



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)



<https://t.me/riazisara>

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم، ترکیبیات (شمارش)

۱۱۱- در چند جایگشت از حروف کلمه **peyman**، عبارت **pe** وجود دارد ولی عبارت **man** وجود ندارد؟

- | | |
|--------|---------|
| ۹۸ (۲) | ۱۱۴ (۱) |
| ۸۴ (۴) | ۹۶ (۳) |

۱۱۲- با ارقام ۰، ۱، ۳، ۵، ۶، ۷ و ۹، چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت به طوری که در آنها «رقم یکان > رقم دهگان > رقم

صدگان» باشد؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۶ (۲) | ۱۵ (۱) |
| ۲۲ (۴) | ۲۰ (۳) |

۱۱۳- در چند عدد سه رقمی، رقم ۷ وجود دارد؟

- | | |
|---------|---------|
| ۲۸۲ (۲) | ۲۵۲ (۱) |
| ۹۰۰ (۴) | ۶۴۸ (۳) |

۱۱۴- از هر یک از ۴ منطقه کشوری، ۶ دانش‌آموز به یک اردوگاه دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان یک مسابقه طناب‌کشی ۴

نفری (۴ نفر در مقابل ۴ نفر) برگزار کرد به طوری که هر ۴ نفر یک تیم از یک منطقه باشند؟

- | | |
|----------|---------|
| ۲۲۵۰ (۲) | ۹۰۰ (۱) |
| ۱۳۵۰ (۴) | ۴۵۰ (۳) |

۱۱۵- یک کارمند در هفته ۶ روز (از شنبه تا پنجشنبه) سر کار می‌رود. او در هر هفته سه روز از مترو، دو روز از اتوبوس و یک روز از تاکسی برای رسیدن به محل کار استفاده می‌کند. این کارمند به چند طریق می‌تواند برنامه هفتگی سفرهایش به محل کار را بچیند؟

- (۱) ۱۲۰
(۲) ۶۰
(۳) ۲۰
(۴) ۳۰۰

۱۱۶- با حروف a, a, a, b, b, c و c، چند کلمه ۳ حرفی ساخته می‌شود؟

- (۱) ۲۴
(۲) ۲۷
(۳) ۲۶
(۴) ۲۵

۱۱۷- با ارقام عدد ۲۴۶۷۷۵۵۵، چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت به طوری که هیچ دو رقم زوجی کنار هم قرار نگیرند؟

- (۱) ۱۲۰۰
(۲) ۶۰۰
(۳) ۲۰۰
(۴) ۱۲۰

۱۱۸- در انتخاب شورای مؤلفین چهار کاندیدای A, B, C و D وجود دارند و ۷ نفر به این افراد رأی می‌دهند. تعداد کل حالات ممکن برای نتایج به دست آمده کدام است؟ (هر نفر فقط به یک کاندیدا می‌تواند رأی دهد).

- (۱) ۳۳۰
(۲) ۱۶۵
(۳) ۲۱۰
(۴) ۱۲۰

۱۱۹- به چند طریق می‌توان از بین ۵ مهره سفید یکسان، ۵ مهره سیاه یکسان و ۵ مهره آبی یکسان، ۵ مهره انتخاب کرد؟

- (۱) $\binom{15}{5}$
(۲) ۲۱
(۳) ۱۲۵
(۴) ۸۱

۱۲۰- ۷ توپ یکسان را در ۳ ظرف A، B و C می‌ریزیم. در چند حالت تعداد توپ‌های ظرف A از تعداد توپ‌های ظرف B بیش‌تر

است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۴ (۱)

آمار و احتمال

۱۳۱- اولین قدم در علم آمار کدام است؟

(۴) پیش‌بینی

(۳) سازماندهی

(۲) جمع‌آوری اعداد و ارقام

(۱) تحلیل و تفسیر داده‌ها

۱۳۲- نوع کدام متغیر با بقیه فرق دارد؟

(۲) گروه خونی افراد

(۱) میزان لذت از خوردن غذاهای یک رستوران

(۴) نوع آلاینده‌ی هوا

(۳) رنگ خودروهای داخل یک پارکینگ

۱۳۳- در کدام گزینه تمام متغیرهای کیفی اسمی، کیفی ترتیبی، کمی پیوسته و کمی گسسته وجود دارند؟

(۱) سن، جنسیت، میزان تحصیلات، شغل

(۲) وزن، تعداد فرزندان، جنسیت، شغل

(۳) سرعت حرکت یک خودرو، گروه خون، مراحل رشد، تعداد فرزندان

(۴) تعداد تماس‌ها، مراحل تحصیل، رنگ چشم، گروه خون

آمار و احتمال، آمار استنباطی -

۱۳۴- یکی از فروشگاه‌های زنجیره‌ای برای تبلیغ و جذب بیش‌تر مشتری بین هر ۲۰۰ نفری که خرید می‌کنند، قرعه‌کشی و به تعدادی

از آنها به‌طور تصادفی تخفیف ویژه می‌دهد. نحوه انتخاب این اشخاص از میان مشتریان بر اساس کدام نوع نمونه‌گیری است؟

(۴) سامانمند

(۳) طبقه‌ای

(۲) خوشه‌ای

(۱) تصادفی ساده

۱۳۵- برای بررسی تأثیر نوشابه‌های گازدار روی معده و میزان قاچاق سوخت در مرزهای شرقی کشور در سال گذشته، بهتر است

به ترتیب از کدام روش‌های گردآوری داده‌ها استفاده کنیم؟

(۴) دادگان - پرسش‌نامه

(۳) مصاحبه - مشاهده

(۲) مصاحبه - دادگان

(۱) مشاهده - دادگان

۱۳۶- در یک نمونه‌گیری سامانمند بین ۴۵۰ نفر که به ترتیب از شماره ۱ تا ۴۵۰ شماره‌گذاری شده‌اند، می‌خواهیم یک نمونه ۳۰ تایی

انتخاب کنیم. اگر یکی از اعضای انتخابی شماره ۸۲ باشد، آنگاه کدام شماره انتخاب نشده است؟

۳۷ (۱) ۱۷۲ (۲) ۲۷۷ (۳) ۴۰۲ (۴)

۱۳۷- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

الف) آماره از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

ب) پارامتر جامعه در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشد، قابل محاسبه است.

پ) آماره‌ها از نمونه‌ای به نمونه دیگر ممکن است تغییر کنند.

ت) پارامتر مقدار ثابتی دارد ولی این مقدار در بسیاری از موارد مجهول است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۳۸- می‌خواهیم یک تحقیق در مورد ورزش‌های مورد علاقه دانشجویان یک دانشگاه انجام دهیم. برای انجام این کار سه دانشکده از

میان دانشکده‌های این دانشگاه را به تصادف انتخاب کرده و از تمام دانشجویان این سه دانشکده تحقیق می‌کنیم. کدام یک از

گزینه‌های زیر نا درست است؟

(۱) هر دانشجو یک واحد آماری است.

