(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴

۳

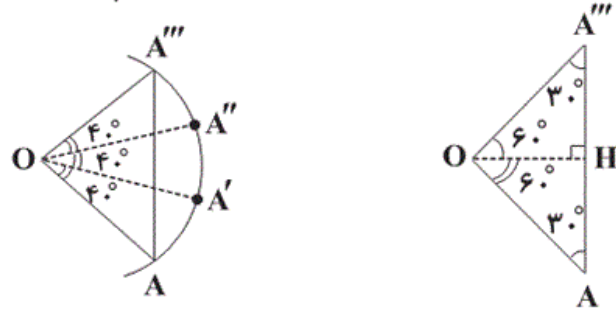
۲ ✓

۱

(مسئله فندان)

$R(R(R(A)))$ سه بار ترکیب تبدیل دوران 40° درجه به مرکز O است که معادل

تبدیل دوران به مرکز O با زاویه $120^\circ = 3 \times 40^\circ$ است، مطابق شکل داریم:



$$\sin 6^\circ = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{OA} \Rightarrow OA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

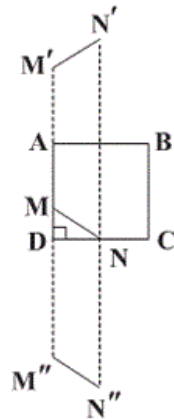
(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

۴

۳

۲ ✓

۱



$$\begin{cases} MM'' = 2AD = 4 \\ DN = \frac{CD}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{MNN''M''} = MM'' \times DN = 4$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰، ۴۱، ۴۴ و ۴۵)

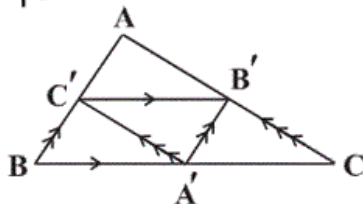
۴ ✓

۳

۲

۱

تجانس تبدیلی است که شیب خطوط را حفظ می کند، با توجه به این که این تجانس معکوس است و مثلث $A'B'C'$ در مثلث ABC محاط است، داریم:



$$\begin{cases} B'C' \parallel A'B \\ BC \parallel A'B' \end{cases} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } A'B'C'B \Rightarrow A'B = B'C'$$

$$\begin{cases} B'C' \parallel A'C \\ B'C \parallel A'C' \end{cases} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } A'C'B'C \Rightarrow A'C = B'C'$$

$$\Rightarrow B'C' = \frac{BC}{2}$$

به طرز مشابه می توان نوشت: $A'B' = \frac{AB}{2}$ و $A'C' = \frac{AC}{2}$.

پس قدرمطلق نسبت تجانس برابر $\frac{1}{2}$ و مقدار نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است.

(هندسه ۲- صفحه های ۴۵ تا ۵۱)

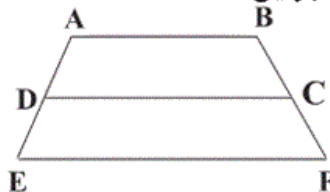
۴

۳

۲

۱ ✓

دو پاره خط AD و DE همراستا و متجانس یکدیگرند، پس مرکز تجانس در امتداد آنهاست، در مورد دو پاره خط BC و CF نیز همین موضوع برقرار است؛ پس مرکز تجانس، نقطه برخورد امتداد این دو ضلع است. از طرفی دو شکل متجانس همواره متشابه هستند. بنابراین:



$$\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{EF} \Rightarrow \frac{4}{CD} = \frac{CD}{9}$$

$$\Rightarrow CD = 6$$

حال با توجه به این که با این تجانس AB بر CD تصویر می شود،

$$K = \frac{CD}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

می توان نوشت:

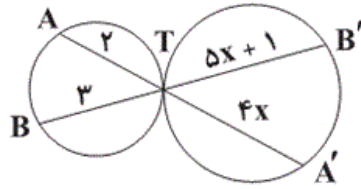
(هندسه ۲- صفحه های ۴۵ تا ۵۱)

۴ ✓

۳

۲

۱



$$\left\{ \begin{array}{l} |K| = \frac{A'T}{AT} = \frac{4x}{2} \\ |K| = \frac{B'T}{BT} = \frac{5x+1}{3} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{2} = \frac{5x+1}{3} \Rightarrow x=1$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۴

