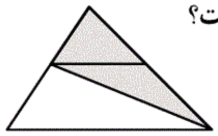
ریاضي پایه ، هندسه -

۱۱۱- در شکل روبه‌رو، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟

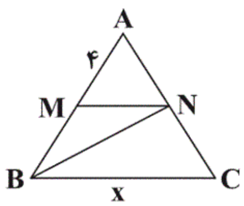


۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۱۱۲- در متوازی‌الاضلاع ABCD $(\hat{A} \neq ۹۰^\circ)$، چند نقطه وجود دارد که از دو رأس A و B به یک فاصله و از دو رأس C و D نیز به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۱۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و BN نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ است. اگر $MN = ۵$ باشد، مقدار x کدام است؟

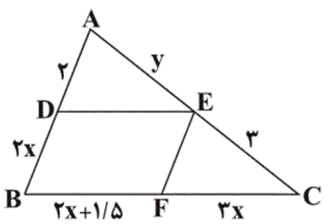


۱) ۱۰/۵
۲) ۱۱/۲۵
۳) ۱۲
۴) ۱۱

۱۱۴- اندازهٔ دو قاعدهٔ یک ذوزنقه ۸ و ۱۲ و ارتفاع ذوزنقه ۱۵ واحد است. فاصلهٔ محل تلاقی قطرها از قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه کدام است؟

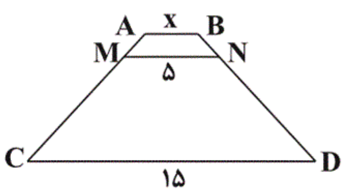
۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۱۵- در شکل روبه‌رو $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AB$ است. x برابر کدام است؟



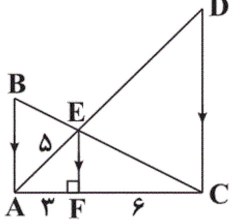
۱) ۳
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۰/۷۵

۱۱۶- در ذوزنقهٔ مقابل، $\frac{DN}{BN} = ۴$ و $MN \parallel DC$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) ۳

۱۱۷-در شکل روبه‌رو، نسبت مساحت FEDC به مساحت ABEF کدام است؟



۱) ۱/۶

۲) ۳/۲

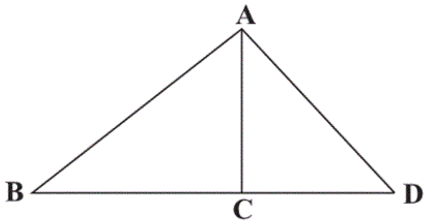
۳) ۴/۸

۴) ۲/۳

۱۱۸-در یک مستطیل به طول ۴ و عرض ۱ واحد، از یکی از رئوس، خطی عمود بر قطر گذرنده از آن رأس، رسم می‌کنیم تا امتـداد ضـلع کوچک‌تر مستطیل را در نقطهٔ E قطع کند. فاصلهٔ E تا رأس دیگر قطر مذکور کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

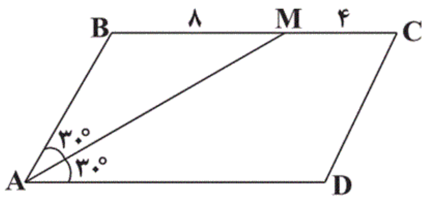
۱۱۹-در شکل زیر اگر $BC\frac{۱}{۳} = AD\frac{۱}{۲} = CD$، آن‌گاه، نسبت AC به AB کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۲۰-در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل زیر نیمساز AM را رسم کرده‌ایم. مساحت مثلث $A\overset{\Delta}{M}D$ چقدر است؟



۱) ۶

۲) $۶\sqrt{۳}$

۳) ۱۲

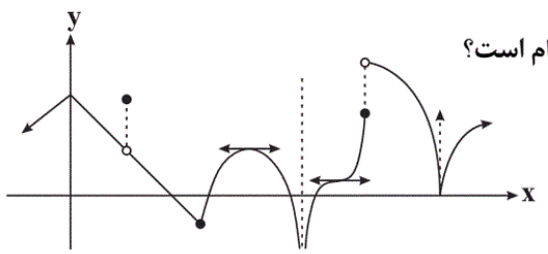
۴) $۲۴\sqrt{۳}$

رياضي 3 - دوازدهم ، کاربرد مشتق

۹۱- تابع $f(x)=\left|x^۲-x\right|$، دارای . . . مینیمم نسبی و . . . ماکزیمم نسبی می‌باشد. (به‌ترتیب از راست به چپ)

۱) ۱ و ۱ ۲) ۱ و ۲ ۳) ۲ و ۱ ۴) ۲ و ۲

۹۲- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x+۲)$ است. تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ کدام است؟