(۲) تمام دانشجویان سه دانشکده انتخاب شده، جامعه آماری را تشکیل می‌دهند.

(۳) نمونه‌گیری به روش خوشه‌ای انجام گرفته است.

(۴) میانگین تعداد ورزش‌های مورد علاقه دانشجویان این سه دانشکده، یک آماره است.

۱۳۹- کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

(۱) در نمونه‌گیری سیستماتیک، احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است.

(۲) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، احتمال انتخاب خوشه‌ها برابر است.

(۳) در نمونه‌گیری طبقه‌ای، از هر طبقه یک نمونه تصادفی ساده انتخاب می‌شود.

(۴) در نمونه‌گیری طبقه‌ای، احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است.

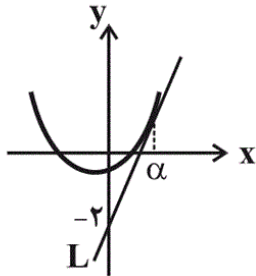
- (۱) نمونه‌گیری از مدرسان کنکور برای بررسی وضعیت معیشتی معلمان تمام مقاطع.
 (۲) نمونه‌گیری از افراد در نظرسنجی یک وبگاه پرتفردار برای رسیدن به درصد آرای هر کاندیدا در انتخابات ریاست‌جمهوری.
 (۳) نمونه‌گیری از افراد حاضر در کتابخانه یک مدرسه برای بررسی میزان مطالعه دانش‌آموزان آن مدرسه.
 (۴) نمونه‌گیری از اولین نفر از هر ۱۰ دانش‌آموزی که از یک مدرسه خارج می‌شوند برای بررسی وسیله نقلیه مورد استفاده دانش‌آموزان این مدرسه.

حسابان 2 - دوازدهم ، مشتق

۸۱- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$:

- (۱) خط مماس دارد ولی مشتق ندارد.
 (۲) خط مماس و مشتق ندارد.
 (۳) خط مماس و مشتق دارد.
 (۴) خط مماس ندارد ولی مشتق دارد.

۸۲- در شکل زیر خط L در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + x - 1$ مماس می‌باشد. حاصل $f(\alpha) + f'(\alpha)$ کدام است؟



- (۱) ۴
 (۲) ۳
 (۳) ۲
 (۴) ۱

۸۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx & ; x \geq 1 \\ -2x + a & ; x < 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) -۴
 (۳) -۳
 (۴) -۵

۸۴- مساحت ناحیه محدود به محورهای مختصات و خط نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & ; x \geq 1 \\ -2x^2 + 2 & ; x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۲ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۸۵- اگر نیم‌مماس راست و نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |ax^2 - 4a|$ در $x=2$ بر هم عمود باشند، کدام است a ؟

$\pm \frac{1}{4}$ (۲)

$\pm \frac{1}{2}$ (۱)

± 4 (۴)

± 2 (۳)

۸۶- اگر $f(x) = \frac{3x-3}{\sqrt{2x+1}}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

۸۷- اگر $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n})$ باشد، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

صفر (۲)

-۱ (۱)

2^n (۴)

۱ (۳)

۸۸- اگر $f(x) = \frac{1 - \sin x}{x \cos x}$ و $g(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{x \cos x}$ باشد، مقدار عبارت $f'(x) + g'(x)$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

۸۹- اگر $f(a) = 2f'(a) = 8$ باشد، مشتق تابع $y = \sqrt[3]{f(x)}$ در $x = a$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{2}{3}$

۹۰- مشتق تابع $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin x}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $-\sqrt{3}$

(۴) -1

(۳) 1

هندسه 3- دوازدهم ، بردار

۱۰۱- اگر نقطه $A = (a, b, c)$ را روی صفحه xy و روی محور z ها تصویر کنیم، به ترتیب نقاط B و C به دست می آید. بین طول

پاره خطهای OA و BC کدام رابطه همواره برقرار است؟ (O مبدأ مختصات است.)

(۲) $|OA| = 2|BC|$

(۱) $|BC| = 2|OA|$

(۴) $|OA| = |BC|$

(۳) $|OA| + |BC| = 2$

۱۰۲- نقطه $M = (m+1, m, 1)$ به فاصله ۱ واحد از صفحه xz قرار دارد، فاصله M از محور y ها کدام می تواند باشد؟

(۲) $\sqrt{5}$

(۱) $\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{10}$

(۳) 2

۱۰۳- اگر نقطه A تصویر قائم نقطه $M = (m-1, 1, -1)$ روی صفحه yz و B قرینه نقطه M نسبت به محور y ها باشد، کمترین فاصله

دو نقطه A و B از هم کدام است؟

(۲) 2

(۱) 1

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

۱۰۴- نقاط $A = (m+1, 1, -2)$ و $B = (m, -1, 1)$ ، مفروض اند. اگر $|AB| > |OA| > |OB|$ ، آنگاه حدود تغییرات m به کدام صورت

است؟ (O مبدأ مختصات است.)

$$-4 < m < 2 \quad (2)$$

$$m < -2, m > 2 \quad (1)$$

$$m < -4, m > 2 \quad (4)$$

$$-2 < m < 2 \quad (3)$$

۱۰۵- اگر دو نقطه $A = (m, -2m, 1)$ و $B = (2n, n-5, 1)$ قرینه یکدیگر نسبت به محور Z ها باشند، آنگاه نقطه

$C = (-n-1, -m+2, m+2)$ کدام یک از نقاط زیر است؟

(2) تصویر قائم نقطه A روی صفحه xy

(1) تصویر قائم نقطه B روی صفحه xy

(4) قرینه نقطه A نسبت به محور y ها

(3) قرینه نقطه B نسبت به محور y ها

۱۰۶- نقاطی از فضا که در رابطه $x=2$ صدق می کنند، کدام یک از گزینه های زیر است؟

(2) خطی عمود بر محور x ها

(1) خطی موازی محور x ها

(4) صفحه ای عمود بر محور x ها

(3) صفحه ای موازی محور x ها

۱۰۷- بیشترین فاصله ای که دو نقطه واقع در حجم محدود به صفحات $|x|=1$ و $|y|=2$ و $|z|=b$ دارند، برابر $2\sqrt{69}$ است. مقدار

b کدام است؟

$$8 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

هندسه 3- دوازدهم، آشنایی با مقاطع مخروطی

۱۰۸- دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت مفروض اند. اگر قطر دهانه دیش اول ۶ برابر قطر دهانه دیش دوم و گودی (عمق) دیش اول ۴

برابر گودی (عمق) دیش دوم باشد، آنگاه فاصله کانونی دیش اول چند برابر فاصله کانونی دیش دوم است؟

$$9 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (1)$$

۱۰۹- یک پرتو نور از کانون سهمی به معادله $y^2 - 2y + 4x = 11$ بر آن می‌تابد. اگر زاویه بین پرتو تابش و بازتابش برابر 45° باشد،

معادله پرتو تابش کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $2y = -x + 4$