۳ ✓

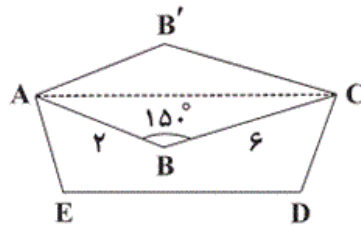
۲

۱

۱۰۸-

(علی فتح‌آبادی)

مطابق شکل نقطه B را نسبت به AC بازتاب می‌دهیم، میزان افزایش مساحت، اندازه مساحت چهارضلعی ABCB' یا دو برابر مساحت مثلث ABC است، پس:



$$S_{ABCB'} = 2S_{ABC}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin 15^\circ \right)$$

$$= 2 \times 3 = 6$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۴

۳

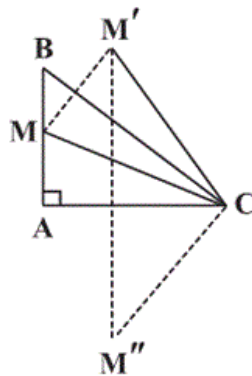
۲

۱ ✓

۱۰۹-

(علی فتح‌آبادی)

ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع معادل یک دوران است و اندازه زاویه دوران دو برابر زاویه بین محورها می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویه MAC داریم:



$$CM^2 = AM^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow CM = 5$$

از طرفی M'' دوران یافته نقطه M به مرکز C و زاویه دوران دو برابر

$$\hat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \hat{MCM''} = 90^\circ$$

است. پس:

$$R(M) = M'' \Rightarrow CM = CM'' = 5$$

بنابراین مثلث MCM'' قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، در نتیجه:

$$MM'' = \sqrt{2} CM = \sqrt{2} \times 5 = 5\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

۴

۳

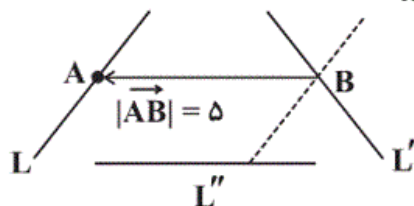
۲ ✓

۱

-۱۱۰

(علی فتح‌آبادی)

با استفاده از انتقال، خط L را با یک بردار به اندازه 5 و موازی خط L'' انتقال می‌دهیم تا خط L' را در نقطه B قطع کند، سپس این نقطه را با همین بردار و در خلاف جهت انتقال می‌دهیم تا خط L را در نقطه A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.



(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۰، ۴۱، ۴۴ و ۴۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۱۸

(سید عادل حسینی)

ابتدا زاویه دوران عقربه دقیقه‌شمار را به دست می‌آوریم:

$$8\theta_1 = 16\pi \Rightarrow \theta_1 = 2\pi \text{ rad}$$

عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل را طی کرده است. این یعنی مدت زمان مورد نظر یک ساعت بوده است. حال می‌دانیم که در یک ساعت، عقربه

ساعت‌شمار $\frac{\pi}{6}$ رادیان می‌چرخد. بنابراین مسافت طی شده توسط نوک

$$6 \times \frac{\pi}{6} = \pi \text{ سانتی‌متر} \quad \text{عقربه ساعت‌شمار برابر است با:}$$

(مسایان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

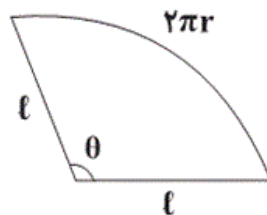
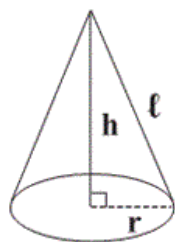
۴

۳

۲

۱ ✓

شکل گسترده مخروط، قطاعی است که شعاع آن برابر مولد مخروط (l) و طول کمان آن برابر محیط قاعده مخروط ($2\pi r$) است. از روی شکل مخروط داریم:



$$l^2 = h^2 + r^2 = (2\sqrt{2}r)^2 + r^2 = 8r^2 + r^2 = 9r^2 \Rightarrow l = 3r$$

طول هر کمان از دایره، برابر حاصل ضرب اندازه شعاع در زاویه مرکزی مقابل به کمان برحسب رادیان است، بنابراین:

$$2\pi r = l\theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi r}{l} \xrightarrow{l=3r} \theta = \frac{2\pi r}{3r} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

