



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)



<https://t.me/riazisara>

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی عمومی، کاربرد مشتق - ۱۵ سوال

۱۰۱- ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ در بازه $[1, 4]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

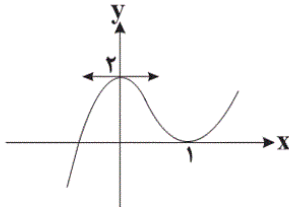
۱۰۲- تابع $f(x) = |\cos x|$ چند نقطه بحرانی در فاصله $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰۳- کدام گزینه طول یک نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sin 2x + 4 \cos x$ است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

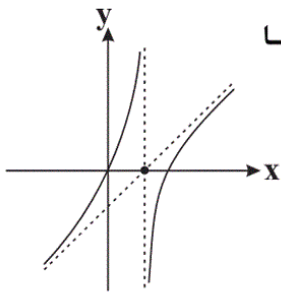
۱۰۴- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ می‌باشد، مقدار a کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۵- اگر $f(x) = 2ax + 1 + \frac{x^2 - 2}{2x + 1}$ یک تابع هموگرافیک باشد، در این صورت مختصات نقطه برخورد مجانب‌های آن کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ (۳) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$



۱۰۶- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ است. مجانب مایل این تابع محور y ها را با

چه عرضی قطع می کند؟

- (۱) -۱
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) -۲
 (۴) $-\frac{3}{2}$

۱۰۷- قرینه خطی که نقاط اکسترمم تابع $f(x) = x^3 - 3x$ را به هم وصل می کند، نسبت به محور x ها کدام است؟

- (۱) $x = -2y$
 (۲) $x = 2y$
 (۳) $y = 2x$
 (۴) $y = -2x$

۱۰۸- برای تابع $y = x^2 + 2 \cos x$ نقطه‌ای به طول صفر، چه نقطه‌ای است؟

- (۱) ماکزیمم نسبی
 (۲) مینیمم نسبی
 (۳) عطف
 (۴) عادی

۱۰۹- کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ ، کدام است؟

- (۱) -۳۶
 (۲) -۳۲
 (۳) -۲۴
 (۴) -۱۸

۱۱۰- اگر جهت تقعر تابع $y = x^4 + 3x^3 + ax^2 + 1$ در نقطه $x = 1$ عوض شود، مقدار a کدام است؟

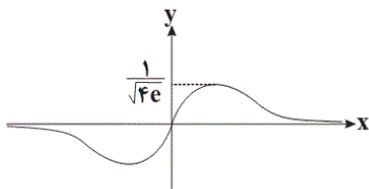
- (۱) $-\frac{13}{2}$
 (۲) -۵
 (۳) -۱۰
 (۴) -۱۵

۱۱۱- مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۱۱۲- تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^2(12 - x^2)$ در بازه (a, b) رو به بالا است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) $2\sqrt{2}$
 (۳) $2\sqrt{6}$
 (۴) ۴



۱۱۳- شکل مقابل مربوط به تابع $f(x) = ax^2 e^{-ax^2}$ است. در این صورت a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{4}$

۱۱۷- شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = \sin x + \cos x$ در نقطه عطف آن در بازه $(0, 2\pi)$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) $\sqrt{2}$

۱۱۵- اگر طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تقعر منحنی $f(x) = (2x+k)\ln(x-1)$ در آن رو به پایین است، برابر ۶ باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

ریاضی عمومی ، هندسه مختصاتی و منحنی های درجه دوم - ۲ سوال

۱۱۶- دو نقطه روی خط به معادله $x - y = 1$ قرار دارند که فاصله آنها از خط به معادله $2x + 3y = 6$ برابر $\sqrt{13}$ است. مجموع

عرض این دو نقطه کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{5}$
(۲) $\frac{22}{5}$
(۳) $\frac{8}{5}$
(۴) $\frac{4}{5}$

۱۱۴- معادله دو ضلع غیرموازی مستطیلی $3x + 4y = 1$ و $6y + bx + 1 = 0$ و نقطه $A(1, 2)$ یک رأس مستطیل است. اندازه محیط

این مستطیل کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

ریاضی عمومی ، ماتریس - ۳ سوال -

۱۱۸- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+1 & a \\ a+4 & a+2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، وارون ماتریس $A - aI$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -0/2 & 0/2 \\ 0/6 & -0/1 \end{bmatrix}$
(۲) $\begin{bmatrix} 0/2 & -0/2 \\ -0/6 & 0/1 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} 0/2 & 0/2 \\ 0/6 & 0/1 \end{bmatrix}$
(۴) $\begin{bmatrix} -0/2 & -0/2 \\ -0/6 & -0/1 \end{bmatrix}$

۱۱۹- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^2(A-I)$ کدام است؟

۷۲ (۴)

۳۶ (۳)

۱۸ (۲)

صفر (۱)

۱۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $A + B^{-1}$ کدام است؟

۹ (۴)

۱۸ (۳)

۸ (۲)

۱۶ (۱)