(۳) $2y = x$

(۲) $y = x + 1$

(۱) $y = -x + 3$

۱۱۰- یک شعاع نور در راستای خط $y = 1$ به سهمی به معادله $y^2 = 4x + 2$ می‌تابد. شعاع بازتابش، محور y ها را در نقطه‌ای به

کدام عرض قطع می‌کند؟

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{3}$

ریاضی پایه - دوازدهم - 10

۹۱- در تابع $f(x) = ab^x$ اگر داشته باشیم: $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ، حاصل $b - a$ کدام است؟

(۲) $\frac{9}{2}$

(۱) $\frac{7}{2}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) ۴

۹۲- اگر $3^x = 249$ باشد، مقدار $[x]$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۵

(۳) ۶

۹۳- مجموعه تمام مقادیر k ، که به ازای آن معادله $2^{x-2|x|} = kx$ جواب دارد، کدام است؟

(۲) $k \neq 0$

(۱) هر مقدار k

(۴) $0 < k < 1$

(۳) $k > 0$

۹۴- وارون تابع $f(x) = 2^{x+1} - 3$ به صورت تابع $f^{-1}(x) = \log_r\left(\frac{x+a}{b}\right)$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۹۵- تابع $f(x) = \log_r(ax^2 + bx + c)$ فقط در بازه $(-2, 1)$ قابل تعریف است. اگر $f(0) = \frac{3}{4}$ باشد، $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1 - \log 2}{2 \log 2}$

(۲) $\frac{1}{2 \log 2}$

(۳) $\frac{1 + \log 2}{2 \log 2}$

(۴) $\frac{1 - \log 2}{\log 2}$

۹۶- حاصل $3^{\log_5 \sqrt{7}} + 5^{\log_3 \sqrt{7}}$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۵۰

(۳) ۱۸

(۴) ۶

۹۷- اگر $A = 5 \log_{\sqrt{2}}^{2-\sqrt{6}} - 6 \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ باشد، 4^A کدام است؟

(۱) ۹

(۲) $\sqrt{6}$

(۳) ۳

(۴) $\sqrt{5}$

۹۸- معادله $\frac{1}{1 - \log x} + \frac{2}{1 - \log x^2} = 3$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) جواب ندارد.

۹۹- مجموعه جواب‌های معادله $|\log_3^x - 2| + \log_3^x = 2$ به صورت $(0, a]$ است. مقدار $\log(a+1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) ۲
 (۳) ۱
 (۴) صفر

۱۰۰- مجموع جواب‌های معادله $\log_2(x^2 + 12) - 3 = x$ کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) $\log_2 6$
 (۳) $\log_2 18$
 (۴) $\log_2 12$

هندسه 2 یازدهم، تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۱۲۱- تبدیل یافته مربعی به طول ضلع $2\sqrt{2}$ تحت تجانس به مرکز O و نسبت k، مربعی به طول قطر $\sqrt{2}$ است. مثلث

متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۴ تحت این تجانس به مثلثی با کدام مساحت تبدیل می‌شود؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 (۳) $2\sqrt{3}$
 (۴) $\sqrt{3}$

۱۲۲- اگر نقطه O محل تلاقی قطرهای دوزنقه $ABCD$ ($AB \parallel CD$) باشد، آنگاه تبدیل یافته پاره خط AB تحت کدام یک از

تبدیل‌های زیر، موازی با پاره خط AB نیست؟

- (۱) بازتاب نسبت به خط CD
 (۲) تجانس معکوس به مرکز O و به نسبت ۲
 (۳) انتقال با بردار \overrightarrow{CD}
 (۴) دوران به مرکز O و زاویه AOB

۱۲۳- دو دایره مماس خارج و به شعاع‌های ۱ و ۲، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصله مراکز این دو تجانس از

یکدیگر کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

۱۲۴- نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AA' = 8$ ، $OA = 5$ و O نقطه‌ای روی خط L باشد، آنگاه

فاصله نقطه A از خط شامل پاره خط OA' کدام است؟

۶/۴ (۴)

۴/۸ (۳)

۳/۶ (۲)

۳/۲ (۱)

۱۲۵- یک مثلث به مساحت ۵۴ را تحت برداری که ابتدای آن یک رأس مثلث و انتهای آن محل هم‌رسی میانه‌های مثلث است، انتقال

می‌دهیم. مساحت ناحیه مشترک بین مثلث و تصویرش کدام است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۲۶- نقطه A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d ، نقطه A' می‌نامیم. اگر نقطه

A را حول نقطه A' به اندازه 120° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم تا نقطه A'' حاصل شود، آنگاه طول

پاره خط AA'' کدام است؟

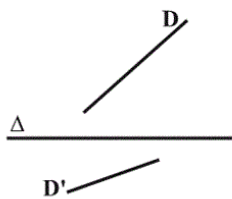
$12\sqrt{2}$ (۲)

$15\sqrt{2}$ (۱)

$9\sqrt{2}$ (۴)

$10\sqrt{2}$ (۳)

۱۲۷- سه خط D ، D' و Δ مطابق شکل مفروض‌اند. به کمک تبدیل بازتاب، چند جفت نقطه A و A' می‌توان پیدا کرد به گونه‌ای



که روی خط D و A' روی خط D' بوده و خط Δ عمود منصف پاره خط AA' باشد؟

۲ (۲)

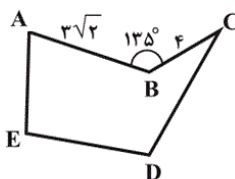
۱ (۱)

هیچ (۴)

۳ (۳)

۱۲۸- زمینی مطابق شکل زیر مفروض است. می‌خواهیم به کمک تبدیل هندسی مناسب بدون تغییر در محیط زمین، مساحت آن را

افزایش دهیم. مقدار افزایش مساحت این زمین چقدر است؟



۱۲ (۲)

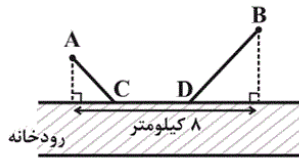
۶ (۱)

۴۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲۹- دو شهر A و B مطابق شکل به فاصله‌های ۱ و ۲ کیلومتر از یک رودخانه و در یک طرف آن واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A

به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. طول کوتاه‌ترین مسیر ACDB کدام است؟



۷ (۲)

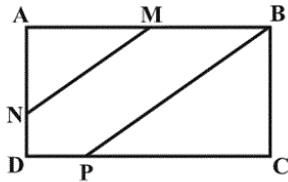
۵ (۱)

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۱۳۰- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD مستطیل است و M وسط AB، AN = ۲ND، و P نقطه‌ای متحرک روی DC می‌باشد.