حالا زاویه را برحسب درجه به دست می آوریم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{2}{3} \times 180^\circ = 120^\circ$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا 120° را به رادیان تبدیل می کنیم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن برابر است با:

$$L = r\theta = 24 \times \frac{2\pi}{3} \approx 16 \times 3 / 14 \approx 50 \text{ cm}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر اندازه زاویه برحسب درجه α و برحسب رادیان R باشد می توان گفت:

$$\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

حال اندازه زاویه برحسب درجه $\alpha + 60^\circ$ و برحسب رادیان $3R$ می باشد، پس:

$$\frac{\alpha + 60^\circ}{180^\circ} = \frac{3R}{\pi} \Rightarrow \frac{\alpha + 60^\circ}{180^\circ} = 3 \times \frac{R}{\pi} \xrightarrow{\frac{R}{\pi} = \frac{\alpha}{180^\circ}} \frac{\alpha + 60^\circ}{180^\circ} = \frac{3\alpha}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow 3\alpha = \alpha + 60^\circ \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

زاویه مرکزی O برابر است با 30° درجه یا همان $\frac{\pi}{6}$ رادیان. بنابراین داریم:

$$\widehat{AB} = 1300\pi = \frac{\pi}{6} \times OA \Rightarrow OA = 1300\pi \times \frac{6}{\pi} = 7800$$

OA = فاصله ماهواره از سطح زمین + شعاع زمین

$$\Rightarrow 7800 = 6400 + \text{فاصله ماهواره از سطح زمین}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله ماهواره از سطح زمین} = 1400 \text{ km}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امین قربانعلی پور)

مسافتی که یک نقطه روی قرقره بزرگ تر طی می کند برابر است با:

$$L = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi \text{ cm}$$

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم وصل شده اند، پس مسافتی که یک نقطه روی قرقره کوچک تر طی می کند نیز برابر $5\pi \text{ cm}$ است.

$$\theta' = \frac{L'}{r'} = \frac{5\pi}{2/5} = 2\pi$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سیر عادل حسینی)

$$P_{ABCD} = |\widehat{AB}| + BC + |\widehat{CD}| + AD$$

$$= 2R + R - r + 2r + R - r = 4R = 2\pi r \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\frac{20^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{9}$$

ابتدا زاویه 20° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

پس مساحت قطاع OHA برابر است با:

$$S_{\text{قطاع OHA}} = \frac{1}{2} r^2 \theta \Rightarrow S = \frac{1}{2} (4)^2 \times \frac{\pi}{9} = \frac{16\pi}{18} = \frac{8\pi}{9}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه OHB می‌توان نوشت:

$$\tan \frac{\pi}{9} = \frac{BH}{OH} \xrightarrow{OH=4} \tan \frac{\pi}{9} = \frac{BH}{4} \Rightarrow BH = 4 \tan \frac{\pi}{9}$$

$$S_{\Delta \text{ OHB}} = \frac{1}{2} OH \times BH = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \tan \frac{\pi}{9} = 8 \tan \frac{\pi}{9}$$

و همچنین داریم:

پس مساحت قسمت سایه‌خورده برابر است با:

$$S_{\text{سایه‌خورده}} = S_{\Delta \text{ OHB}} - S_{\text{قطاع OHA}}$$

$$= 8 \left(\tan \frac{\pi}{9} \right) - \frac{8\pi}{9} = 8 \left(\left(\tan \frac{\pi}{9} \right) - \frac{\pi}{9} \right)$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۹۴

(مسئله منطقی ابراهیمی)

گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» نادرست هستند، زیرا:

گزینه «۱»: باید روی محیط دایره‌ای به شعاع ۱، به اندازه ۱ واحد حرکت کنیم تا زاویه مرکزی ۱ رادیان باشد.

گزینه «۲»: π° تقریباً $3/14^\circ$ است و ۱ رادیان تقریباً 57° می‌باشد.

گزینه «۴»: $\frac{\pi}{12}$ رادیان معادل 15° است. $\frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$ درجه است.

$$\frac{3/14}{180^\circ} = \frac{D}{\pi} \Rightarrow D = \frac{3/14}{\pi} \approx 1^\circ$$

گزینه «۳» صحیح است، زیرا:

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(داوود بوالسنی)

گزینه «۱»: در نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ وقتی x افزایش می‌یابد، مقدار y

کاهش می‌یابد. از اینکه $\frac{1}{200} < 200$ ، نتیجه می‌شود که

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{200} > \log_{\frac{1}{2}} 200$$

گزینه «۲»: با رسم نمودارهای $y_1 = \log_{\frac{3}{2}} x$ و $y_2 = \log_{\frac{1}{2}} x$ در یک دستگاه

مختصات معلوم می‌شود که $\log_{\frac{3}{2}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} 2$. به شکل رسم شده توجه کنید.