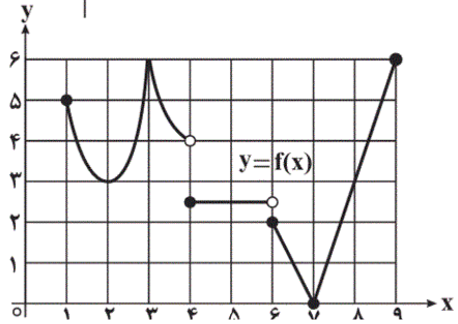
۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۱۰

۹۳- با توجه به نمودار تابع f، کدام‌یک از عبارات زیر در مورد این تابع صحیح است؟



۱) فقط سه مینیمم نسبی دارد.
۲) ماکزیمم مطلق ندارد.
۳) در $x=۱$ ماکزیمم نسبی دارد، اما ماکزیمم مطلق ندارد.
۴) $x=۵$ نقطه بحرانی است.

۹۴- به ازای چه مقادیری از m، تابع $y=۲x^۳+۳mx^۲+۲۴x+۹$ اکیداً یکنواست؟

۱) $-۴\sqrt{۲}\le m\le ۴\sqrt{۲}$
۲) $-۸\le m\le ۸$
۳) $۰<m\le ۸$
۴) $-۴\le m\le ۴$

۹۵- اختلاف ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x$ در بازهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) ۴۵
۲) ۳۸
۳) ۵۲
۴) ۳۲

۹۶- تابع $y=[\sqrt{x}]-x$ در بازهٔ $(۰,۹)$ به ترتیب از راست به چپ چند ماکزیمم نسبی و چند مینیمم نسبی دارد؟ ([ ] : نماد جزء صحیح)

۱) ۲، صفر
۲) ۱، ۱
۳) صفر، ۲
۴) ۲، ۱

۹۷- طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $y=(\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۷}x^۲)\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۹۸- اگر $(۱,۴)$ مختصات نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $y=\frac{ax^۲+b}{x}$ باشد، مختصات نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $(-۱,-۲)$
۲) $(-۱,۴)$
۳) $(-۱,-۴)$
۴) $(-۲,-۱)$

۹۹- معادلهٔ خطی که نقاط اکسترمم تابع $y=\frac{ax}{x^۲+۱}$ را به هم وصل می‌کند، $y=۴x+b$ است. b کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲-
۴) ۳

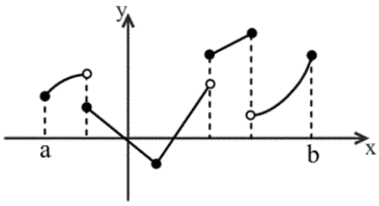
۱۰۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲+x+۳}$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) -۳
۴) ۳

۱۰۱-تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+x$ همواره صعودی است، تغییرات a کدام است؟

۱) $۰\le a<۲$ ۲) $-\sqrt{۳}\le a<۲$ ۳) $|a|\le\sqrt{۳}$ ۴) $|a|\le ۲$

۱۰۲-شکل مقابل نمودار تابع در بازهٔ $[a,b]$ است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی f کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۰۳-اگر تابع f در نقطهٔ $x=c$ دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً تابع f چگونه است؟

۱) $f'(c)=۰$ ۲) در c پیوسته است.
۳) در همسایگی c تعریف شده است. ۴) در c مشتق‌پذیر است.

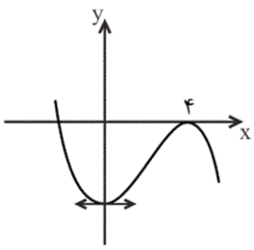
۱۰۴-نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}(x-۲)^{۲}$، سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین ۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۱۰۵-تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{۱+x^{۲}}}{x}$ بر روی دامنهٔ خود، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۶-شکل مقابل نمودار تابع به معادلهٔ $y=ax^{۳}+bx^{۲}-۱۶$ است. a کدام است؟



۱) ۱- ۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{-۱}{۲}$ ۴) $\frac{-۲}{۳}$

۱۰۷-فاصلهٔ دو خط مماس بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^{۳}-۳x$ در دو نقطهٔ ماکزیمم و می‌نیمم آن کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۰۸-تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^{۲}-۱|$ بر بازهٔ $[-۲,۲]$ .....

۱) مشتق‌پذیر است و می‌نیمم مطلق دارد. ۲) مشتق‌پذیر است و می‌نیمم مطلق ندارد.
۳) مشتق‌پذیر نیست ولی می‌نیمم مطلق دارد. ۴) مشتق‌پذیر نیست و می‌نیمم مطلق ندارد.

