



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان 1 - 20 سوال

۸۱- اگر  $A = \log_3 \frac{95}{3}$  باشد، حاصل  $[A]$  کدام است؟ ( $[ ]$  علامت جزء صحیح است).

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

۸۲- اگر  $\log_2^4 \log_3^x x = (\log_8^2)^{\log_2^4}$  آن گاه  $\log_3^x x$  برابر است با:

- ۳ (۴)       $\frac{1}{3}$  (۳)       $-\frac{1}{3}$  (۲)      -۳ (۱)

۸۳- اگر  $\log_{\frac{1}{b}} a^{\sqrt{a}} = 2$  باشد، حاصل  $\log_{\sqrt{a}}^b$  کدام است؟ ( $a, b > 0$ ), ( $a, b \neq 1$ )

- $-\frac{3}{4}$  (۱)       $-\frac{3}{2}$  (۲)       $\frac{3}{4}$  (۳)       $\frac{3}{2}$  (۴)

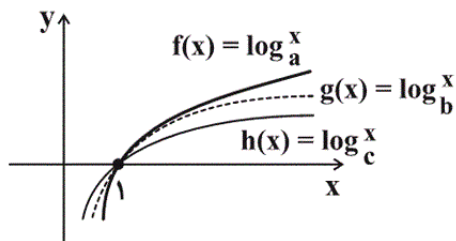
۸۴- معادله  $\log_{5-x}^{x-1} + \log_{5-x}^{x+2} = \log_{5-x}^4$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ جواب ندارد.

۸۵- کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \log_{49}^x$  قرار ندارد؟

- $(\sqrt[3]{7^2}, \frac{1}{3})$  (۱)       $(\frac{1}{49}, -1)$  (۲)       $(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}, -\frac{2}{3})$  (۳)       $(7^4, 2)$  (۴)

۸۶- کدام نتیجه‌گیری درباره نمودار مقابل صحیح است؟



- ۱  $c < b < a$  (۱)  
۲  $0 < c < a < b < 1$  (۲)  
۳  $1 < a < b < c$  (۳)  
۴  $0 < a < b < c < 1$  (۴)

۸۷- اگر  $A = (\log 2)^3 + (\log 8)(\log 5) + (\log 5)^3$  باشد، حاصل عبارت  $\log_{(3A+5)}^{(3A+1)}$  کدام است؟

- $\frac{2}{3}$  (۴)      ۲ (۳)       $\frac{2}{5}$  (۲)      ۱ (۱)

۸۸- معادله  $|\log x| + |x-2| = 4$  چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۸۹- به ازای کدام مقدار مثبت  $k$ ، معادله  $\log_3^x + \log_x^{\sqrt{3}} = k$  فقط یک جواب دارد؟

$\sqrt{3}$  (۴)

$\sqrt{2}$  (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۹۰- مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{1}{2} \log_2 x^2 + \log_2(x+1) = -2$  کدام است؟

$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)

۱ (۳)

$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)

-۱ (۱)

۹۱- مقدار انرژی آزاد شده ( $E$ ) برحسب ارگ در یک زمین‌لرزه از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5 M$  به دست می‌آید که در آن  $M$  واحد بزرگی زلزله برحسب ریشتر و  $E$  انرژی آزاد شده است. مقدار انرژی آزاد شده در یک زمین‌لرزه  $6/2$  ریشتری چند واحد است؟

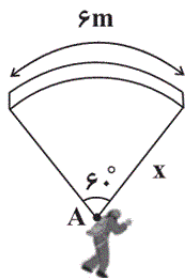
$10^{21/8}$  (۴)

$10^{21/5}$  (۳)

$10^{21/1}$  (۲)

$10^{21/7}$  (۱)

۹۲- مطابق شکل، یک چتر نجات به حالت دایره‌ای در هنگام پرواز به اندازه  $60^\circ$  درجه باز شده است. مقدار  $x$  چند متر است؟ (نقطه  $A$  را مرکز دایره فرض کنید).



$\frac{\pi}{10}$  (۱)

$18\pi$  (۲)

$10\pi$  (۳)

$\frac{18}{\pi}$  (۴)

۹۳- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اختلاف دو زاویه حاده برابر با  $18^\circ$  است. کوچک‌ترین زاویه مثلث چند رادیان است؟

$\frac{2\pi}{5}$  (۴)

$\frac{3\pi}{10}$  (۳)

$\frac{\pi}{5}$  (۲)

$\frac{\pi}{10}$  (۱)

۹۴- نقاط انتهایی مربوط به کمان‌های  $2$ - و  $7$ - رادیان، به ترتیب از راست به چپ در کدام نواحی دایره مثلثاتی قرار می‌گیرند؟

(۴) دوم و دوم

(۳) سوم و اول

(۲) سوم و دوم

(۱) دوم و اول

۹۵- طول کمان زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{3}$  رادیان در دایره  $C$  با طول کمان زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{12}$  رادیان در دایره  $C'$  برابر است. نسبت مساحت دایره  $C$  به مساحت دایره  $C'$  کدام است؟

۱۶ (۴)

$\frac{1}{16}$  (۳)

۴ (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

۹۶- در مدت ۴۸ دقیقه، عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار، در مجموع چند رادیان طی می‌کنند؟

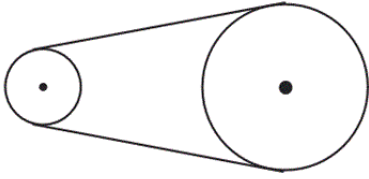
$$\frac{28\pi}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{26\pi}{15} \quad (۳)$$

$$\frac{9\pi}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{8\pi}{5} \quad (۱)$$

۹۷- در شکل زیر، یک تسمه به طول  $\pi$  متر، دو قرقره به شعاع‌های ۴۰ و ۱۰ سانتی‌متر را به هم وصل کرده است. اگر تسمه ۲۰ دور بچرخد، قرقره‌های کوچک و بزرگ به ترتیب از راست به چپ چند رادیان می‌چرخند؟



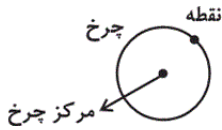
$$100\pi, 200\pi \quad (۱)$$

$$100\pi, 400\pi \quad (۲)$$

$$50\pi, 200\pi \quad (۳)$$

$$50\pi, 400\pi \quad (۴)$$

۹۸- طول کمانی که یک نقطه روی یک چرخ دوار به شعاع  $\frac{1}{\pi}$  متر در هر ساعت طی می‌کند برابر با  $\frac{2}{5}$  متر است. اگر این نقطه نسبت به مرکز چرخ به اندازه ۹۰۰ درجه دوران کرده و سپس از کار بایستد، این چرخ جمعاً چند ساعت چرخیده است؟