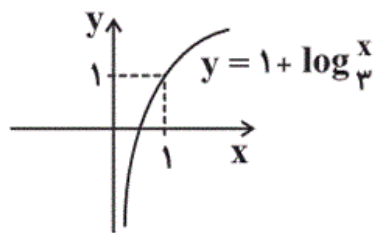
۴

۳

۲

۱ ✓

در گزینه «۳» تابع $y = 1 + \log_{\frac{x}{3}}$ محور x ها را قطع می‌کند.



اگر پایه لگاریتم بین صفر و یک باشد، مقدار لگاریتم اعداد بزرگ‌تر از یک منفی می‌شود. پس گزینه «۱» نادرست است.

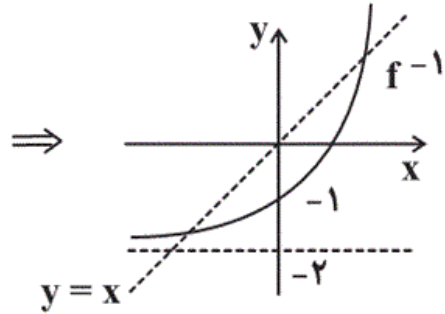
(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۴

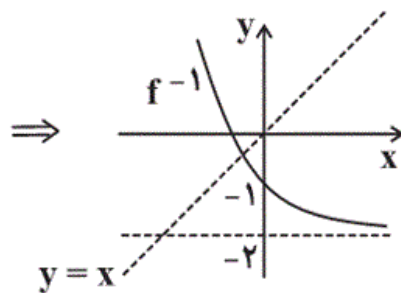
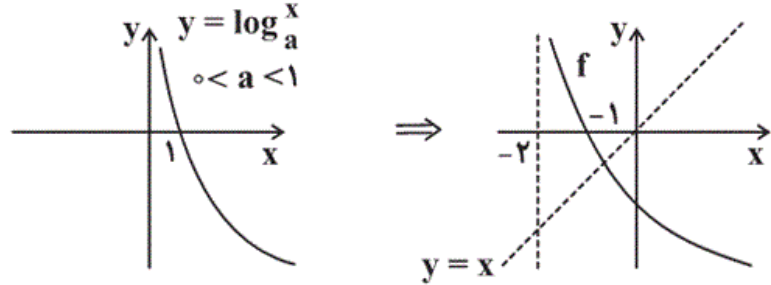
۳

۲

۱ ✓



اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار توابع f و f^{-1} به صورت زیر می‌شود:



پس نمودار f^{-1} الزاماً از نواحی سوم و چهارم مختصات عبور می‌کند.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴ ✓

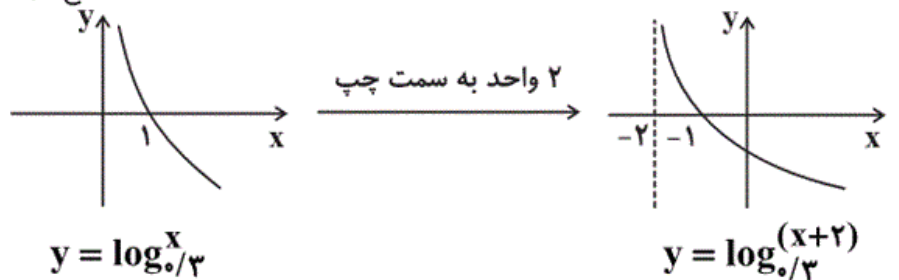
۳

۲

۱

-۸۹

(سیدمحمد صالح ارشار)



پس نمودار این تابع از ناحیه اول نمی‌گذرد.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهرداد اسپیکر)

$$\log_{\sqrt{a}}^x = \log_{a^{\frac{1}{2}}}^y \Rightarrow \log_{a^{\frac{1}{2}}}^x = \log_{a \times a^{\frac{1}{2}}}^y$$

$$\Rightarrow \log_{a^{\frac{1}{2}}}^x = \log_{a^{\frac{3}{4}}}^y \Rightarrow 2 \log_a^x = \frac{3}{4} \log_a^y$$

$$\Rightarrow \log_a^{x^2} = \log_a^{y^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow x^2 = y^{\frac{3}{4}} \xrightarrow{\text{توان ۴}} (x^2)^4 = (y^{\frac{3}{4}})^4 \Rightarrow x^8 = y^3$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سیرمحمد صالح ارشارد)

$$\log xy + \log x \log y = -1 \Rightarrow \log x + \log y + \log x \log y = -1$$

$$\Rightarrow (\log x + \log x \log y) + (\log y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \log x(\log y + 1) + (\log y + 1) = 0 \Rightarrow (\log y + 1)(\log x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log y = -1 \\ \text{یا} \\ \log x = -1 \end{cases}$$