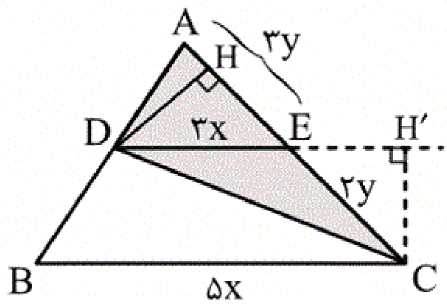
۱۰۹-مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x$، در بازهٔ $[-۴,۳]$ کدام است؟

۱) ۱۸- و ۲۴ ۲) ۴۵- و ۲۷ ۳) ۳۶- و ۲۷ ۴) ۲۷- و ۳۶

۱۱۰-به ازای کدام مقدار k، بیش‌ترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + k$ در بازهٔ $[۱ , ۳]$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۱۱۱– (سراسری تجربی خارج از کشور– ۹۶)



از آنجا که طبق فرض نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است (یعنی $\frac{DE}{BC}=\frac{۳}{۵}$)، فرض می‌کنیم $DE=۳x$ و $BC=۵x$.

طبق تعمیم قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۵}$

یا به عبارت دیگر $AE=۳y$ و $EC=۲y$.

مطابق شکل داریم:

$$\frac{S(\overset{\Delta}{ACD})}{S(\overset{\Delta}{CDE})}=\frac{\frac{۱}{۲}DH\times AC}{\frac{۱}{۲}DH\times CE}=\frac{AC}{CE}=\frac{۵y}{۲y}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow S(\overset{\Delta}{ACD})=\frac{۵}{۲}S(\overset{\Delta}{CDE})\quad (۱)$$

از طرفی:

$$\frac{S(\overset{\Delta}{CDE})}{S(BCED)}=\frac{\frac{۱}{۲}CH'\times DE}{\frac{۱}{۲}CH'\times(BC+DE)}=\frac{۳x}{۵x+۳x}=\frac{۳}{۸}$$

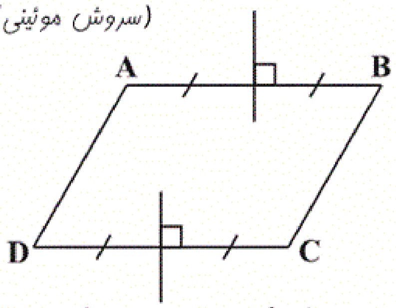
$$\Rightarrow S(\overset{\Delta}{CDE})=\frac{۳}{۸}S(BCED)\quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow S(\overset{\Delta}{ACD})=\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۸}S(BCED)=\frac{۱۵}{۱۶}S(BCED)$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۳۸ و ۴۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۲– (سروش موئینی)



همان‌طور که در شکل می‌بینید، عمودمنصف AB و عمودمنصف CD موازی‌اند، پس نقطهٔ مشترکی ندارند.

یادآوری: نقاط روی عمود منصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

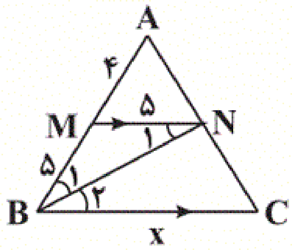
۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۳- (محمدمهدی زریون)

با توجه به موازی بودن $\mathbf{BC}$ و $\mathbf{MN}$ خواهیم داشت $\hat{N}_۱ = \hat{B}_۲$ پس:

$$\begin{cases} \hat{N}_۱ = \hat{B}_۲ \\ \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \end{cases} \Rightarrow \hat{N}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow MB = MN = ۵$$

طبق قضیهٔ تالس داریم:



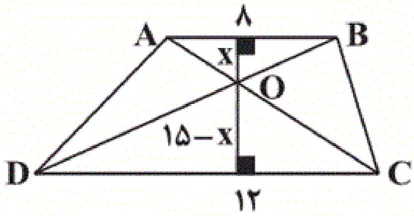
$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۵ \times ۹}{۴} = ۱۱/۲۵$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

$$\Rightarrow \frac{x}{۱۵} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = ۶ \xrightarrow{\text{فاصله تا قاعدهٔ بزرگ}} ۱۵ - ۶ = ۹$$



(ریاضی۲، صفحه‌های ۳۱، ۳۲ و ۴۲ تا ۴۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۵- (میلاد منصوری)

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{۲}{۲x} = \frac{y}{۳} \Rightarrow y = \frac{۳}{x} (I)$$

$$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{FC}{BF} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{۳x}{۲x + ۱/۵} = \frac{۳}{y} (II)$$

از (I) و (II) داریم:

$$\frac{۳x}{۲x + ۱/۵} = \frac{۳}{\frac{۳}{x}} \Rightarrow \frac{۳x}{۲x + ۱/۵} = x \Rightarrow ۲x^۲ + ۱/۵x = ۳x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱/۵x = ۰ \xrightarrow{x \neq ۰} x = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۶- (محمدمهدی زریون)