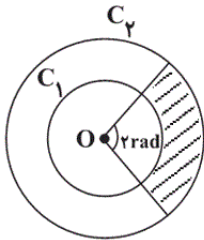
$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

$$5 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

۹۹- دو دایره  $C_1(O, r)$  و  $C_2(O, R)$  که  $R > r$ ، مطابق شکل زیر مفروض‌اند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر مساحت دایره  $C_1$  باشد، مساحت دایره  $C_2$  چند برابر مساحت دایره  $C_1$  است؟



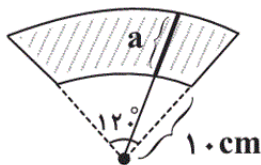
$$\pi - 1 \quad (۱)$$

$$\pi \quad (۲)$$

$$\pi + 1 \quad (۳)$$

$$\pi + 2 \quad (۴)$$

۱۰۰- تیغه برف‌پاک‌کن عقب یک اتومبیل، سطح هاشورخورده شکل زیر به مساحت  $308\pi$  سانتی‌متر مربع را تمیز می‌کند. اگر زاویه طی شده  $120^\circ$  باشد، طول تیغه برف‌پاک‌کن (a) چند سانتی‌متر است؟



$$12 \quad (۱)$$

$$22 \quad (۲)$$

$$32 \quad (۳)$$

$$42 \quad (۴)$$

هندسه 2- 10 سوال -

۱۲۱- عکس کدام گزاره همواره برقرار است؟

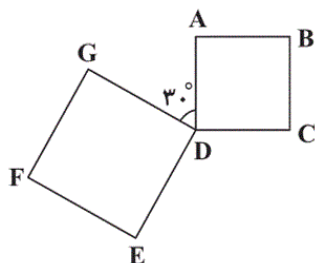
(۱) اگر دو شکل متجانس باشند، آن‌گاه متشابه‌اند.

(۲) اگر تبدیلی شیب خطوط را حفظ کند، آن‌گاه جهت شکل را حفظ می‌کند.

(۳) اگر تبدیلی طولی باشد، آن‌گاه اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

(۴) اگر تبدیلی همانی باشد، آن‌گاه تمام نقاط صفحه، نقطه ثابت آن تبدیل هستند.

۱۲۲- در شکل زیر، ABCD و DEFG مربع هستند. اگر پاره‌خط AE و CG دوران یافته یکدیگر باشند، آن گاه مرکز این دوران و اندازه زاویه



دوران کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) محل تقاطع AC و GE - ۹۰ درجه  
 (۲) محل تقاطع AC و GE - ۱۲۰ درجه  
 (۳) محل تقاطع عمودمنصف‌های AC و GE - ۹۰ درجه  
 (۴) محل تقاطع عمودمنصف‌های AC و GE - ۱۲۰ درجه

۱۲۳- خط d تحت انتقال با هر یک از دو بردار عمود بر هم به اندازه‌های ۱۵ و ۲۰ روی خط d' تصویر می‌شود. طول کوتاه‌ترین برداری که خط d را به d' تبدیل می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۹  
 (۲) ۱۰  
 (۳) ۱۲  
 (۴) ۲۵

۱۲۴- نقطه A را روی محیط دایره C(O, R) در نظر می‌گیریم. A' بازتاب نقطه A نسبت به یکی از قطرهای دایره بوده و داریم:  $AA' = \sqrt{3}R$ . اگر A' دوران یافته A حول مرکز دایره نیز باشد، زاویه دوران چند درجه است؟

- (۱) ۶۰  
 (۲) ۹۰  
 (۳) ۱۲۰  
 (۴) ۱۵۰

۱۲۵- دو خط موازی  $d_1$  و  $d_2$  به فاصله  $m-4$  در صفحه قرار دارند. بازتاب مثلث ABC نسبت به خط  $d_1$  را  $\Delta A'B'C'$  و بازتاب  $\Delta A'B'C'$  نسبت به خط  $d_2$  را  $\Delta A''B''C''$  می‌نامیم. اگر  $AA'' = m+1$ ، آن گاه اندازه  $BB''$  کدام است؟ (A', B', C' به ترتیب تبدیل یافته نقاط A, B و C و نقاط A'', B'', C'' به ترتیب تبدیل یافته نقاط A', B' و C' هستند).

- (۱)  $\frac{5}{2}$   
 (۲)  $\frac{3}{2}$   
 (۳)  $\frac{10}{3}$   
 (۴)  $\frac{7}{3}$

۱۲۶- یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با تجانسی که مرکز آن نقطه هم‌رسی میانه‌ها و به نسبت  $K = \frac{1}{4}$  است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت ناحیه بین

مثلث و تصویرش برابر  $3\sqrt{3}$  باشد، آن گاه محیط مثلث اولیه کدام است؟

- (۱) ۶  
 (۲)  $6\sqrt{6}$   
 (۳) ۱۲  
 (۴)  $12\sqrt{2}$

۱۲۷- دایره C را در تجانسی با نسبت ۳ بر دایره C' تصویر می‌کنیم. اگر C و C' مماس داخل و فاصله مراکز آنها برابر ۴ باشد، مساحت ناحیه

محدود بین دو دایره چقدر است؟

- (۱)  $14\pi$  (۲)  $16\pi$   
 (۳)  $28\pi$  (۴)  $32\pi$

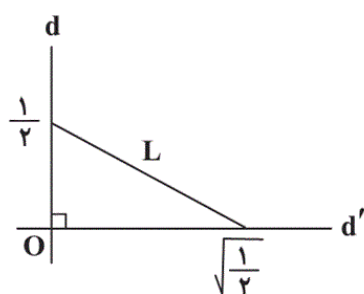
۱۲۸- روی محور x ها سه نقطه A، B و C از نقطه  $x = 0$  به ترتیب به فاصله‌های ۱، ۲ و ۳ قرار دارند. اگر در یک تجانس معکوس و انقباضی به

مرکز A، نقطه B بر C تصویر شود، نسبت  $\frac{AB}{BC}$  کدام است؟

- (۱)  $0/2$  (۲)  $0/6$   
 (۳) ۱ (۴)  $1/5$

۱۲۹- در شکل زیر، اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس  $\sqrt{\sqrt{2}+1}$  تصویر کنیم و آن را L' بنامیم، آنگاه مساحت بین خط L

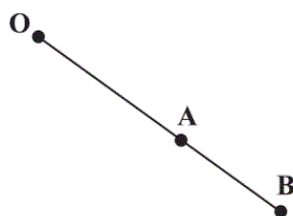
و خطوط d و d' چقدر است؟



- (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{1}{4}$   
 (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۱۳۰- اگر نقاط A' و B' به ترتیب مجانس‌های دو نقطه A و B در تجانس به مرکز O و نسبت  $K = \frac{3}{4}$  باشند و  $AB = 12$ ، آنگاه فاصله دو

نقطه A' و B' کدام است؟



- (۱) ۹ (۲) ۶  
 (۳) ۸ (۴) ۱۲

حسابان 1- سوالات موازی -

۱۰۱- اگر  $\frac{95}{3} = \log_7 A$  باشد، حاصل [A] کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است).