از طرفی $x + y = 2$ است، پس:

$$\begin{cases} \log y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{10} \Rightarrow x = 1/9 \Rightarrow x - y = 1/8 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10} \Rightarrow y = 1/9 \Rightarrow y - x = 1/8 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

$$\begin{aligned} (1) \left\{ \log E_1 = 11/8 + 1/5 M_1 \right. \\ (2) \left\{ \log E_2 = 11/8 + 1/5 (M_1 + 2) \right. \end{aligned} \xrightarrow{\text{تفریق}} \log E_2 - \log E_1 = 2$$

$$\Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^2 = 1000 \Rightarrow E_2 = 1000 E_1$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۸ تا ۹۰)

□۴✓

□۳

□۲

□۱

(مهدی طاهری)

با استفاده از خواص لگاریتم داریم:

$$\begin{aligned} A = \log_{\frac{1}{9}} a^{\sqrt[3]{9}} &= \log_{\frac{1}{9}} a + \log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{9} = \log_{3^{-2}} a + \log_{3^{-2}} 3^{\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \log_3 a + \frac{2}{-2} \log_3 3 \xrightarrow{\log_3 a = \frac{2}{3}} A = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right) - \frac{2}{6} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

□۴✓

□۳

□۲

□۱

(فرشاد فرامرزی)

ابتدا با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، معادله داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log_x (\sqrt{2} + x) + \log_x (\sqrt{2} - x) = 4$$

$$\Rightarrow \log_x (2 - x^2) = 4 \Rightarrow 2 - x^2 = x^4 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

با انتخاب $x^2 = t$ ، داریم:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ جواب ندارد.} \\ t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

پایه لگاریتم نمی‌تواند ± 1 باشد، بنابراین معادله جواب حقیقی ندارد.

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

□۴

□۳

□۲

□۱✓

با توجه به ویژگی $\log_b^a = c \Leftrightarrow a = b^c$ می توان نوشت:

$$3^{2x+1} = 4 \times 3^x - 1 \Rightarrow 3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^x + 1 = 0 \xrightarrow{3^x=t}$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (3t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0 \\ t=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{حاصل جمع جواب ها} = -1 \\ \text{حاصل ضرب جواب ها} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل جمع} - \text{حاصل ضرب} = 1$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۱۰ تا ۹۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سید مدیر فراسانی)

$$\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \Rightarrow m = \frac{1}{6}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = n \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow m \log \sqrt{125} = m \log \sqrt{5^3} = m \log 5^{\frac{3}{2}} = m \times \frac{3}{2} \log 5$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \log 5 = \frac{1}{4} (1 - \log 2) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{4n}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

تبدیل همانی هر نقطه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند. پس تمام نقاط صفحه نقطه ثابت تبدیل هستند (درستی گزینه ۲)

اگر دو نقطه A و B را داشته باشیم برای تبدیل همانی T داریم:
 $T(A) = A$ و $T(B) = B$ پس $AB = AB$. بنابراین تبدیل همانی همواره طولیاست. (درستی گزینه ۱)

در انتقال غیرهمانی موقعیت تمام نقاط را تغییر می‌دهیم، پس این تبدیل هیچ‌گاه نقطه ثابت ندارد. (درستی گزینه ۴)

تبدیل بازتاب تبدیل همانی نیست، اما بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.
(نادرستی گزینه ۳) (هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱

-۱۱۲

(سید عادل حسینی)

$$\frac{۳۶^\circ}{۴۵^\circ} = ۸, \quad \frac{۳۶^\circ}{۳۰^\circ} = ۱۲$$

اگر رأس A از چندضلعی را ۸ بار به اندازه ۴۵° درجه دوران بدهیم، بر خودش منطبق می‌شود (دوران با زاویه $۳۶^\circ = ۸ \times ۴۵^\circ$ است که معادل تبدیل همانی است). پس تعداد رأس‌ها مضرب ۸ است.