اگر طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای MNPB برابر ۶ باشد، طول MN کدام است؟



$\sqrt{6}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۲ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

(رسول مفسنی منش)

pe را یک بسته در نظر می‌گیریم که به همراه y,m,a,n دارای

$5! = 120$ جایگشت‌اند. از این ۱۲۰ جایگشت آن‌هایی که man دارند را

نمی‌خواهیم. تعداد این جایگشت‌ها که به صورت **pe** **man** y هستند برابر

$$6 = 3! \text{ است، لذا جواب برابر است با: } 120 - 6 = 114$$

(ریاضی ۱ - شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۴

۳

۲

۱

رقم یکان باید صفر یا ۶ باشد. دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد: در این حالت باید از بین ارقام ۱، ۳، ۵، ۶، ۷

و ۹، دو رقم انتخاب کنیم، ضمناً با هر ۲ رقم انتخاب شده تنها یک عدد با

ویژگی فوق می توان نوشت. بنابراین تعداد اعداد موردنظر برابر است با:

$$\binom{6}{2} = 15$$

حالت دوم:

رقم یکان ۶ باشد. در این حالت چون باید رقم یکان از سایر ارقام کوچک تر

باشد، برای دو رقم باقی مانده فقط رقم های ۷ و ۹ را می توان انتخاب کرد که

با آنها هم تنها یک عدد «۹۷۶» را می توان ساخت.

$$16 = 15 + 1 = \text{تعداد کل اعداد}$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه های ۱۱۹ تا ۱۲۶ و ۱۳۳ تا ۱۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عمید کروی)

$$900 = 9 \times 10 \times 10 = \text{تعداد اعداد سه رقمی}$$

$$648 = 8 \times 9 \times 9 = \text{تعداد اعداد سه رقمی که ۷ ندارند}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دو منطقه از چهار منطقه انتخاب می‌کنیم تا از هر یک، چهار نفر انتخاب شود.

$$\binom{4}{2} \binom{6}{4} \binom{6}{4} = 6 \times 15 \times 15 = 1350$$

(ریاضی ۱- شمارش، برون شمردن: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱

اگر هر سفر با مترو را با M، اتوبوس را با B و تاکسی را با T نشان دهیم،

آنگاه تعداد جایگشت‌های کلمه MMMBBT پاسخ مسئله است:

$$\text{تعداد جایگشت‌ها} = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

روش دوم:

$$\binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 20 \times 3 \times 1 = 60$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۴

۳

۲

۱

از بین همه کلمات ۳ حرفی که با حروف a ، b و c می توان ساخت، تنها دو کلمه bbb و ccc امکان پذیر نیستند، پس آنها را از تعداد کل کلمات کم می کنیم.

$$\text{تعداد کلمات مطلوب} = 3^3 - 2 = 27 - 2 = 25$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه های ۵۸ و ۵۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

ارقام فرد را در یک ردیف قرار می‌دهیم:

$$\square \ 7 \ \square \ 7 \ \square \ 5 \ \square \ 5 \ \square \ 5 \ \square$$

بین و کنار این ارقام، ۶ جای خالی وجود دارد که اگر در ۳ تای آنها ارقام ۲،

۴ و ۶ را قرار دهیم، شرایط مسئله برآورده خواهد شد. بنابراین تعداد

جواب‌های مسئله برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times \begin{matrix} 3! \\ \downarrow \\ \text{جایگشت‌های } 6, 4, 2 \end{matrix} \times \begin{matrix} 5! \\ 3!2! \\ \downarrow \\ \text{جایگشت‌های دو رقم } 7 \text{ و سه رقم } 5 \end{matrix}$$

$$= 20 \times 6 \times 10 = 1200$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر x_A تعداد رأی‌های فرد A، x_B تعداد رأی‌های فرد B، x_C تعداد

رأی‌های فرد C و x_D تعداد رأی‌های فرد D باشد، داریم:

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 7$$

و می‌دانیم: $x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0$. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۴

۳

۲

۱

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۴

۳

۲

۱

کافی است ابتدا جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ با شرط $x_1 = x_2$ را

پیدا کنیم، تا از طریق آن جواب‌های معادله با $x_1 \neq x_2$ را پیدا کرده و بر ۲

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 0, 1, 2, 3$$

به ازای هر مقدار x_1 ، یک و تنها یک مقدار برای x_3 پیدا می‌شود، پس

تعداد جواب‌های معادله با این شرایط برابر ۴ است. حال تعداد کل جواب‌ها

را می‌یابیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

پس در $36 - 4 = 32$ حالت مقدار x_1 با x_2 فرق می‌کند. بنا به تقارن

مسئله در نصف این حالات $x_1 < x_2$ و در نصف دیگر حالات $x_2 < x_1$

است. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد کل جواب‌های مطلوب} = \frac{36-4}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود که اولین مرحله آن همان جمع‌آوری اعداد و ارقام است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علیرضا شریف‌نظیری)

متغیرهای گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» کیفی اسمی هستند ولی متغیر گزینه «۱» کیفی ترتیبی است که به‌طور مثال می‌تواند به‌صورت «کم، متوسط و زیاد» بیان شود.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

سرعت حرکت یک خودرو، متغیر کمی پیوسته، گروه خون متغیر کیفی اسمی، مراحل رشد متغیر کیفی ترتیبی و تعداد فرزندان متغیر کمی گسسته است، بنابراین در گزینه «۳» تمام متغیرهای چهارگانه موجود هستند.

در گزینه «۱» هر دو متغیر «جنسیت» و «شغل» کیفی اسمی، متغیر «سن» کمی پیوسته و متغیر «میزان تحصیلات» کیفی ترتیبی است.

در گزینه «۲» هر دو متغیر «جنسیت» و «شغل» کیفی اسمی، متغیر «وزن» کمی پیوسته و متغیر «تعداد فرزندان» کمی گسسته است.

۴

۳ ✓

۲

۱

چون مشتریان فروشگاه به صورت گروه‌های ۲۰۰ نفره طبقه‌بندی شده و از هر طبقه، نمونه تصادفی ساده می‌گیریم، بنابراین از نمونه‌گیری طبقه‌ای استفاده کرده‌ایم.

۴

۳ ✓

۲

۱

تأثیر نوشابه‌های گازدار روی معده را با آزمایش یا مشاهده می‌توان بررسی کرد و بررسی میزان قاقاق سوخت در سال گذشته با توجه به اطلاعات ثبت‌شده که همان دادگان است، امکان‌پذیر می‌باشد.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به این که از بین ۴۵۰ نفر، قرار است یک نمونه ۳۰ تایی انتخاب کنیم، پس از میان هر ۱۵ نفر، دقیقاً یک نفر باید انتخاب شود. از آن جا که باقی‌مانده تقسیم ۸۲ بر ۱۵، برابر ۷ است، پس اعداد انتخابی به صورت $15k + 7$ ($k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 29$) می‌باشند که در نتیجه عدد ۴۰۲ نمی‌تواند در میان اعداد انتخابی قرار گیرد.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