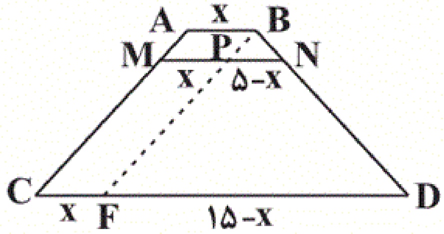
خط **BF** را به موازات **AC** رسم می‌کنیم. با توجه به موازی بودن **AB** و **CF** شکل **ABFC** یک متوازی‌الاضلاع است. بنابراین اگر $MP = CF = x$ آن‌گاه $PN = ۵ - x$ و $FD = ۱۵ - x$ از طرفی داریم:

$$DN = ۴BN \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{BN}{BN + DN} = \frac{۱}{۵}$$

با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث **BFD** داریم:

$$\frac{PN}{FD} = \frac{BN}{BD} \Rightarrow \frac{۵ - x}{۱۵ - x} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۲۵ - ۵x = ۱۵ - x$$

$$\Rightarrow ۴x = ۱۰ \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵$$



(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۷- (حسین غفارپور)

ابتدا مقدار **EF** را محاسبه می‌کنیم:

$$AF^۲ + EF^۲ = AE^۲$$

$$۹ + EF^۲ = ۲۵ \Rightarrow EF = ۴$$

حال از قضیهٔ تالس داریم:

$$\begin{cases} DC \parallel EF \Rightarrow \dfrac{DC}{EF} = \dfrac{AC}{AF} \Rightarrow \dfrac{DC}{۴} = \dfrac{۹}{۳} \Rightarrow DC = ۱۲ \\ AB \parallel EF \Rightarrow \dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{CF} \Rightarrow \dfrac{AB}{۴} = \dfrac{۹}{۶} \Rightarrow AB = ۶ \end{cases}$$

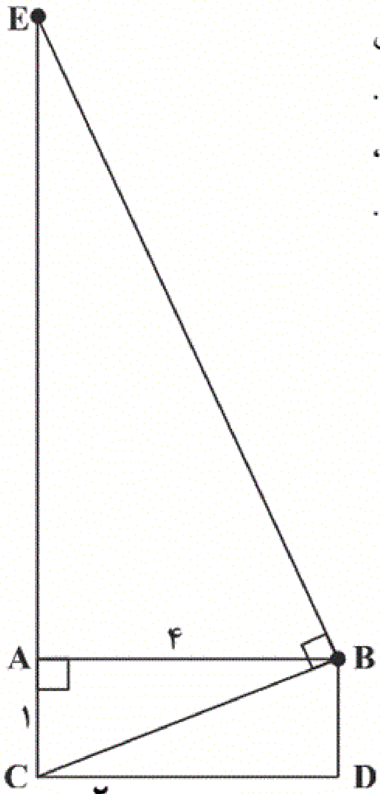
$$\Rightarrow \frac{S_{FEDC}}{S_{ABEF}} = \frac{\frac{(۱۲+۴)}{۲} \times ۶}{(\frac{۶+۴}{۲}) \times ۳} = \frac{۴۸}{۱۵} = ۳/۲$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(بابک سادات)

مثلث BCE قائم‌الزاویه است و طول مستطیل $ABDC$ ارتفاع وارد بر وتر EC است.
براساس روابط طولی می‌دانیم که ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی قطعات ایجاد شده بر روی وتر است.
یعنی:



$$(AB)^{۲} = EA \times AC$$

$$\Rightarrow ۴^{۲} = EA \times ۱ \Rightarrow EA = ۱۶ \Rightarrow EC = ۱۷$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۱۹ *(ایوب نعمانی)*

فرض‌های صورت سؤال را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$CD=\frac{۱}{۲}AD \Rightarrow \frac{CD}{AD}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲}AD=\frac{۱}{۳}BC \Rightarrow BC=\frac{۳}{۲}AD$$

$$\Rightarrow BD=BC+CD=\frac{۳}{۲}AD+\frac{۱}{۲}AD=۲AD$$

$$\Rightarrow BD=۲AD \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{ACD}$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}\frac{CD}{AD}=\frac{AD}{BD}=\frac{۱}{۲}\\ \hat{D}=\hat{D}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{تشابه دو مثلث}]{\text{طبق قضیهٔ دوم حالت‌های}}$$

$$\overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \frac{CD}{AD}=\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}$$

چون $\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{AD}=\frac{۱}{۲}$ بنابراین داریم: $\frac{AC}{AB}=\frac{۱}{۲}$