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

۱۰۲- اگر  $x = (\log_8^2)^{\log_2^4}$  آن گاه  $\log_3^x$  برابر است با:

- ۳ (۴)       $\frac{1}{3}$  (۳)       $-\frac{1}{3}$  (۲)      -۳ (۱)

۱۰۳- اگر  $\log_{\frac{1}{b}} a^{\sqrt{a}} = 2$  باشد، حاصل  $\log_{\sqrt{a}}^b$  کدام است؟ ( $a, b > 0$ ) , ( $a, b \neq 1$ )

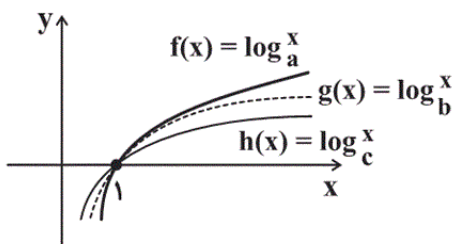
- $\frac{3}{2}$  (۴)       $\frac{3}{4}$  (۳)       $-\frac{3}{2}$  (۲)       $-\frac{3}{4}$  (۱)

۱۰۴- معادله  $\log_{\delta-x}^{x-1} + \log_{\delta-x}^{x+2} = \log_{\delta-x}^4$  چند جواب دارد؟

- ۳ (۳)      ۲ (۲)      ۱ (۱)      ۴ جواب ندارد.

۱۰۵- کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \log_{49}^x$  قرار ندارد؟

- $(\sqrt[3]{7^2}, \frac{1}{3})$  (۱)       $(\frac{1}{49}, -1)$  (۲)  
 $(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}, -\frac{2}{3})$  (۳)       $(7^4, 2)$  (۴)



۱۰۶- کدام نتیجه‌گیری درباره نمودار مقابل صحیح است؟

- $1 < c < b < a$  (۱)  
 $0 < c < a < b < 1$  (۲)  
 $1 < a < b < c$  (۳)  
 $0 < a < b < c < 1$  (۴)

۱۰۷- اگر  $A = (\log 2)^3 + (\log 8)(\log 5) + (\log 5)^3$  باشد، حاصل عبارت  $\log_{(3A+5)}^{(3A+1)}$  کدام است؟

- $\frac{2}{3}$  (۴)      ۲ (۳)       $\frac{2}{5}$  (۲)      ۱ (۱)

۱۰۸- معادله  $|\log x| + |x-2| = 4$  چند جواب دارد؟

- ۴ (۴)      ۳ (۳)      ۲ (۲)      ۱ (۱)

۱۰۹- به ازای کدام مقدار مثبت  $k$ ، معادله  $\log_x^x + \log_x^{\sqrt{3}} = k$  فقط یک جواب دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{3}$

۱۱۰- مجموع ریشه‌های معادله  $\frac{1}{y} \log_y x^2 + \log_y(x+1) = -2$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲)  $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳) ۱ (۴)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۱- مقدار انرژی آزاد شده (E) برحسب ارگ در یک زمین‌لرزه از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5 M$  به دست می‌آید که در آن M واحد بزرگی زلزله برحسب ریشتر و E انرژی آزاد شده است. مقدار انرژی آزاد شده در یک زمین‌لرزه ۶/۲ ریشتری چند واحد است؟

(۱)  $10^{21/7}$  (۲)  $10^{21/1}$  (۳)  $10^{21/5}$  (۴)  $10^{21/8}$

۱۱۲- حاصل  $\log_{1+\sqrt{2}}^{(3+2\sqrt{2})^3}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۱۳- اگر  $\log 2 = a$  باشد، حاصل  $\log \frac{40}{\sqrt{5}}$  کدام است؟

(۱)  $2a + \frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{7}{2}a - \frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{5}{2}a + \frac{1}{2}$

۱۱۴- معادله  $\log^{x+2} + \log^{x+3} + \log^{x+4} = -1$  چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب ندارد.

۱۱۵- اگر  $a = \sqrt{y^{(2\log_y^4 - \log_y^{16})}}$  باشد، معادله  $\log_a^{(x+1)} + \log_a^{(x-1)} = 3$  چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



۱۱۶- نمودار تابع  $y = 3 - \log_7^{(x+5)}$ ، محور x ها را با طول x و محور عرض ها را با عرض y قطع می کند. حاصل  $x_0 + y_0$  تقریباً کدام است؟

( $\log 2 \approx 0.3$ )

- (۱)  $\frac{11}{3}$  (۲)  $\frac{7}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۳

۱۱۷- اگر  $f(x) = \log(3x-1)$  و  $g = \{(0, -1), (-1, 0), (2, 1), (\frac{5}{3}, \frac{1}{5})\}$  باشند، تابع fog کدام است؟ ( $\log 2 \approx 0.3$ )

- (۱)  $\{(2, 0/3)\}$  (۲)  $\{(2, 0/5)\}$  (۳)  $\{(\frac{5}{3}, \frac{2}{5}), (2, 0/3)\}$  (۴)  $\{(2, 0/5), (0, -1)\}$

۱۱۸- جواب معادله  $2(\log_3^2)^x = 3(\log_3^2)^x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۱۹- نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای برابر ۱۵ سال است. اگر جرم اولیه آن  $16\sqrt[3]{4}$  میلی‌گرم باشد، پس از طی چند سال جرم باقی مانده آن ۴

میلی‌گرم خواهد شد؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۶۰ (۳) ۴۵ (۴) ۴۰

۱۲۰- ضابطه وارون تابع  $f(x) = \frac{4^x + 2^{x+1} + 1}{4^x + 2^x}$  کدام است؟

- (۱)  $\log_4(x-1)$  (۲)  $\log_2(2^{2x} - 6)$  (۳)  $\log_2(\frac{1}{x-1})$  (۴)  $\log_4(\frac{1}{x-1})$

### آمار و احتمال - 10 سوال

۱۳۱- در روستایی ۶۰ درصد ساکنین مرد و ۴۰ درصد زن هستند. ۹۰ درصد زنان و ۸۰ درصد مردان ساکن این روستا، کارت ملی هوشمند دریافت کرده‌اند. اگر فردی از ساکنان این روستا را به تصادف انتخاب نماییم، چقدر احتمال دارد این فرد کارت ملی هوشمند دریافت کرده باشد؟