ریاضی عمومی

۱۰۱- گزینه ۲»

(مسین فابیلو)

نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم: $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \xrightarrow{x \in [1, 4]} x = 2$$

بنابراین برای محاسبهٔ ماکزیمم مطلق، مقادیر تابع را در نقاط $x = 1$ ، $x = 2$ و $x = 4$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 2 \text{ (ماکزیمم مطلق)} \\ f(4) = -18 \text{ (می‌نیمم مطلق)} \end{cases}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۶)

۴

۳

۲

۱

۱۰۲- گزینه ۲»

(مسین فابیلو)

از رسم نمودار استفاده می‌کنیم:

با توجه به شکل، نقاط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ مشتق‌ناپذیر و در نتیجه بحرانی هستند. هم‌چنین در $x = \pi$ مشتق صفر است و در نتیجه بحرانی است.

۴

۳

۲

۱

۱۰۳- گزینه ۳»

(مسین فابیلو)

$$f(x) = \sin 2x + 4 \cos x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x - 4 \sin x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 \sin 2x - 4 \cos x = -8 \sin x \cos x - 4 \cos x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 \cos x (2 \sin x + 1)$$

با توجه به ضابطهٔ f'' و گزینه‌ها، علامت f'' در $x = \frac{\pi}{2}$ عوض می‌شود و این

نقطه یکی از نقاط عطف تابع است.

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۴

۳

۲

۱

۱۰۴ - گزینه «۴»

(همید علیزاده)

با توجه به نمودار، تابع از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد، پس $d = 2$. مشتق تابع در $x = 0$ و $x = 1$ صفر است، پس:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \\ y'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0 (*) \end{cases}$$

همچنین تابع از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$a + b + 2 = 0 (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \end{cases}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹ و ۹۲ تا ۹۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰۵ - گزینه «۲»

(جمال الدین حسینی)

$$f(x) = \frac{(2ax+1)(2x+1) + x^2 - 2}{2x+1} = \frac{(4a+1)x^2 + (2a+2)x - 1}{2x+1}$$

چون $f(x)$ یک تابع هموگرافیک است، لذا $4a+1=0$ ، بنابراین $a = -\frac{1}{4}$

$$2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{مجانب قائم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \quad \text{مجانب افقی:}$$

نقطه برخورد مجانب‌ها: $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۲ تا ۱۰۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\begin{array}{r|l} x^2+ax & x-1 \\ -x^2+x & x+(a+1) \\ \hline (a+1)x & \text{مجانب مایل} \rightarrow y = x + a + 1 \\ -\cancel{(a+1)x} + (a+1) & \xrightarrow{x=1} a = -2 \\ \hline a+1 & \xrightarrow{y=0} \end{array}$$

در نتیجه $y = x - 1$ مجانب مایل تابع بوده و عرض از مبدأ آن -1 است.

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۲ تا ۱۰۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۷- گزینه ۳»

(فاطمه بندر قیان)

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow (1, -2) \\ x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (-1, 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2+2}{(-1)-1} = \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow \text{معادله خط: } y = -2x$$

برای قرینه کردن خط نسبت به محور x ها، کافیهست y را به -y تبدیل کنیم:

$$\text{قرینه خط: } -y = -2x \Rightarrow y = 2x$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۰۸- گزینه ۲»

(علی اصغر شریفی)

$$f'(x) = -2 \sin x + 2x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -2 \cos x + 2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

x			
f'	-	0	+
	↘		↗
x			
f''	+	0	+

در نتیجه می‌توان گفت تابع در نقطه‌ای به طول صفر دارای مینیمم نسبی است.

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۹۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

نقاط بحرانی توابع چندجمله‌ای از حل معادله $y' = 0$ به دست می‌آیند:

$$y' = x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow y' = x(x^2 - 3x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = -1, x = 4$$

$$\Rightarrow y(0) = 0, y(-1) = \frac{-3}{4}, y(4) = -32$$

بنابراین می‌نیمم تابع -32 است.

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow y'' = 12x^2 + 18x + 2a \xrightarrow{x=1} 12 + 18 + 2a = 0$$

$$\Rightarrow 2a = -30 \Rightarrow a = -15$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۴

۳

۲

۱

(امیر زراندوز)

$$f(x) = \frac{4}{x^3} - 4x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} = \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

x	-1	0	1	2
y=f(x)	5	0	-3	-2\sqrt[3]{2}

$$\Rightarrow \max = 5, \min = -3$$

$$\Rightarrow \max + \min = 5 - 3 = 2$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱

(عسین شایلو)

$$f(x) = 2x^2(12 - x^2) \Rightarrow f(x) = -2x^4 + 24x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 48x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -24x^2 + 48 = 24(2 - x^2)$$

x	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\Rightarrow \max(b-a) = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهمربمصطفی ابراهیمی)

عرض نقطه اکسترمم تابع با طول مثبت برابر $\frac{1}{\sqrt{4e}}$ می‌باشد. برای پیدا کردن طول