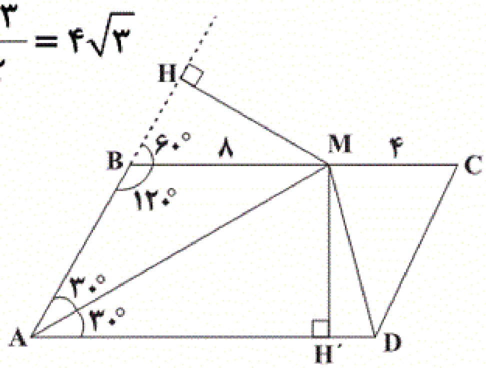
(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱ | ۲ ✓ | ۳ | ۴

-۱۲۰ *(مصطفی کرمی)*

طبق خاصیت نیمساز می‌دانیم فاصله M از دو ضلع AB و AD با هم برابر است و از طرفی طول ضلع AB برابر BM و مساوی ۸ است:

$$MH'=MH=MB\sin ۶۰^\circ=۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۴\sqrt{۳}$$



$$S_{\overset{\Delta}{MAD}}=\frac{۱}{۲}MH'\times AD$$

$$=\frac{۱}{۲}\times ۴\sqrt{۳}\times ۱۲=۲۴\sqrt{۳}$$

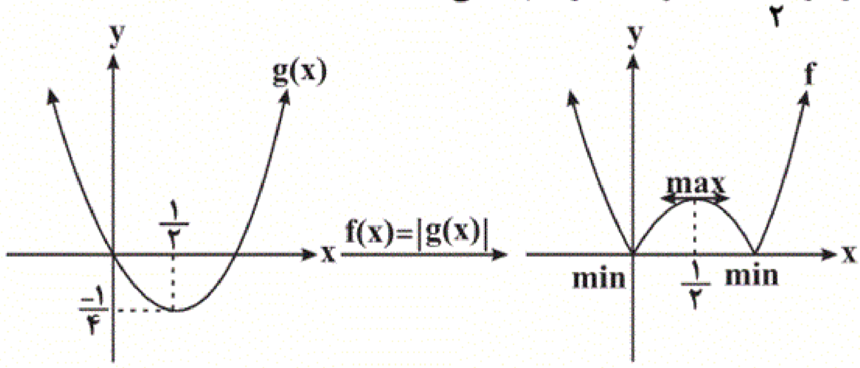
(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ | ۲ | ۳ | ۴ ✓

۹۱- (جهانگیر خاکی)

$$g(x)=x^{۲}-x=(x-\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}$$

با رسم نمودار f مشخص می‌شود که تابع f در $x=۰$ و $x=۱$ دارای مینیمم نسبی و در $x=\frac{۱}{۲}$ دارای ماکزیمم نسبی است.



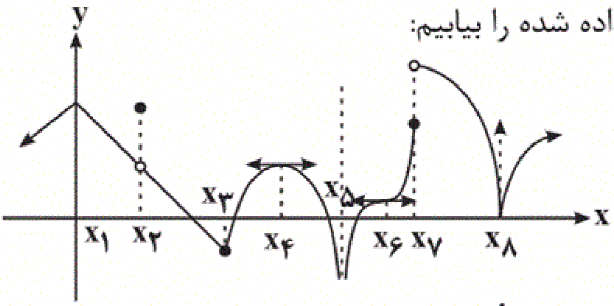
(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

[۱] [۲] [۳]✓ [۴]

۹۲- (آریان حیدری)

می‌دانیم نقاط بحرانی یک تابع، یعنی نقاطی از دامنهٔ تابع که مشتق تابع در آن‌ها صفر است یا موجود نیست. بنابراین:

درست است که در اینجا با تابع $f(x+۲)$ مواجهیم، اما دقت کنید که اعمال قوانین انتقال از جنس جمع و تفریق بر روی x، صرفاً نمودار آن را در جهت افقی حرکت می‌دهد و تأثیری بر روی تعداد نقاط بحرانی مورد بررسی ما ندارد، پس کافی است نقاط بحرانی همین نمودار داده شده را بیابیم:



$x_۱, x_۳ \leftarrow$ نقطهٔ گوشه $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

$x_۲, x_۷ \leftarrow$ ناپیوسته $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

$x_۴, x_۶ \leftarrow$ دارای خط مماس افقی $\Leftarrow$ f' در آن‌ها برابر صفر است.

$x_۸ \leftarrow$ دارای خط مماس قائم $\Leftarrow$ مشتق‌ناپذیر

ضمناً دقت کنید که $x_۵$ متعلق به دامنه نیست و بحرانی نمی‌باشد. پس تعداد نقاط بحرانی همان ۷ نقطه است: $x_۸, x_۷, x_۶, x_۴, x_۳, x_۲, x_۱$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

[۱] [۲]✓ [۳] [۴]

۹۳- (تبدیل به تست: علی‌اصغر شریفی)

با توجه به آن که در $\mathbf{x=5}$ مشتق برابر با صفر می‌شود، پس نقطهٔ بحرانی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: تابع در $\mathbf{x=2}$، $\mathbf{x=4}$ و $\mathbf{x=7}$ مینیمم نسبی دارد، اما تمام نقاط متعلق به بازهٔ $\mathbf{(4,6)}$ هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی هستند. بنابراین تابع بی شمار مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی دارد.