- (۱)  $0/82$  (۲)  $0/84$  (۳)  $0/86$  (۴)  $0/88$

۱۳۲- جعبه A شامل ۳ گوی سفید، ۴ گوی سیاه و ۲ گوی قرمز و جعبه B شامل ۲ گوی سفید و ۵ گوی سیاه است. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک گوی از آن خارج می‌کنیم. احتمال این که گوی خارج شده سیاه نباشد، چقدر است؟

- (۱)  $\frac{53}{126}$  (۲)  $\frac{73}{126}$  (۳)  $\frac{53}{63}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۳۳- دسته‌ای کارت شامل ۵ کارت دو رو قرمز، ۶ کارت دو رو سبز و ۴ کارت یک رو قرمز و یک رو سبز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. با کدام احتمال روی مشاهده شده از کارت، سبز رنگ است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{7}{15}$  (۴)  $\frac{8}{15}$

۱۳۴- در یک مدرسه، ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۷۰ درصد دانش‌آموزان کلاس B در مسابقات ورزشی شرکت کرده‌اند و نسبت تعداد کل دانش‌آموزان کلاس A به تعداد کل دانش‌آموزان کلاس B، ۲ به ۳ است. دانش‌آموزی به تصادف از دانش‌آموزان این دو کلاس انتخاب می‌کنیم. اگر این دانش‌آموز در مسابقات ورزشی شرکت کرده باشد، با چه احتمالی این دانش‌آموز از کلاس A بوده است؟

(۱)  $\frac{4}{11}$  (۲)  $\frac{5}{11}$  (۳)  $\frac{6}{11}$  (۴)  $\frac{7}{11}$

۱۳۵- خانواده‌های A و B به ترتیب ۳ و ۴ فرزند دارند. یکی از این دو خانواده را به تصادف انتخاب کرده و مشاهده می‌کنیم که ۳ فرزند دختر دارد. احتمال این‌که خانواده انتخابی، خانواده A باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۳۶- دو تاس را با هم می‌اندازیم. اگر A پیشامد زوج بودن عدد هر دو تاس باشد، کدام یک از پیشامدهای زیر مستقل از پیشامد A است؟  
 (۱) عدد هر دو تاس بزرگ‌تر از ۳ بیاید.  
 (۲) عدد هر دو تاس اول بیاید.  
 (۳) عدد هر دو تاس مضرب ۳ بیاید.  
 (۴) عدد هر دو تاس یکسان بیاید.

۱۳۷- در یک امتحان چهار گزینه‌ای، ۶ سوال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سوالات به‌طور تصادفی پاسخ دهد، آن‌گاه با کدام احتمال به نیمی از سوال‌ها پاسخ صحیح داده است؟

(۱)  $\frac{135}{46}$  (۲)  $\frac{135}{45}$  (۳)  $\frac{27}{45}$  (۴)  $\frac{27}{46}$

۱۳۸- معلم یک کلاس هر جلسه از بین یک دسته کارت ده‌تایی که روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۱۰ نوشته شده است، کارتی بیرون می‌کشد و بعد از مشاهده عدد روی کارت، آن را به جای خود برمی‌گرداند. در صورت اول بودن عدد کارت، او از دانش‌آموزان کلاس امتحان می‌گیرد. اگر بدانیم او حداقل در ۳ جلسه از ۶ جلسه ابتدایی امتحان گرفته است، احتمال آن که در جلسه هفتم نیز امتحان بگیرد، چقدر است؟

(۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{3}{7}$  (۴)  $\frac{5}{14}$

۱۳۹- اگر برای دو پیشامد مستقل A و B،  $P(A' | B) = 0/6$  و  $P(B | A) = 0/2$  باشد، حاصل  $P(A \cup B')$  کدام است؟  
 (۱)  $0/76$  (۲)  $0/8$  (۳)  $0/84$  (۴)  $0/88$

۱۴۰- در یک دانشگاه با ۱۰۰ دانشجو، ۶۰ دانشجو دختر بوده و ۱۵ نفر نیز در رشته پزشکی تحصیل می‌کنند. فرض کنید پیشامدهای دختر بودن و تحصیل در رشته پزشکی مستقل از یکدیگر باشند. اگر یکی از دانشجویان این دانشگاه را به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال فرد انتخابی دختر بوده یا در رشته پزشکی تحصیل می‌کند؟

(۱)  $0/6$  (۲)  $0/64$  (۳)  $0/66$  (۴)  $0/75$

-۸۱

(علی شهبازی)

ابتدا  $\frac{95}{3}$  را به عدد اعشاری تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{95}{3} = 31.\bar{6}$$

$$16 < 31.\bar{6} < 32 \Rightarrow 2^4 < 31.\bar{6} < 2^5$$

$$\Rightarrow \log_2 2^4 < \log_2 31.\bar{6} < \log_2 2^5$$

$$\Rightarrow 4 < \log_2 31.\bar{6} < 5 \Rightarrow [\log_2 31.\bar{6}] = 4$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱

-۸۲

(امیرمسین افشار)

$$x = (\log_{\frac{2}{3}} 2^3)^{\log_2^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1}{3} \log_2 2^3\right)^3 \log_2^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3^{-3}$$

$$\Rightarrow \log_3^x = \log_3^{3^{-3}} = -3 \log_3 3 = -3$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱

-۸۳

(فرزانه پورعلیرضا)

$$\log_{b^{-1}}^{a^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{2} \log_b^a = 2 \Rightarrow \log_b^a = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{a}}^b = 2 \log_a^b = \frac{2}{\log_b^a} = \frac{2}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ 5-x > 0 \Rightarrow x < 5 \\ 5-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < x < 5, \quad x \neq 4$$

$$\log_{5-x}^{x-1} + \log_{5-x}^{x+2} = \log_{5-x}^{(x-1)(x+2)} = \log_{5-x}^4$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ یا } x = 2$$

جواب  $x = -3$  قابل قبول نیست.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = \log_{\sqrt[3]{y}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{y}}} = \log_{\sqrt[3]{y}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{y}}} = \frac{-1}{3} \log_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[3]{y}} = -\frac{1}{6} \quad (\text{نادرست})$$

$$f(y^4) = \log_{\sqrt[3]{y}}^{y^4} = \log_{\sqrt[3]{y}}^{y^4} = \frac{4}{3} \log_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[3]{y}} = 2 \quad (\text{درست})$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(فرزانه پورعلیرضا)

چون نمودارها صعودی هستند، گزینه‌های «۲» و «۴» صحیح نیست. از طرفی رابطه زیر برقرار است:  $(x > 1)$ :

$$1 < a < b < c \Rightarrow \log_a^x > \log_b^x > \log_c^x$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مهم، رضا توجه)