همچنین اگر رأس A از چندضلعی را ۱۲ بار به اندازه ۳۰° درجه دوران بدهیم، بر خودش منطبق می‌شود (دوران با زاویه $۳۶^\circ = ۱۲ \times ۳۰^\circ$ است که معادل تبدیل همانی است). پس تعداد رأس‌ها مضرب ۱۲ نیز می‌باشد. کوچک‌ترین عددی که هم مضرب ۸ و هم مضرب ۱۲ است، عدد ۲۴ است. پس تعداد اضلاع این چندضلعی همواره مضرب ۲۴ است.

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

۴

۳

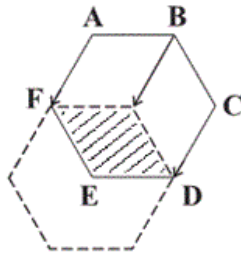
۲

۱

(سیدسروش کریمی مدراهی)

چون تبدیل انتقال طولپاست، پس شش ضلعی منتظم و تصویرش هم نهشت هستند، یعنی تمام اضلاع برابر بوده و ناحیه مشترک یک لوزی است. مساحت این لوزی شامل دو مثلث متساوی الاضلاع است و مساحت شش ضلعی منتظم شامل شش مثلث متساوی الاضلاع است، پس نسبت

مساحت‌های آنها $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ می‌باشد.



(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴

۳

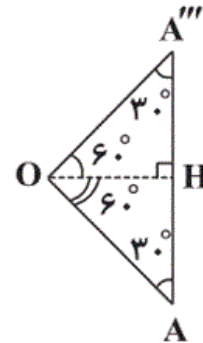
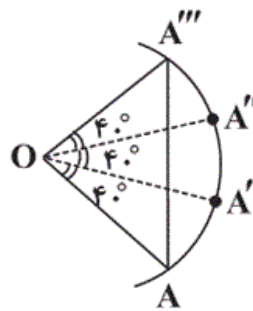
۲

۱

(مهمر فندان)

$R(R(R(A)))$ سه بار ترکیب تبدیل دوران 40° درجه است که معادل

تبدیل دوران به مرکز O با زاویه $120^\circ = 3 \times 40^\circ$ است، مطابق شکل داریم:



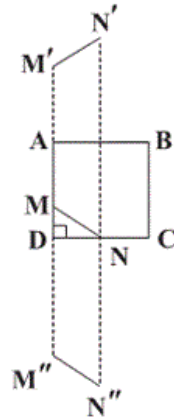
۴

۳

۲

۱

دو محور بازتاب AB و CD موازی هستند، پس ترکیب این دو بازتاب معادل تبدیل انتقال است، پس $M''N''$ انتقال یافته MN است. طول بردار انتقال، دو برابر فاصله AB تا CD است و راستای انتقال عمودی است، بنابراین $MNN''M''$ متوازی الاضلاع است و داریم:



$$\begin{cases} MM'' = 2AD = 4 \\ DN = \frac{CD}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow S_{MNN''M''} = MM'' \times DN = 4$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰، ۴۱، ۴۴ و ۴۵)

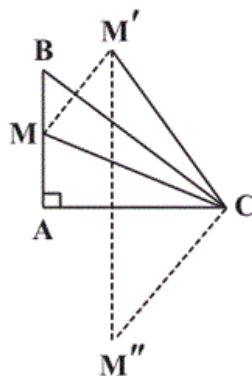
۴

۳

۲

۱

ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع معادل یک دوران است و اندازه زاویه دوران دو برابر زاویه بین محورها می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویه MAC داریم:



$$CM^2 = AM^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow CM = 5$$

از طرفی M'' دوران یافته نقطه M به مرکز C و اندازه زاویه دوران دو برابر زاویه \hat{ACB} است. پس:

$$\hat{ACB} = 45^\circ \Rightarrow \hat{MCM''} = 90^\circ$$

$$R(M) = M'' \Rightarrow CM = CM'' = 5$$

بنابراین مثلث MCM'' قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، در نتیجه:

$$MM'' = \sqrt{2} CM = \sqrt{2} \times 5 = 5\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{cases} B'C' \parallel A'C \\ B'C \parallel A'C \end{cases} \Rightarrow A'C'B'C \Rightarrow A'C = B'C' \\ \Rightarrow B'C' = \frac{BC}{2}$$

به طرز مشابه می توان نوشت: $A'B' = \frac{AB}{2}$ و $A'C' = \frac{AC}{2}$

پس قدرمطلق نسبت تجانس برابر $\frac{1}{2}$ و مقدار نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است.