گزینهٔ «۲»: تابع $\mathbf{f}$ دو نقطهٔ ماکزیمم مطلق در $\mathbf{x=3}$ و $\mathbf{x=9}$ دارد.

گزینهٔ «۳»: طبق تعریف کتاب، برای آن‌که یک نقطه اکسترمم نسبی باشد، باید تابع در همسایگی چپ و راست آن نقطه تعریف شود، پس دو سر بازه‌ها را به عنوان اکسترمم‌های نسبی در نظر نمی‌گیریم.

(ریاضی ۳، صفحهٔ ۱۰۴ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۴- (محمدجواد محسنی)

یک تابع پیوسته هنگامی یکنواست که علامت مشتق در آن تغییر نکند.

$$y' = 6x^2 + 6mx + 24$$

پس باید مشتق عبارت که در اینجا یک تابع درجه دوم است تغییر علامت ندهد، یعنی $\Delta \le 0$. توجه داشته باشید که علامت دلتای این تابع با علامت دلتای $y = x^2 + mx + 4$ برابر است:

$$\Delta \le 0 \Rightarrow m^2 - 16 \le 0 \Rightarrow m^2 \le 16 \Rightarrow -4 \le m \le 4$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۵- (محمد ساسانی)

ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست می‌آوریم: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x+2)}_{x=-2}\underbrace{(x-1)}_{x=1} = 0$$

$\mathbf{x=-2}$ در بازهٔ داده شده قرار ندارد اما $\mathbf{x=1}$ نقطهٔ بحرانی است. حال $\mathbf{x=1}$ و ابتدا و انتهای بازه یعنی $\mathbf{x=-1}$ و $\mathbf{x=3}$ را در تابع قرار می‌دهیم:

x	-1	1	3
f(x)	13	-7	45
		min مطلق	max مطلق

بنابراین اختلاف ماکزیمم و مینیمم مطلق برابر است با: $45 - (-7) = 52$

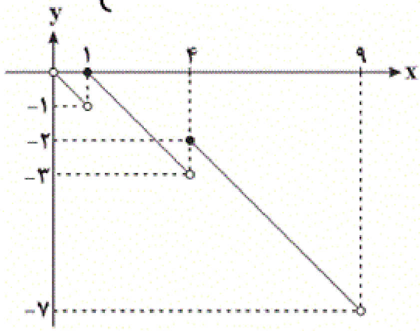
(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۶- (میثم فلاح)

برای رسم تابع، آن را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}-x & ۰<x<۱\\ ۱-x & ۱\le x<۴\\ ۲-x & ۴\le x<۹\end{cases}$$



نمودار دارای ۲ ماکزیمم نسبی در $x=۴$ و $x=۱$ بوده و فاقد مینیمم نسبی است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۹۷- (امیرحسین کارگرجدی)

$$\sqrt[۳]{x}=x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y=x^{\frac{۱}{۳}}(\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۷}x^{۲})=\frac{۳}{۴}x^{\frac{۴}{۳}}-\frac{۱}{۷}x^{\frac{۷}{۳}}$$

$$y'(x)=\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۳}\times x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۱}{۷}\times\frac{۷}{۳}x^{\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{۳}x\sqrt[۳]{x}$$

$$y'(x)=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x}(۱-\frac{۱}{۳}x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=۳\end{cases}$$

x		۰		۳	
y'	−	min	+	max	−

پس طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی برابر ۳ است. (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۸- (حمیدرضا بنیانی)

مختصات نقطهٔ مینیمم نسبی در تابع صدق می‌کند، هم‌چنین مشتق تابع به‌ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود. بنابراین:

$$y(1)=4 \Rightarrow \frac{a+b}{1}=4 \Rightarrow \boxed{a+b=4}\ (I)$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow y=ax+\frac{b}{x} \Rightarrow y'=a-\frac{b}{x^2}$$

$$\Rightarrow y'(1)=a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=b}\ (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$$

$$y=\frac{2x^2+2}{x}=2x+\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow y'=2-\frac{2}{x^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

x		-1		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۹- (سید جلال میری)

ابتدا مختصات نقاط اکسترمم نسبی تابع را به دست می‌آوریم:

$$y'=a\left(\frac{(1)(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}\right)=a\left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$y'=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \underbrace{A(1,\frac{a}{2}),B(-1,-\frac{a}{2})}_{\text{نقاط اکسترمم}}$$