این نقطه، مشتق تابع $f(x) = axe^{-ax^2}$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = ae^{-ax^2} + ax(-2axe^{-ax^2}) = ae^{-ax^2}(1 - 2ax^2) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2a}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2a}} \end{cases}$$

باید $f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4e}}$ باشد. می‌دانیم $f(x) = axe^{-ax^2}$ است. در نتیجه:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{a}{\sqrt{2a}} e^{-a \times \frac{1}{2a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} \times \sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{4e}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۲ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهری ملارمضانی)

$$y = \sin x + \cos x$$

$$y' = \cos x - \sin x$$

$$y'' = -\sin x - \cos x = -(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1$$

طول نقطه عطف $\xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$$y' = \cos x - \sin x \xrightarrow{x = \frac{3\pi}{4}} y' = -\sqrt{2}$$

$$y' = \cos x - \sin x \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{4}} y' = \sqrt{2}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۹ تا ۹۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(آرش رحیمی)

برای پیدا کردن محدوده‌ای که در آن تقعر منحنی رو به پایین است، نامعادله $y'' < 0$ را حل می‌کنیم.

$$y = (2x + k) \ln(x - 1)$$

$$y' = 2 \ln(x - 1) + \frac{1}{x - 1} \times (2x + k)$$

$$y'' = \frac{2}{x - 1} + \frac{-2 - k}{(x - 1)^2} = \frac{2(x - 1) - 2 - k}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 4 - k}{(x - 1)^2} < 0$$

$$\Rightarrow 2x - 4 - k < 0 \Rightarrow x < \frac{k + 4}{2}$$

با توجه به عبارت $\ln(x - 1)$ در تابع $f(x)$ داریم:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

در نتیجه بازه مورد نظر $(1, \frac{k + 4}{2})$ است. طول بازه برابر ۶ است، بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{k + 4}{2} = 7 \Rightarrow k = 10$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\Rightarrow \alpha = \frac{9 \pm 13}{5} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{22}{5} \Rightarrow \alpha - 1 = \frac{17}{5} \\ \alpha = \frac{-4}{5} \Rightarrow \alpha - 1 = \frac{-9}{5} \end{cases}$$

پس مجموع عرض آن‌ها می‌شود $\frac{8}{5}$.

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

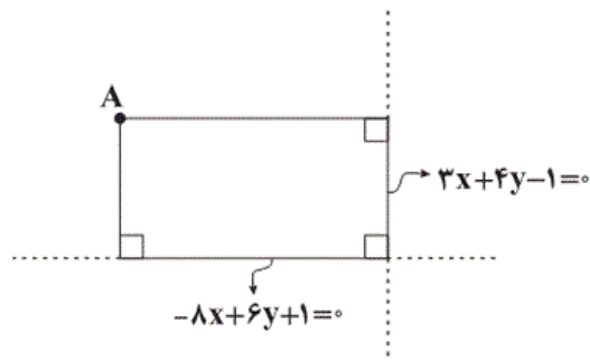
۱۱۴ - گزینه ۱»

(علی شهبازی)

چون دو ضلع با هم موازی نیستند، پس حتما بر هم عمودند.

$$m = \frac{-1}{m'} \Rightarrow \frac{-3}{4} = \frac{-1}{\frac{-b}{6}} \Rightarrow b = -8$$

نقطه $A(1, 2)$ در معادله دو ضلع صدق نمی‌کند، پس می‌توانیم شکل فرضی زیر را در نظر بگیریم:



فاصله A را از دو ضلع حساب می‌کنیم:

$$\text{طول} = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{عرض} = \frac{|-8(1) + 6(2) + 1|}{\sqrt{(-8)^2 + 6^2}} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(2 + 0.5) = 5$$

پس محیط برابر است با:

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۳ و ۱۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۱۸- گزینه «۱»

(علی شعرابی)

A وارون پذیر نیست، پس:

$$|A| = 0 \Rightarrow (a+1)(a+2) - a(a+4) = 0 \Rightarrow 3a+2-4a=0 \Rightarrow a=2$$

ماتریس $A-2I$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A-2I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

حالا وارون آن را حساب می‌کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2-12} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/2 & 0/2 \\ 0/6 & -0/1 \end{bmatrix}$$

(ماتریس) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۶۴ تا ۱۶۸، ۱۷۱، ۱۷۳ و ۱۷۴)

۴

۳

۲

۱

۱۱۹- گزینه «۳»

(ایمان نفستین)

می‌دانیم در ماتریس‌های قطری، برای یافتن توان‌های ماتریس کافی است هر درایه را به توان برسانیم. از طرفی داریم:

$$A^2(A-I) = A^3 - A^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$18+18=36$$

در نتیجه مجموع درایه‌های قطر اصلی، برابر است با:

(ماتریس) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۶۴ تا ۱۷۱)

۴

۳

۲

۱

$$A+B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+B^{-1}| = 1(4) - 1(-4) = 8$$

(ماتریس) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۶۴ تا ۱۶۸، ۱۷۳ و ۱۷۴)

۴

۳

۲

۱