از آنجایی که  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$  می توان نوشت:

$$A = (\log 2)^3 + (\log 5)^3 + \underbrace{3 \log 2 \log 5 (\log 2 + \log 5)}_1$$

$$\Rightarrow A = (\log 2 + \log 5)^3 = 1$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{A+1}{3}}^{A+1} = \log_8^4 = \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۶ تا ۹۰)

۴ ✓

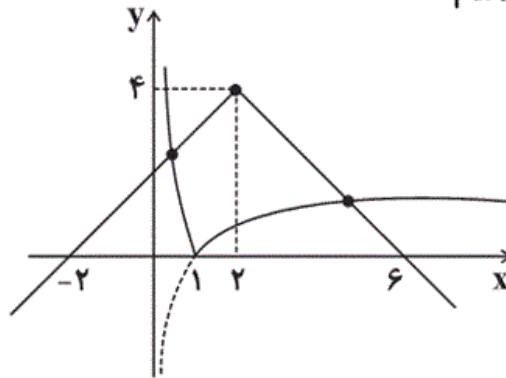
۳

۲

۱

(مهم، حسین صابری)

معادله را به صورت  $|\log x| = 4 - |x - 2|$  می نویسیم. حال باید نمودارهای دو تابع  $y = |\log x|$  و  $y = 4 - |x - 2|$  را رسم کنیم تا جواب های قابل قبول را به دست آوریم:

معادله  $|\log x| + |x - 2| = 4$  دو جواب دارد.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۸۰ تا ۸۵ و ۸۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\log_x^x + \log_x^{\sqrt{x}} = k \Rightarrow \log_x^x + \log_x^{x^{\frac{1}{2}}} = k$$

$$\Rightarrow \log_x^x + \frac{1}{2} \log_x^x = k \xrightarrow{\log_x^x = \frac{1}{\log_x^2}} \log_x^x + \frac{1}{2 \log_x^2} = k$$

با فرض  $\log_x^x = A$  داریم:

$$A + \frac{1}{2A} = k \xrightarrow{A \neq 0} 2A^2 - 2kA + 1 = 0$$

برای آن که معادله درجه دوم، تنها یک جواب داشته باشد، باید دلتای آن صفر باشد.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۹۰

(سیدمهر صالح ارشاد)

پس:  $\log_2 x^2 = 2 \log_2 |x|$  است.

$$\frac{1}{2} \log_2 x^2 + \log_2 (x+1) = \log_2 |x| + \log_2 (x+1)$$

$$\Rightarrow \log_2 |x| + \log_2 (x+1) = -2$$

$$\Rightarrow \log_2 |x| (x+1) = -2 \Rightarrow |x| (x+1) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

پس دو حالت زیر را داریم:

$$(1) \quad x > 0: x(x+1) = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

چون در این حالت  $x > 0$  است، جواب این معادله  $x = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$  است.

$$(2) \quad -1 < x < 0: -x(x+1) = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

پس جواب‌های این معادله  $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$  و  $-\frac{1}{2}$  است که حاصل جمع آن‌ها

برابر  $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  است.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

$$M = 6/2$$

$$\Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5(6/2) \Rightarrow \log E = 21/1 \Rightarrow E = 10^{21/1}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(فرزانه پورعلیرضا)

۶۰ درجه برابر با  $\frac{\pi}{3}$  رادیان است.

$$L = r\theta \Rightarrow 6 = x \times \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{18}{\pi} \text{ متر}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

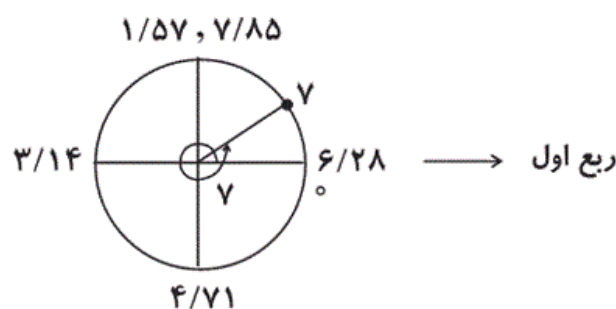
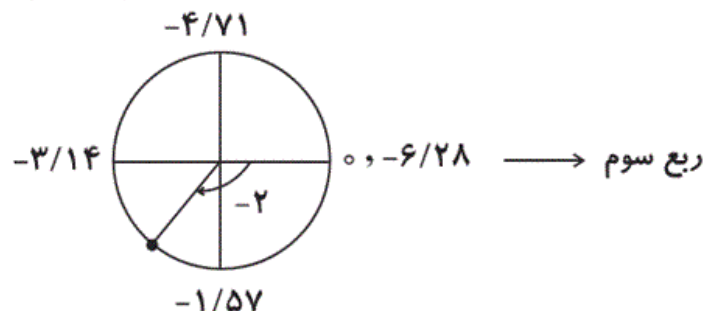
۴

۳

۲ ✓

۱

(علی شهبازی)



(مسئله ۱- مثلثات - صفحه های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۹۵

(شروین سیاح‌نیا)

با توجه به رابطه  $L = r\theta$  داریم:  $r\theta = r'\theta' \Rightarrow r \times \frac{\pi}{3} = r' \times \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{1}{4}$

$$\frac{S_C}{S_{C'}} = \frac{\pi r^2}{\pi r'^2} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۹۶

(شروین سیاح‌نیا)

عقربه دقیقه‌شمار در هر ساعت  $2\pi$  رادیان و عقربه ساعت‌شمار در هر ساعت  $\frac{\pi}{6}$  رادیان طی می‌کنند. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عقربه دقیقه‌شمار: } \frac{48}{60} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = \frac{8\pi}{5} \text{ رادیان} \\ \text{عقربه ساعت‌شمار: } \frac{48}{60} = \frac{y}{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{15} \text{ رادیان} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{8\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} = \frac{26\pi}{15} \text{ رادیان}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\text{رادیان } \theta_1 = \frac{2000\pi}{10} = 200\pi \text{ : قرقره کوچک}$$

$$\text{رادیان } \theta_2 = \frac{2000\pi}{40} = 50\pi \text{ : قرقره بزرگ}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱



(فهرزانه پورعلیرضا)

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \frac{900^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = 5\pi$$

زاویه را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$L = r\theta \Rightarrow L = \frac{1}{\pi} \times 5\pi = 5 \text{ متر}$$

در هر ساعت  $\frac{2}{5}$  متر می‌چرخد، پس کلاً دو ساعت کار کرده است.