حال با توجه به نقاط A و B و خط $y=4x+b$ داریم:

$$m_{AB}=\frac{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}{-2}=\frac{a}{2}=4 \Rightarrow a=8$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right., B\left|\begin{matrix}-1\\-4\end{matrix}\right. \Rightarrow y-4=4(x-1) \Rightarrow y=4x \Rightarrow b=0$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

−۱۰۰

(جمشید حسینی‌خواه)

$$D_f = R$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(4x-3)(x^2+x+3)-(2x+1)(2x^2-3x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3+4x^2+12x-3x^2-3x-9-4x^3+6x^2-2x^2+3x}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2+12x-9}{(x^2+x+3)^2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 5x^2+12x-9 > 0$$

با حل نامعادلهٔ بالا جواب آن به شکل $(-\infty,-3)\cup(\frac{3}{5},+\infty)$ به‌دست می‌آید که با توجه به‌صورت سؤال $(a,+\infty)\subseteq(\frac{3}{5},+\infty)$ است. بنابراین حداقل مقدار a برابر با $\frac{3}{5}$ به‌دست می‌آید.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۱   ۲✓   ۳   ۴

−۱۰۱

(سراسری تجربی — ۸۲)

در توابع چندجمله‌ای، در هر بازه‌ای که $y' \geq 0$ باشد، تابع همواره صعودی است، لذا:

$$y = x^3 + ax^2 + x$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + 1 \geq 0$$

عبارت درجهٔ دوم $a'x^2 + b'x + c'$ وقتی نامنفی است که $a' > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد، لذا:

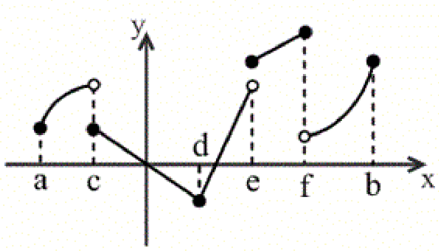
$$\Delta = 4a^2 - 12 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 3 \Rightarrow |a| \leq \sqrt{3}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۱   ۲   ۳✓   ۴

−۱۰۲

(سراسری ریاضی — ۸۰)



در نقطه به طول c، عرض تابع از نقاط در همسایگی چپ کمتر و در همسایگی راست بیشتر است، پس این نقطه اکسترمم نسبی نیست، به دلیل مشابه e نیز اکسترمم نسبی نیست، اما در f، عرض تابع از نقاط در همسایگی خود بیشتر است، پس این نقطه ماکزیمم نسبی است.. به‌طریق مشابه در نقطه به طول d تابع می‌نیمم نسبی دارد و در کل دو اکسترمم نسبی دارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

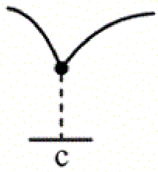
۱   ۲✓   ۳   ۴

۱۰۳- (سراسری ریاضی– ۷۹)

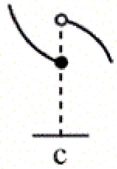
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در گزینهٔ «۱»: اگر تابع $\mathbf{f}$ در نقطهٔ $\mathbf{c}$، دارای اکسترمم نسبی باشد و $\mathbf{f'(c)}$ موجود باشد، آنگاه $\mathbf{f'(c)=۰}$، لذا با توجه به فرضیات این گزینه صحیح نیست.

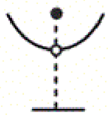
به شکل روبه‌رو توجه کنید $\mathbf{f'}$ در $\mathbf{c}$ وجود ندارد ولی اکسترمم نسبی است.



در گزینهٔ «۲»: لزومی ندارد که تابع در نقطهٔ اکسترمم نسبی پیوسته باشد. به شکل روبه‌رو توجه کنید.

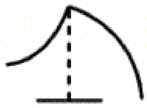


در گزینهٔ «۳»: اگر تابع $\mathbf{f}$ در نقطهٔ $\mathbf{c}$ اکسترمم نسبی باشد، آنگاه $\mathbf{f}$ در همسایگی $\mathbf{c}$ تعریف شده است.



در شکل بالا، تابع در $\mathbf{c}$ ماکزیمم نسبی است، پس این گزینه درست است.

در گزینهٔ «۴»: لزومی ندارد که تابع در نقطهٔ اکسترمم نسبی مشتق‌پذیر باشد. به شکل روبه‌رو توجه کنید.