پارامتر یا پارامتر جامعه یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند، قابل محاسبه است. با توجه به این که در بسیاری از موارد، آمارگیری از کل جامعه امکان پذیر نیست، به رغم اینکه پارامتر مقدار ثابتی دارد، این مقدار مجهول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند. آماره یا آماره نمونه مشخصه‌ای عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه بوده و از داده‌های نمونه به دست می‌آید و آماره‌ها از نمونه‌ای به نمونه دیگر ممکن است تغییر کنند. بنابراین تمامی عبارتهای «الف»، «ب»، «پ» و «ت» صحیح هستند.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه ۱۱۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

در این تحقیق، هر دانشجو یک واحد آماری است ولی جامعه آماری که شامل مجموعه کل واحدهای آماری می‌شود، تمامی دانشجویان این دانشگاه هستند. با توجه به این که نمونه‌گیری از تعدادی از دانشجویان انجام پذیرفته است، پس میانگین تعداد ورزش‌های مورد علاقه دانشجویان این سه دانشکده، می‌تواند یک آماره یا آماره نمونه باشد و چون از تمام دانشجویان سه دانشکده انتخابی، نمونه‌گیری صورت گرفته است، نمونه‌گیری به روش خوشه‌ای انجام پذیرفته است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۷ و ۱۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در نمونه‌گیری طبقه‌ای، با طبقه‌بندی جامعه به زیرجامعه‌های مجزا، یک نمونه تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود. ولی تنها در صورتی احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه‌گیری یکسان است که تعداد اعضای نمونه انتخاب شده از هر طبقه متناسب با تعداد اعضای آن طبقه باشد. در نمونه‌گیری خوشه‌ای، خوشه‌ها به صورت تصادفی ساده انتخاب می‌شوند، پس احتمال انتخاب خوشه‌ها برابر است. در نمونه‌گیری سیستماتیک چون اندازه طبقات با هم برابر است و از هر طبقه فقط یک واحد آماری انتخاب می‌شود، پس احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۷)

۴

۳

۲

۱

در گزینه «۴»، نمونه‌گیری سیستماتیک یا سامانمند صورت گرفته است و تمام دانش‌آموزان مدرسه شانس حضور در نمونه انتخابی را دارند، پس نمونه‌گیری اریب نیست. در گزینه «۱» مدرسان کنکور معمولاً درآمد بیش‌تری نسبت به میانگین معلمان تمام مقاطع دارند، پس نمونه‌گیری اریب است. در گزینه «۲» در نظرسنجی یک وب‌گاه، ممکن است بخش‌هایی از جامعه دسترسی به اینترنت و امکان حضور در این نظرسنجی را نداشته باشند، پس نمونه‌گیری اریب است. در گزینه «۳» افراد حاضر در کتابخانه مدرسه ممکن است دارای میزان مطالعه بیشتری نسبت به سایر دانش‌آموزان مدرسه باشند، پس نمونه‌گیری اریب است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

واضح است که $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است.

برای مشتق‌پذیری تابع در $x=0$ نیز داریم:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{-1}{x \times x} \cdot \frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \end{aligned}$$

بنابراین تابع f در $x=0$ فاقد مشتق است.

از طرفی چون تابع f در $x=0$ پیوسته است و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

می‌باشد، خط $x=0$ مماس قائم نمودار تابع $f(x)$ است.

(مسئله ۲- مشتق: صفحه ۸۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(جوانبش نیکنام)

$$L \text{ شیب خط } m_L = \frac{f(\alpha) - (-2)}{\alpha - 0} = \frac{\alpha^2 + \alpha - 1 + 2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha}$$

از طرفی این شیب با $f'(\alpha)$ برابر است که داریم: $f'(\alpha) = 2\alpha + 1$.

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha} = 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 1$$

$$f(\alpha) + f'(\alpha) = (\alpha^2 + \alpha - 1) + (2\alpha + 1) \stackrel{\alpha=1}{=} 1 + 3 = 4$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\xrightarrow[\text{در } x=1]{\text{شرط پیوستگی}} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow 1 + b = -2 + a \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & ; x > 1 \\ -2 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = 2 + b \\ f'_-(1) = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{در } x=1]{\text{شرط مشتق پذیری}} 2 + b = -2 \Rightarrow b = -4$$

$$\xrightarrow{(1)} a = -1 \Rightarrow a + b = -5$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷ و ۹۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

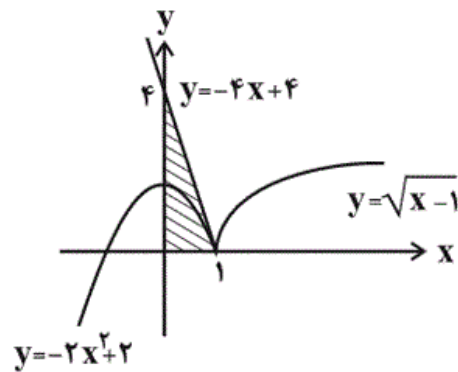
شیب نیم‌مماس چپ در نقطه $x=1$ ، $f'_-(1)$ می‌باشد.

$$x < 1: f(x) = -2x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = -4x \Rightarrow f'_-(1) = -4$$

معادله خطی که از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد و شیب -4 دارد، عبارت است از:

$$y - 0 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 4$$

بنابراین ناحیه مورد نظر، مثلث هاشورخورده شکل زیر می‌باشد:



که مساحت آن برابر $2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 4$ است.

(مسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۸۷، ۹۳ و ۹۴)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|ax^2 - 4a| - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|a||x-2||x+2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|a|(x-2)(4)}{x-2} = 4|a|$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|a||x-2||x+2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|a|(-x+2)(4)}{x-2} = -4|a|$$

چون قرار است دو نیم‌مماس بر هم عمود باشند، پس باید شیب‌هایشان قرینه

و معکوس هم باشد:

$$\Rightarrow f'_+(2)f'_-(2) = -1 \Rightarrow (4|a|)(-4|a|) = -1 \Rightarrow 16|a|^2 = 1$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ همان $f'(4)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(\sqrt{2x+1}) - \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)(3x-3)}{(\sqrt{2x+1})^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{9 - \frac{9}{3}}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با استفاده از قاعده مشتق حاصل ضرب توابع داریم:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{1+x} + 2x \frac{f(x)}{1+x^2} + 4x^3 \frac{f(x)}{1+x^4} + \dots + 2^n x^{2^n-1} \frac{f(x)}{1+x^{2^n}}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1$$

نکته: اگر تابع $f(x)$ ، از حاصل ضرب چند تابع دیگر به صورت زیر تشکیل

شده باشد:

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)$$

برای مشتق تابع $f(x)$ داریم:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n g'_i(x) \frac{f(x)}{g_i(x)} = f(x) \sum_{i=1}^n \frac{g'_i(x)}{g_i(x)}$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1 - \sin x}{x \cos x} + \frac{\sin x + \cos x - 1}{x \cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{x \cos x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow (f + g)'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \stackrel{x = \frac{1}{2}}{=} \frac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۴

۳

۲

۱

(عرفان صادقی)

۸۹ -

$$f(a) = 2f'(a) = 8 \Rightarrow \begin{cases} f(a) = 8 \\ f'(a) = 4 \end{cases}$$

$$y = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}} \xrightarrow{x=a} y' = \frac{f'(a)}{3\sqrt[3]{f^2(a)}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{3}$$

(مسئله ۲- مشتق: صفحه ۹۶)

۴

۳

۲

۱

$$f(x) = \frac{r \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{r(1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} = \frac{r(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x}$$

$$\Rightarrow f(x) = r(1 - \sin x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -r \cos x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -r \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{r\sqrt{3}}{2}$$

(مسایان ۲- مشتق: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمد ابراهیم کیتی زاده)

$$A = (a, b, c) \xrightarrow{\text{تصویر روی صفحه } xy} B = (a, b, 0)$$

$$A = (a, b, c) \xrightarrow{\text{تصویر روی محور } z} C = (0, 0, c)$$

$$|BC| = \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

از طرفی $|OA| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ است، پس $|OA| = |BC|$ می‌باشد.