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سید عادل حسینی)

مساحت قطاعی با زاویه  $\theta$  (برحسب رادیان) در دایره با شعاع  $r$  از

$$\text{رابطه } S = \frac{1}{2}\theta r^2 \text{ به دست می‌آید؛ بنابراین مساحت قسمت هاشورخورده}$$

در شکل برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(\alpha)R^2 - \frac{1}{2}(\alpha)r^2 = R^2 - r^2$$

از طرفی  $S_{C_1} = \pi r^2$  است؛ بنابراین داریم:

$$R^2 - r^2 = \pi r^2 \Rightarrow R^2 = (\pi + 1)r^2 \Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \pi + 1$$

اما می‌دانیم که نسبت مساحت دو دایره، با نسبت مربع شعاع آن‌ها برابر

$$\frac{S_{C_2}}{S_{C_1}} = \frac{R^2}{r^2} = \pi + 1$$

است، یعنی:

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

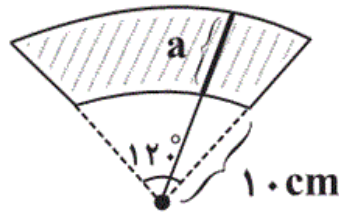
۳ ✓

۲

۱

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$$

برای مساحت پاک شده (طی شده) توسط تیغه داریم:



$$S = \frac{1}{2}(a + 10)^2 \left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}(10)^2 \left(\frac{2\pi}{3}\right) = 30.8\pi \text{ cm}^2$$

 ۴

 ۳

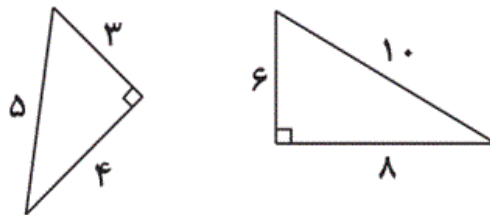
 ۲

 ۱

-۱۲۱

(سید عادل حسینی)

رد گزینه «۱»: اگر دو شکل متشابه باشند، ممکن است متجانس نباشند، مانند شکل زیر:



رد گزینه «۲»: تبدیل دوران جهت شکل را حفظ می کند ولی در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی کند.

رد گزینه «۳»: تبدیل تجانس اندازه زاویه ها را حفظ می کند ولی در حالت کلی طولیا نیست.

درستی گزینه «۴»: تبدیل همانی تمام نقاط صفحه را بر خودشان تصویر می کند، اگر در تبدیلی تمام نقاط صفحه نقطه ثابت آن باشند، در حقیقت تمام نقاط بر خودشان تصویر شده اند، پس تبدیل همانی است.

(هندسه ۲ - صفحه های ۴۰ تا ۵۱)

 ۴

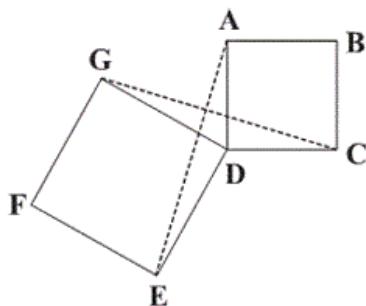
 ۳

 ۲

 ۱

(علی فتح‌آبادی)

اگر تبدیل  $R$  را دوران به مرکز  $D$  و زاویه  $90^\circ$  درجه در جهت ساعتگرد تعریف کنیم، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} R(A) = C \\ R(E) = G \end{array} \right\} \Rightarrow R(AE) = CG$$

پس اندازه زاویه دوران  $90^\circ$  درجه در جهت ساعتگرد است.

روشن است که نقطه  $D$ ، محل برخورد عمودمنصف‌های  $AC$  و  $GE$  است.

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

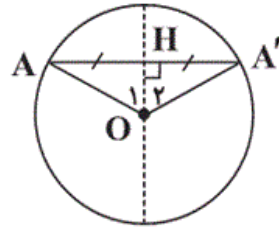
$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH \end{array} \right. \Rightarrow AB \times AC = BC \times AH$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} \Rightarrow AH = \frac{15 \times 20}{25} = 12$$

پس طول کوتاه‌ترین بردار بین دو خط  $d$  و  $d'$  برابر ۱۲ است.

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

قطر عمود بر هر وتر، آن را نصف می‌کند؛ پس تصویر A یعنی A' روی دایره خواهد بود.



$$AA' = \sqrt{3}R \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\Rightarrow \hat{O}_1 = 6^\circ$$

به همین ترتیب  $\hat{O}_2 = 6^\circ$  و در نتیجه:  $\hat{AOA}' = 12^\circ$ .

پس برای آن که A' تصویر A تحت دورانی به مرکز دایره باشد، باید زاویه دوران را برابر  $\hat{AOA}'$  یعنی  $12^\circ$  در نظر بگیریم.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

 ۴

 ۳

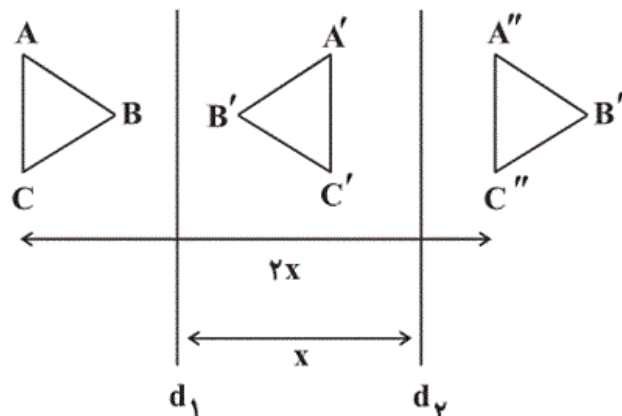
 ۲

 ۱

ترکیب دو بازتاب با محورهای بازتاب موازی، یک انتقال است. اگر فاصله دو محور بازتاب موازی x باشد، اندازه بردار انتقال ۲x است. پس:

$$m + 1 = 2(4 - m) \Rightarrow m + 1 = 8 - 2m \Rightarrow 3m = 7 \Rightarrow m = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow BB'' = AA'' = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$$



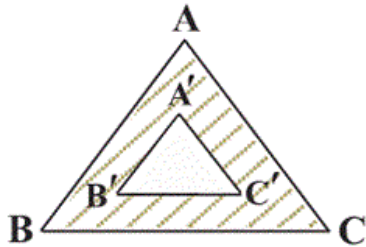
(هندسه ۲- مشابه تمرین صفحه ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$\frac{3S}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$$

پس طول ضلع مثلث اولیه برابر ۴ و اندازه محیط آن برابر  $3 \times 4 = 12$  است.