(هندسه ۲- صفحه های ۴۵ تا ۵۱)

۴

۳

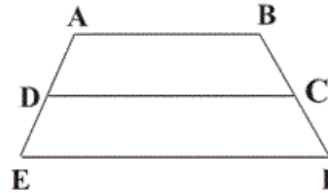
۲

۱ ✓

۱۱۸-

(نرکس کارگر)

دو پاره خط AD و DE همراستا و متجانس یکدیگرند، پس مرکز تجانس در امتداد آنهاست، در مورد دو پاره خط BC و CF نیز همین موضوع برقرار است؛ پس مرکز تجانس، نقطه برخورد امتداد این دو ضلع است. از طرفی دو شکل متجانس همواره متشابه هستند. بنابراین:



$$\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{EF} \Rightarrow \frac{4}{CD} = \frac{CD}{9} \\ \Rightarrow CD = 6$$

حال با توجه به این که با این تجانس AB بر CD تصویر می شود،

$$K = \frac{CD}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

می توان نوشت:

(هندسه ۲- صفحه های ۴۵ تا ۵۱)

۴ ✓

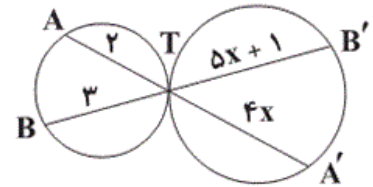
۳

۲

۱

دو دایره همواره مجانس بوده و مرکز تجانس همواره روی خط‌المركزین و یا امتداد آن قرار دارد. حال از آنجایی که در این حالت دو دایره بر هم مماس‌اند، یکی از مراکز تجانس نقطه تماس دو دایره است. (زیرا تصویر نقطه تماس بر خودش منطبق می‌شود و نقطه ثابت تبدیل تجانس است، پس مرکز تجانس است.) حال با توجه به شکل و تعریف تجانس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} |K| = \frac{A'T}{AT} = \frac{4x}{2} \\ |K| = \frac{B'T}{BT} = \frac{5x+1}{3} \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow \frac{4x}{2} = \frac{5x+1}{3} \Rightarrow x=1$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

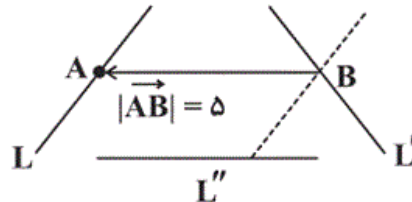
۴

۳ ✓

۲

۱

با استفاده از انتقال، خط L را با یک بردار به اندازه ۵ و موازی خط L'' انتقال می‌دهیم تا خط L' را در نقطه B قطع کند، سپس این نقطه را با همین بردار و در خلاف جهت انتقال می‌دهیم تا خط L را در نقطه A قطع کند. پاره خط AB جواب مسأله است.



(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰، ۴۱، ۴۴ و ۴۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر پیشامد A داشتن فقط یک برادر کوچک تر و پیشامدهای B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 به ترتیب انتخاب فرزندان اول، دوم، سوم و چهارم باشند، آن گاه پیشامدهای $(A | B_1)$ ، $(A | B_2)$ و $(A | B_3)$ به ترتیب به صورت «فقط یکی از فرزندان دوم تا چهارم پسر باشند»، «فقط یکی از فرزندان سوم و چهارم پسر باشند» و «فرزند چهارم پسر باشد» تعریف می‌شوند. همچنین پیشامدهای A و B_4 ناسازگارند، پس پیشامد $(A | B_4)$ تهی است. در نتیجه داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)$$

$$+ P(B_3)P(A | B_3) + P(B_4)P(A | B_4)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\binom{3}{1}}{2^3} + \frac{1}{4} \times \frac{\binom{2}{1}}{2^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{32} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{32} + \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{11}{32}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