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فاصله نقطه $A = (x_0, y_0, z_0)$ از صفحه xz و محور y ها به ترتیب برابر

$$\text{است با } |y_0| \text{ و } \sqrt{x_0^2 + z_0^2}.$$

پس با توجه به فرض داریم:

$$|m|=1 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow M_1 = (2, 1, 1) \\ m=-1 \Rightarrow M_2 = (0, -1, 1) \end{cases}$$

فاصله نقطه M از صفحه xz

فاصله نقاط M_1 و M_2 از محور y ها به ترتیب برابر است

$$\text{با: } \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \text{ و } \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(فرهاد وفايي)

تصویر قائم روی صفحه yz

$$M = (m-1, 1, -1) \longrightarrow A = (0, 1, -1)$$

قرینه نسبت به محور y ها

$$M = (m-1, 1, -1) \longrightarrow B = (1-m, 1, 1)$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(1-m)^2 + 0 + 4} \Rightarrow \min |AB| = \sqrt{4} = 2$$

(هندسه ۳- بردارها: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$|OA| = \sqrt{(m+1)^2 + 1 + 4} = \sqrt{(m+1)^2 + 5}$$

$$|OB| = \sqrt{m^2 + 1 + 1} = \sqrt{m^2 + 2}$$

$$|AB| = \sqrt{(m - m - 1)^2 + (-1 - 1)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{14}$$

$$|AB|^2 > |OA|^2 \Rightarrow 14 > (m+1)^2 + 5 \Rightarrow (m+1)^2 < 9$$

$$\Rightarrow -4 < m < 2$$

$$|OA|^2 > |OB|^2 \Rightarrow (m+1)^2 + 5 > m^2 + 2 \Rightarrow m > -2$$

از اشتراک نامعادلات فوق، حدود تغییرات m به صورت $-2 < m < 2$

به دست می‌آید.

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر دو نقطه A و B ، قرینه یکدیگر نسبت به محور Z ها باشند، آنگاه

وسط پاره خط AB روی محور Z ها قرار خواهد داشت. اگر M وسط

پاره خط AB باشد، داریم:

$$M = \frac{A + B}{2} = \frac{(m, -2m, 1) + (2n, n - 5, 1)}{2}$$

$$= \left(\frac{m + 2n}{2}, \frac{-2m + n - 5}{2}, 1 \right)$$

نقطه M روی محور Z ها است، پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{m + 2n}{2} = 0 \\ \frac{-2m + n - 5}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = 0 \\ -2m + n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$$

بنابراین $C = (-2, 4, 0)$ است. با توجه به مختصات نقاط A و B که

به صورت $A = (-2, 4, 1)$ و $B = (2, -4, 1)$ تعریف می‌شوند، نقطه C

تصویر قائم نقطه A روی صفحه xy است.

(هنر سه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی ایمانی)

نقاطی از فضا که در رابطه $x = 2$ صدق می‌کنند، صفحه‌ای موازی با صفحه

yz (صفحه $x = 0$) و در نتیجه عمود بر محور x ها می‌باشد.

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

حجم محدود به صفحات داده شده، مکعبی با ابعاد 2×1 ، 2×2 و $2 \times b$

است. دو نقطه‌ای که در دو سر قطر مکعب مستطیل واقع‌اند، بیش‌ترین فاصله

را دارند، بنابراین داریم:

$$2\sqrt{69} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (2b)^2} \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8 \xrightarrow{b > 0} b = 8$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر فاصله کانونی، قطر دهانه و گودی (عمق) یک دیش را به ترتیب با a ، d

و h نمایش دهیم، آنگاه $a = \frac{d^2}{16h}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{d_1^2}{16h_1}}{\frac{d_2^2}{16h_2}} = \frac{d_1^2 \times h_2}{d_2^2 \times h_1} = \frac{(6d_2)^2 \times h_2}{d_2^2 \times 4h_2}$$

$$= \frac{36d_2^2 \times h_2}{4d_2^2 \times h_2} = \frac{36}{4} = 9$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه ۵۸)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$m = 1 \rightarrow \text{معادله پرتو تابش} : y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$$

$$m = -1 \rightarrow \text{معادله پرتو تابش} : y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

$$y^2 = 4x + 2 \Rightarrow y^2 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

سهمی مورد نظر یک سهمی افقی است که دهانه آن به سمت راست باز

می‌شود. در این سهمی $S\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ رأس و $a = 1$ فاصله کانونی است. محور

تقارن سهمی همان محور x ها است، پس شعاع نوری که در راستای خط

$y = 1$ به سهمی می‌تابد، بعد از بازتابش از کانون سهمی عبور می‌کند. اگر

M نقطه تلاقی پرتو نور با سهمی باشد، داریم:

$$y^2 = 4x + 2 \xrightarrow{y=1} 1 = 4x + 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$$

$$\text{کانون سهمی : } F\left(-\frac{1}{2} + 1, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$m_{MF} = \frac{y_F - y_M}{x_F - x_M} = \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{MF معادله خط : } y - 0 = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\times 3} 3y = -4x + 2$$

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{2}{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه ۵۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = ab^{\frac{3}{2}} = 4 \Rightarrow ab\sqrt{b} = 4 \quad (1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = ab^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow a\sqrt{b} = 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} b = 4, a = \frac{1}{2} \Rightarrow b - a = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عمید علیزاده)

$$3^x = 249$$

$$\Rightarrow 3^5 < 249 = 3^x < 3^6 \Rightarrow 5 < x < 6 \Rightarrow [x] = 5$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

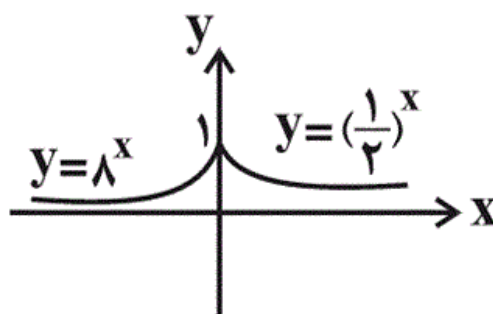
 ۳

 ۲

 ۱

به نمودار تابع $y = 2^{x-2|x|}$ توجه کنید:

$$y = 2^{x-2|x|} = \begin{cases} 2^{-x} & ; x \geq 0 \\ 2^{2x} & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x \geq 0 \\ 4^x & ; x < 0 \end{cases}$$