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۴

۳ ✓

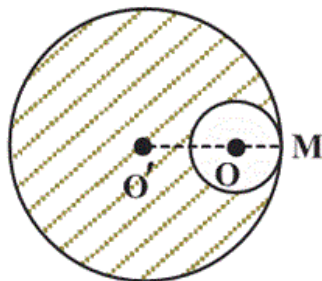
۲

۱

۱۲۷-

(سید عادل حسینی)

نقطه تماس دو دایره (نقطه M) در این تجانس بر خودش تصویر می‌شود، پس نقطه ثابت این تجانس و در نتیجه مرکز تجانس است. بنابراین با توجه به تعریف تجانس داریم:



$$k = \frac{MO'}{MO} = \frac{O'O + MO}{MO} = \frac{4 + MO}{MO} = 3$$

$$\Rightarrow MO + 4 = 3MO \Rightarrow MO = 2 \Rightarrow MO' = 6$$

حال خواسته مسئله را به دست می‌آوریم:

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = S' - S = \pi(MO'^2 - MO^2)$$

$$= \pi(6^2 - 2^2) = \pi(36 - 4) = 32\pi$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

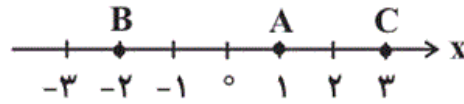
۴ ✓

۳

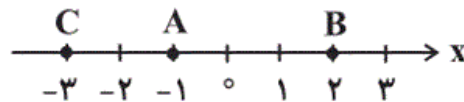
۲

۱

چون B و C در یک تجانس معکوس بر یکدیگر تصویر می‌شوند، پس در طرفین مرکز تجانس (نقطه A) قرار دارند و چون تجانس انقباضی است، پس  $|K| < 1$  و  $\frac{AC}{AB} < 1$  است. برای نقاط A، B و C می‌توان با فرض مسأله دو شکل در نظر گرفت که در هر صورت  $AB = 3$  و  $BC = 5$  است، بنابراین:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0.6$$



(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

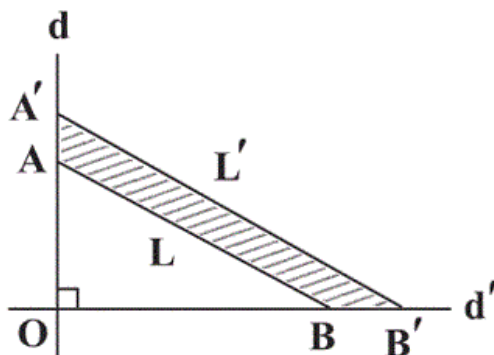
 ۲

 ۱

دو شکل متجانس همواره متشابه هستند و در تجانس با نسبت  $k$ ، مساحت

شکل  $k^2$  برابر می‌شود. مطابق شکل، مثلث  $OA'B'$  تصویر مثلث  $OAB$

است، بنابراین داریم:



$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OA'B'} = k^2 \times \frac{\sqrt{2}}{8}$$

حال با توجه به این که خواسته مسئله، مساحت ذوزنقه  $ABB'A'$  است،

داریم:

$$S_{ABB'A'} = S_{\Delta OA'B'} - S_{\Delta OAB} = k^2 \times \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} = (k^2 - 1) \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\underline{\underline{k = \sqrt{\sqrt{2} + 1}}} \quad (\sqrt{2} + 1 - 1) \frac{\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{4}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

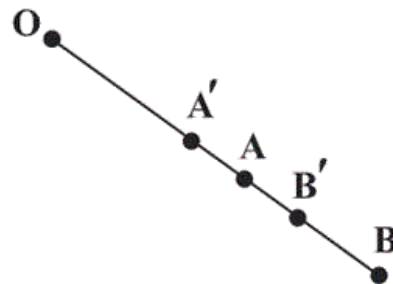
 ۲

 ۱

از آنجا که نقاط  $A'$  و  $B'$  به ترتیب مجانس‌های نقاط  $A$  و  $B$  به

مرکز  $O$  و با نسبت  $\frac{3}{4}$  می‌باشند، می‌توان نتیجه گرفت که پاره خط  $A'B'$

مجانس پاره خط  $AB$  به مرکز  $O$  و با همین نسبت است. پس:



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{A'B'}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow A'B' = 9$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا  $\frac{95}{3}$  را به عدد اعشاری تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{95}{3} = 31.\bar{6}$$

$$16 < 31.\bar{6} < 32 \Rightarrow 2^4 < 31.\bar{6} < 2^5$$

$$\Rightarrow \log_2 2^4 < \log_2 31.\bar{6} < \log_2 2^5$$

$$\Rightarrow 4 < \log_2 31.\bar{6} < 5 \Rightarrow [\log_2 31.\bar{6}] = 4$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$x = (\log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}})^{\log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1}{3} \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3} \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{-3}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}^x = \log_{\frac{2}{3}}^{3^{-3}} = -3 \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} = -3$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



-۱۰۳

(فرضانه پورعلیرضا)

$$\log_{b^{-1}} a^{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} \log_b a = 2 \Rightarrow \log_b a = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \log_b \sqrt{a} = 2 \log_b a = \frac{2}{\log_b a} = \frac{2}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱

-۱۰۴

(شروین سیاح‌نیا)

$$\begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ 5-x > 0 \Rightarrow x < 5 \\ 5-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4 \end{cases}$$

باید داشته باشیم:  $x \neq 4$ ,  $1 < x < 5$  اشتراک

$$\log_{5-x}^{x-1} + \log_{5-x}^{x+2} = \log_{5-x}^{(x-1)(x+2)} = \log_{5-x}^4$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ یا } x = 2$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

جواب  $x = -3$  قابل قبول نیست.

۴

۳

۲

۱

$$f(\sqrt[3]{\sqrt{2}}) = \log_{49} \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \log_{49} 49^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{49} 49 = \frac{1}{3} \quad (\text{درست})$$

$$f\left(\frac{1}{49}\right) = \log_{49} \frac{1}{49} = \log_{49} 49^{-1} = -\log_{49} 49 = -1 \quad (\text{درست})$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}\right) = \log_{49} \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \log_{49} \sqrt[3]{\sqrt{2}}^{-1} = -\frac{1}{3} \log_{49} \sqrt{2} = -\frac{1}{6} \quad (\text{نادرست})$$

$$f(\sqrt{2}) = \log_{49} \sqrt{2} = \log_{49} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_{49} 2 = \frac{1}{2} \quad (\text{درست})$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فرزانه پورعلیرضا)

چون نمودارها صعودی هستند، گزینه‌های «۲» و «۴» صحیح نیست. از طرفی رابطه زیر برقرار است:  $(x > 1)$ :

$$1 < a < b < c \Rightarrow \log_a^x > \log_b^x > \log_c^x$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهدی رضا توبه)