در شکل روبه‌رو، تابع در $\mathbf{c}$ ماکزیمم نسبی است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۴- (سراسری تجربی – ۸۵)

در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادلهٔ $\mathbf{y'=۰}$ به‌دست می‌آید، لذا:

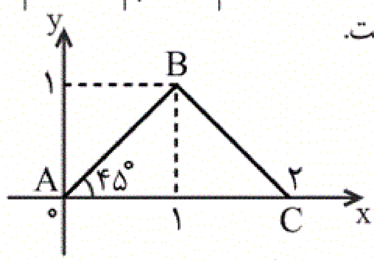
$$f(x)=x^{۲}(x-۲)^{۲}$$

$$f'(x)=۲x(x-۲)^{۲}+۲(x-۲)(x^{۲})$$

$$f'(x)=۲x(x-۲)(x-۲+x)=۰ \Rightarrow x=۰,۱,۲$$

$$A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. ,\ B\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right. ,\ C\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$$

با توجه به شکل، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.



(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۵- *(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)*

باید نقاطی درونی از دامنهٔ تابع را بیابیم که در آن‌ها، f' برابر صفر است یا f' وجود ندارد. دامنهٔ تابع $R-\{0\}$ است، هم‌چنین تابع در دامنهٔ خود پیوسته است.

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\times x-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{\frac{x^2-(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\neq 0$$

مخرج f' در $x=0$ صفر می‌شود ولی از آن‌جا که این نقطه، عضو دامنهٔ تابع نیست، بنابراین نقطهٔ بحرانی نخواهد بود و تابع نقطهٔ بحرانی ندارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۲)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

۱۰۶- *(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۴)*

با توجه به نمودار طول‌های نقاط اکسترمم $x=0$ و $x=4$ هستند لذا در معادلهٔ $y'=0$ صدق می‌کنند:

$$y'=3ax^2+2bx\Rightarrow y'(4)=0$$

$$\Rightarrow 48a+8b=0\Rightarrow 6a+b=0\quad (1)$$

از طرفی نقطهٔ $(0\,,4)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

۱   ۲   ۳ ✓   ۴

۱۰۷- *(سراسری تجربی - ۷۸)*

کافی است طول‌های اکسترمم را یافته و از آن‌جا عرض نقاط اکسترمم را بیابیم:

$$y=x^3-3x\Rightarrow y'=3x^2-3=0\Rightarrow x=1\,,x=-1$$

$$y(1)=1-3=-2\,,\;y(-1)=-1+3=2$$

$$d=y_{Max}-y_{Min}$$

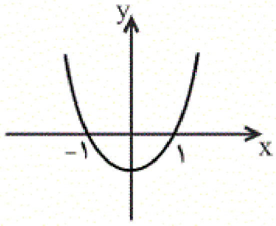
$$d=2-(-2)=4$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

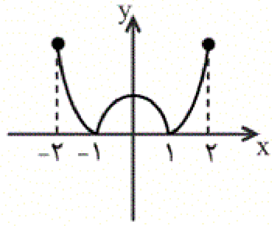
۱   ۲   ۳ ✓   ۴

۱۰۸- (سراسری ریاضی – ۷۵)

نمودار تابع $y=|x^۲-۱|$ را در بازهٔ $[-۲,۲]$ رسم می‌کنیم.



$y=x^۲-۱$



$y=|x^۲-۱|$

با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع در دو نقطهٔ ۱ و ۱- مشتق‌ناپذیر و در این نقاط می‌نیمم مطلق است، البته تابع در $x=۲$ و $x=-۲$ دارای ماکزیمم مطلق است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۹- (سراسری تجربی – ۹۵)

بازهٔ $[-۴,۳]$ را در نظر گرفته و مقادیر تابع f را در ابتدا و انتهای بازه و هم‌چنین نقاطی بحرانی به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۱۵x \Rightarrow f'(x)=x^۲-۲x-۱۵$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۱۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۵\notin[-۴,۳] & \text{غیر قابل قبول} \\ x=-۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-۴ \Rightarrow f(-۴)=\frac{-۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳} \\ x=-۳ \Rightarrow f(-۳)=-۹-۹+۴۵=۲۷ \\ x=۳ \Rightarrow f(۳)=۹-۹-۴۵=-۴۵ \end{cases}$$

از بین سه مقدار بالا، بزرگترین آنها (یعنی ۲۷)، ماکزیمم مطلق و کوچکترین آنها (یعنی ۴۵-) می‌نیمم مطلق تابع در بازهٔ مورد نظر است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

−۱۱۰ (سراسری ریاضی − ۸۴)

ابتدا نقاط بحرانی f را در بازهٔ $[1 , 3]$، تعیین می‌کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (1,3) \ , x = 2$$

پس طول نقطهٔ بحرانی تابع $x = 2$ است، مقدار تابع را در این نقطه و نقاط ابتدا و انتهای بازه می‌یابیم:

$$f(1) = k - 2 \ , f(2) = k - 4 \ , f(3) = k$$

ماکزیمم تابع k و می‌نیمم تابع $k - 4$ است، از آنجایی که قرینه‌اند پس مجموع آن‌ها صفر است، بنابراین:

$$k - 4 + k = 0 \Rightarrow k = 2$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