واضح است که اگر $k = 0$ باشد، معادله به صورت $2^{x-2|x|} = 0$ در می‌آید

که جواب ندارد و اگر $k \neq 0$ باشد، خط $y = kx$ نمودار تابع $y = 2^{x-2|x|}$

را قطع می‌کند و معادله مورد نظر جواب دارد.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$y = f(x) = 2^{x+1} - 3 \Rightarrow 2^{x+1} = y + 3 \Rightarrow \log_2(y + 3) = x + 1$$

$$\Rightarrow x = \log_2(y + 3) - 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \log_2(x + 3) - 1$$

$$= \log_2(x + 3) - \log_2 2 = \log_2\left(\frac{x + 3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 5$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} = \log_4^c \Rightarrow c = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} = 2.828$$

از طرفی دامنه تابع $(-2, 1)$ است. این یعنی تعیین علامت چند جمله‌ای

داده شده باید به صورت زیر باشد:

x	-2	1
$ax^2 + bx + 8$	- \circ +	\circ -

واضح است که $x = -2$ و $x = 1$ باید جواب‌های معادله

$$ax^2 + bx + 8 = 0 \text{ باشند، بنابراین داریم:}$$

$$\begin{cases} a(-2)^2 + b(-2) + 8 = 0 \Rightarrow 2a - b = -4 \\ a(1)^2 + b(1) + 8 = 0 \Rightarrow a + b = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = -4 \Rightarrow f(x) = \log_4 \left[-4(x^2 + x - 2) \right]$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_4 \left[-4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2\right) \right] = \log_4^{\Delta} = \frac{1}{2} \log_2^{\Delta}$$

$$= \frac{1}{2} (\log_2^{\Delta} - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\log_2} - 1 \right) = \frac{1 - \log_2}{2 \log_2}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$3^{\log_5 \sqrt{3}} = 3^2 \log_3^5 = \left(3^{\log_3^5}\right)^2 = 5^2 = 25$$

$$5^{\log_3 \sqrt{3}} = 5^2 \log_3^3 = 5^2 = 25$$

$$\Rightarrow 3^{\log_5 \sqrt{3}} + 5^{\log_3 \sqrt{3}} = 25 + 25 = 50$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(جهانبش نیکنام)

۹۷-

$$A = 5 \log_{\frac{5}{2^2}}^{3-\sqrt{6}} - 6 \log_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2 \log_2^{3-\sqrt{6}} - 2 \log_2^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= 2 \log_2^{\frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = 2 \log_2^{\sqrt{3}} = \log_2^3$$

$$\Rightarrow 4^A = 4^{\log_2^3} = 2^{\log_2^3} = 9$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

قرار می‌دهیم: $\log x = t$. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{1-t} + \frac{2}{1-2t} = 3; \left(t \neq 1, \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow 3 - 4t = 3(1-t)(1-2t) \Rightarrow 6t^2 - 5t = 0$$

$$\Rightarrow t(6t - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \log x = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 10^{\frac{5}{6}} \end{cases}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دامنه معادله: $x > 0$

حال معادله را به صورت $|\log_3^x - 2| = 2 - \log_3^x$ بازنویسی می‌کنیم. پس

داریم:

$$\log_3^x - 2 \leq 0 \Rightarrow \log_3^x \leq 2 \Rightarrow \log_3^x \leq \log_3^9 \Rightarrow x \leq 9$$

یعنی مجموعه جواب‌های نامعادله، بازه $(0, 9]$ و در نتیجه $a = 9$ است.

$$\Rightarrow \log(a+1) = \log 10 = 1$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\log_2(4^x + 12) = x + 3 \xrightarrow{\text{طبق تعریف لگاریتم}} 2^{x+3} = 4^x + 12$$

$$\Rightarrow 4^x - 2^{x+3} + 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 8(2^x) + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x - 2)(2^x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ 2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6 \end{cases}$$

پس حاصل جمع ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$1 + \log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 6 = \log_2 12$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

می‌دانیم در یک تجانس به نسبت k ، طول پاره‌خط‌ها $|k|$ برابر و اندازه مساحت‌ها k^2 برابر می‌شود. طول هر ضلع مربع به طول قطر $\sqrt{2}$ ، برابر یک است، بنابراین در این تجانس $|k| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ است.

اگر S و S' به ترتیب مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۴ و مساحت مثلث تبدیل یافته تحت این تجانس باشند، داریم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{S'}{S} = k^2 \Rightarrow \frac{S'}{4\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow S' = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

انتقال و تجانس، همواره شیب خط را حفظ می‌کنند، یعنی تبدیل یافته یک خط با یکی از این دو تبدیل هندسی، موازی با آن خط است. همچنین اگر محور بازتاب با یک خط موازی باشد، آنگاه تصویر خط تحت این بازتاب موازی با خط است. بنابراین چون دو خط AB و CD در ذوزنقه $ABCD$ موازی یکدیگرند، پس بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط CD ، موازی با AB خواهد بود. دوران تنها در حالتی شیب خط را حفظ می‌کند که زاویه دوران مضربی از 180° باشد. با توجه به این که زاویه AOB قطعاً کم‌تر از 180° است، پس تحت دوران به مرکز O و زاویه AOB ، قطعاً شیب خط تغییر می‌کند.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۵۰)

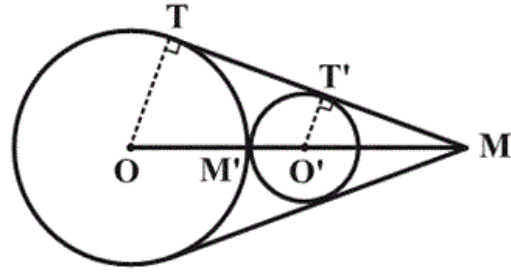
۴ ✓

۳

۲

۱

دو دایره همواره مجانس یکدیگر هستند. در دو دایره مماس خارج، مرکز تجانس مستقیم، محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی و مرکز تجانس معکوس، محل تماس دو دایره است، بنابراین مطابق شکل داریم:



M : مرکز تجانس مستقیم

M' : مرکز تجانس معکوس

$$\triangle MTO : OT \parallel O'T' \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{O'M}{OM} = \frac{O'T'}{OT}$$

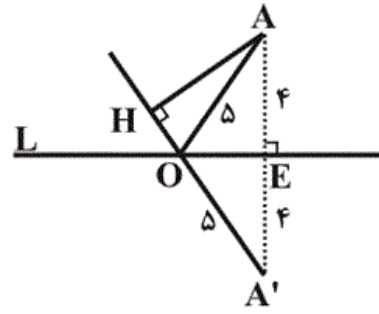
$$\Rightarrow \frac{O'M}{O'M + 3} = \frac{1}{2}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