اگر پیشامد اتمام به موقع کار را با A و پیشامدهای رخ دادن اعتصاب و عدم رخ دادن اعتصاب را به ترتیب با B_1 و B_2 نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} P(B_2 | A) &= \frac{P(B_2)P(A | B_2)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_2)P(A | B_2)}{P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)} \\ &= \frac{0/2 \times 0/6}{0/8 \times 0/3 + 0/2 \times 0/6} = \frac{0/12}{0/24 + 0/12} = \frac{0/12}{0/36} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مجموع فراوانی‌های نسبی در یک جدول فراوانی برابر یک است، بنابراین داریم:

$$0/1 + z + 0/4 = 1 \Rightarrow z = 0/5$$

از طرفی با توجه به رابطه بین فراوانی و فراوانی نسبی دسته‌ها داریم:

$$\frac{0/1}{y} = \frac{0/5}{15} = \frac{0/4}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1/5}{0/5} = 3 \\ x = \frac{6}{0/5} = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{z} = \frac{12-3}{0/5} = \frac{9}{0/5} = 18$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مجموع فراوانی‌های نسبی ۵ دسته باید برابر یک باشد، بنابراین داریم:

$$\text{مجموع فراوانی نسبی دسته سوم} = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{8}\right) = 1 - \frac{16+15}{40} = 1 - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}$$

$$\text{زاویه مرکزی متناظر با دسته سوم} = \frac{9}{40} \times 360^\circ = 81^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امین کریمی)

-۱۲۹

$$\text{مجموع زاویه‌های رشته‌های ریاضی و تجربی} = 360^\circ - (90^\circ + 45^\circ)$$

$$\Rightarrow 6x + 9x = 360^\circ - 135^\circ \Rightarrow 15x = 225^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

$$\text{زاویه رشته ریاضی} = 6 \times 15^\circ = 90^\circ$$

$$\text{تعداد دانش‌آموزان رشته ریاضی} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times 10000 = \frac{1}{4} \times 10000 = 2500$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سعیل حسن خان پور)

فاصله ۱۵/۲۵ تا ۲۵/۲۵، ۵ برابر طول دسته‌هاست. پس طول هر دسته

برابر است با:

$$\text{طول دسته} = \frac{۲۵/۲۵ - ۱۵/۲۵}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

دسته‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$\text{دسته اول} = [۱۵/۲۵, ۱۷/۲۵)$$

$$\text{دسته دوم} = [۱۷/۲۵, ۱۹/۲۵)$$

$$\text{دسته سوم} = [۱۹/۲۵, ۲۱/۲۵)$$

$$\text{دسته چهارم} = [۲۱/۲۵, ۲۳/۲۵)$$

$$\text{دسته پنجم} = [۲۳/۲۵, ۲۵/۲۵)$$

عدد ۱۷ به دسته اول، عدد ۲۱ به دسته سوم و عدد ۲۲ به دسته چهارم

اضافه می‌شوند، در نتیجه داریم:

$$\text{فراوانی نسبی دسته چهارم} = \frac{۹}{۱۰+۷+۱۲+۹+۷} = \frac{۹}{۴۵} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

$$\text{درصد فراوانی نسبی دسته چهارم} = ۰/۲ \times ۱۰۰ = ۲۰$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۳ تا ۸۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

دو پیشامد A و B مستقل اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

در گزینه «۲» داریم:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow A \cap B = \{2\}$$

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \text{B و A مستقل اند.}$$

در سایر گزینه‌ها به راحتی می‌توان نشان داد که $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ ، پس دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

قبولی علی و قبولی اشکان دو پیشامد مستقل هستند. یعنی قبولی علی تأثیری در قبولی اشکان ندارد و برعکس. احتمال این‌که دقیقاً یکی از آن‌ها قبول شود یعنی یا علی قبول شود و اشکان قبول نشود یا اشکان قبول شود و علی قبول نشود. بنابراین داریم:

قبولی اشکان : B قبولی علی : A

$$P(A) = 0/7 \quad \text{و} \quad P(B) = 0/6$$

$$P(\text{دقیقاً یکی قبول شود}) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$$

$$= 0/7 + 0/6 - 2 \times 0/7 \times 0/6 = 0/46$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر پیشامد خروج حداقل یک مهره قرمز را با A نمایش دهیم، آن گاه پیشامد A' (متمم پیشامد A) آن است که هیچ یک از مهره‌های خارج شده قرمز نباشد، یعنی هر دو مهره خارج شده از میان ۴ مهره آبی و زرد انتخاب شوند. بنابراین داریم:

$$P(A') = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49}$$

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه تمرین ۹ صفحه ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

A و B مستقل هستند، پس رابطه $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ برقرار

است. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$0/9 = 0/75 + P(B) - 0/75P(B)$$

$$\Rightarrow 0/15 = 0/25P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0/15}{0/25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0/6$$

$$\Rightarrow P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0/75 - 0/75 \times 0/6 = 0/75(1 - 0/6) = 0/75 \times 0/4 = 0/3$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