چون بازتاب تبدیلی طولپا است، پس $AE = A'E = 4$ است و در نتیجه بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث AEO ، $OE = 3$ خواهد بود. برای محاسبه طول AH ، کافی است مساحت مثلث AOA' را به دو روش زیر بنویسیم و برابر یکدیگر قرار دهیم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta AOA'} &= \frac{1}{2} OE \times AA' \\ S_{\Delta AOA'} &= \frac{1}{2} AH \times OA' \end{aligned} \right\} \Rightarrow OE \times AA' = AH \times OA'$$

$$\Rightarrow 3 \times 8 = AH \times 5 \Rightarrow AH = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}$$

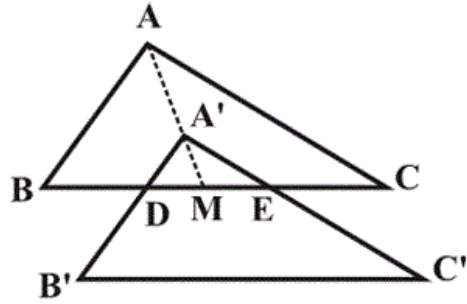
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مطابق شکل تصویر مثلث ABC در انتقال تحت بردار $\overrightarrow{AA'}$ (محل A') هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC است، مثلث $A'B'C'$ است. مثلث $A'DE$ میان دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مشترک است. دو مثلث ABC و $A'DE$ به دلیل موازی بودن AB با $A'D$ و AC با $A'E$ متشابه‌اند. با توجه به این که در هر مثلث، میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به

$$AA' = 2A'M \Rightarrow A'M = \frac{1}{3}AM \quad \text{۱ قطع می‌کنند، داریم:}$$

یعنی نسبت میانه‌ها (نسبت تشابه) برای دو مثلث ABC و $A'DE$ ، برابر

$$\frac{1}{3} \text{ است. پس داریم:}$$

$$\frac{S_{\Delta A'DE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\Delta A'DE} = \frac{1}{9} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{9} \times 54 = 6$$

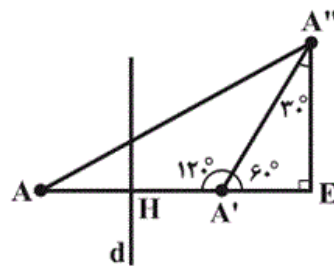
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مطابق شکل $AH = 2\sqrt{6}$ است، پس $AA' = A'A'' = 4\sqrt{6}$ می‌باشد. اگر از A'' بر AA' عمود رسم کنیم، در مثلث قائم‌الزاویه $A'EA''$ ، $\hat{A}'' = 30^\circ$ و $\hat{A}' = 60^\circ$ است. با توجه به این که در مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های 30° و 60° به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است، داریم:

$$A'E = \frac{A'A''}{2} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AE = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

$$A''E = \frac{\sqrt{3}}{2} A'A'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{6} = 6\sqrt{2}$$

$$\triangle AEA'' : AA''^2 = AE^2 + A''E^2 = (6\sqrt{6})^2 + (6\sqrt{2})^2$$

$$= 216 + 72 = 288$$

$$\Rightarrow AA'' = 12\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۴)

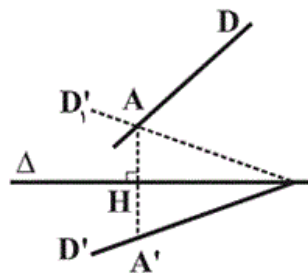
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر خط Δ عمود منصف پاره خط AA' باشد، آنگاه دو نقطه A و A' نسبت به این خط قرینه یکدیگرند، پس می توان خط D' را نسبت به خط Δ بازتاب داد تا خط D را در نقطه A قطع کند. اگر نقطه A را نسبت به خط Δ بازتاب دهیم، نقطه A' حاصل می شود. در صورتی که خط D را نسبت به خط Δ بازتاب دهیم تا خط D' را قطع نماید، محل تقاطع همان نقطه A' در شکل است و همان دو نقطه A و A' حاصل می گردد.



(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها: صفحه های ۳۷ تا ۴۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$S_{ABCB'} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \left(\frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 135^\circ \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 12$$

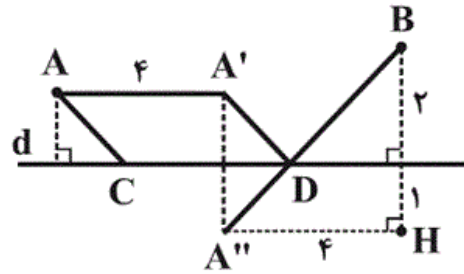
(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها: صفحه های ۵۲ و ۵۳)

۴

۳

۲ ✓

۱



نقطه A را تحت انتقال با بردار \vec{v} موازی خط d (به سمت راست) و به طول 4 بر نقطه A' تصویر می‌کنیم. قرینه A' را نسبت به خط d ، نقطه A'' و نقطه تلاقی خط d و پاره‌خط $A''B$ را نقطه D می‌نامیم. سپس CD را به طول 4 روی خط d جدا می‌کنیم. مسیر $ACDB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. داریم:

$$A''B^2 = BH^2 + A''H^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow A''B = 5$$

$$\Rightarrow A''D + BD = 5$$

$$\xrightarrow[\text{طولپایی بازتاب}]{A'D=A''D} A'D + BD = 5 \xrightarrow[\text{طولپایی انتقال}]{AC=A'D} AC + BD = 5$$

$$\text{طول مسیر } ACDB = AC + CD + DB$$

$$= (AC + BD) + CD = 5 + 4 = 9$$

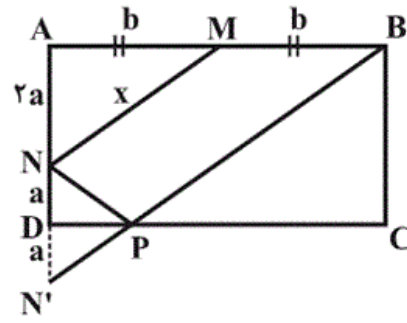
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



بازتاب N نسبت به DC را N' می‌نامیم. از N' به B وصل می‌کنیم، محل تلاقی آن با DC را P می‌نامیم. $MNPB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن

است. حال داریم: $MN + \underbrace{NP + PB}_{N'B} = 6 \Rightarrow N'B = 6 - MN$

$$\Delta AN'B: AN'^2 + AB^2 = BN'^2$$

$$\Rightarrow (4a)^2 + (2b)^2 = BN'^2 \Rightarrow \underbrace{4(a^2 + b^2)}_{MN^2} = (6 - MN)^2$$

$$\xrightarrow{MN=x} 4x^2 = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow (x+6)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -6 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 2 \end{cases}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