از آنجایی که  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$  می‌توان نوشت:

$$A = (\log 2)^3 + (\log 5)^3 + \underbrace{3 \log 2 \log 5 (\log 2 + \log 5)}_1$$

$$\Rightarrow A = (\log 2 + \log 5)^3 = 1$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}^{3A+1} = \log_8^4 = \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

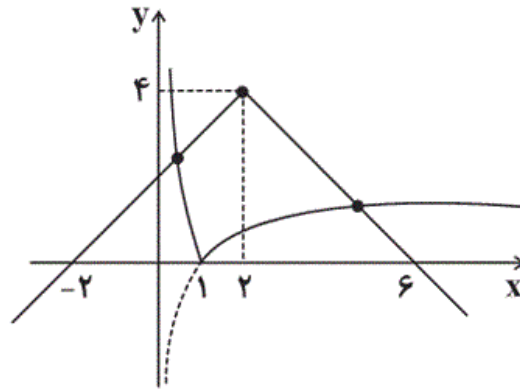
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

معادله را به صورت  $|\log x| = 4 - |x - 2|$  می‌نویسیم. حال باید نمودارهای دو تابع  $y = |\log x|$  و  $y = 4 - |x - 2|$  را رسم کنیم تا جواب‌های قابل قبول را به دست آوریم:



معادله  $|\log x| + |x - 2| = 4$  دو جواب دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵ و ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(حسن نصرتی ناهوک)

$$\log_3^x + \log_x^{\sqrt{2}} = k \Rightarrow \log_3^x + \log_x^{2^{\frac{1}{2}}} = k$$

$$\Rightarrow \log_3^x + \frac{1}{2} \log_x^2 = k \xrightarrow{\log_3^x = \frac{1}{2 \log_x^2}} \log_3^x + \frac{1}{2 \log_3^x} = k$$

با فرض  $\log_3^x = A$  داریم:

$$A + \frac{1}{2A} = k \xrightarrow{A \neq 0} 2A^2 - 2kA + 1 = 0$$

برای آن که معادله درجه دوم، تنها یک جواب داشته باشد، باید دلتای آن صفر باشد. پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-2k)^2 - 4(2)(1) = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 8 = 0 \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{k > 0} k = \sqrt{2}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$\log_2 x^2 = 2 \log_2 |x|$  است. پس:

$$\frac{1}{2} \log_2 x^2 + \log_2 (x+1) = \log_2 |x| + \log_2 (x+1)$$

$$\Rightarrow \log_2 |x| + \log_2 (x+1) = -2$$

$$\Rightarrow \log_2 |x|(x+1) = -2 \Rightarrow |x|(x+1) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

پس دو حالت زیر را داریم:

$$(1) \quad x > 0: x(x+1) = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

چون در این حالت  $x > 0$  است، جواب این معادله  $x = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$  است.

$$(2) \quad -1 < x < 0: -x(x+1) = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

پس جواب‌های این معادله  $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$  و  $-\frac{1}{2}$  است که حاصل جمع آن‌ها

برابر  $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  است. (مسئله ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$M = 6/2$$

$$\Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5(6/2) \Rightarrow \log E = 21/1 \Rightarrow E = 10^{21/1}$$

(مسئله ۱- صفحه ۸۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\log_{1+\sqrt{2}} (1+2+2\sqrt{2})^3 = \log_{1+\sqrt{2}} ((1+\sqrt{2})^2)^3 = \log_{1+\sqrt{2}} (1+\sqrt{2})^6 = 6$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شهرابی)

$$\log 2 + \log 5 = 1 \Rightarrow a + \log 5 = 1 \Rightarrow \log 5 = 1 - a$$

$$\log \frac{40}{\sqrt{5}} = \log 8\sqrt{5} = \log 8 + \log \sqrt{5}$$

$$= 3 \log 2 + \frac{1}{2} \log 5 = 3a + \frac{1}{2}(1 - a) = \frac{5}{2}a + \frac{1}{2}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(معمربن ابراهیمی)

$$\log \left( \frac{x+1}{x+2} \times \frac{x+2}{x+3} \times \frac{x+3}{x+4} \right) = -1 \Rightarrow \log_{10} \frac{x+1}{x+4} = -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+4} = 10^{-1}$$

$$\Rightarrow 10x + 10 = x + 4 \Rightarrow 9x = -6 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

توجه کنید که به ازای  $x = -\frac{2}{3}$  لگاریتم‌های داده شده تعریف می‌شوند.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امین قربانعلی پور)

$$a = \sqrt{\log_7^6 4 - \log_7^6 1} = \sqrt{\log_7^6 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \log_7^{(x+1)} + \log_7^{(x-1)} = 3 \Rightarrow \log_7^{(x+1)(x-1)} = 3$$

$$\Rightarrow \log_7^{(x^2-1)} = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 7^3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۱۶

(عزیزالله علی اصغری)

برای آن که محل برخورد تابع با محور  $x$  ها را بیابیم باید آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$y = 0 \Rightarrow 3 - \log_2^{(x_0+5)} = 0 \Rightarrow \log_2^{(x_0+5)} = 3 \Rightarrow x_0 + 5 = 8 \Rightarrow x_0 = 3$$

برای یافتن  $y_0$  باید به تابع  $x = 0$  بدهیم:

$$x = 0 \Rightarrow y_0 = 3 - \log_2^5 = 3 - \frac{\log 5}{\log 2} \approx 3 - \frac{0.7}{0.3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y_0 \approx \frac{2}{3} \Rightarrow x_0 + y_0 = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \approx 0.7$$
 توجه کنید که:

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۱۷

(سید عارل حسینی)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \{-1, 0, \frac{5}{3}, 2\} \mid g(x) > \frac{1}{3}\}$$

از طرفی  $D_f = (\frac{1}{3}, +\infty)$  است. بنابراین از بین اعضای دامنه تابع  $g$ ,

فقط مقدار  $g(2)$  در دامنه تابع  $f(x)$  قرار دارد؛ بنابراین دامنه  $f \circ g(x)$

فقط عضو  $x = 2$  را دارد؛ در نتیجه داریم:

$$f \circ g(2) = f(1) = \log 2 \approx 0.3 \Rightarrow f \circ g = \{(2, 0.3)\}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

از طرفین معادله  ${}^2(\log_2^3)^x = {}^3(\log_2^2)^x$ ، لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$\Rightarrow \log_2 {}^2(\log_2^3)^x = \log_2 {}^3(\log_2^2)^x \Rightarrow (\log_2^3)^x \log_2^2 = (\log_2^2)^x \cdot \log_2^3$$

$$\Rightarrow (\log_2^3)^x = \frac{1}{(\log_2^3)^x} \cdot \log_2^3 = (\log_2^3)^{-x} \cdot \log_2^3$$

$$\Rightarrow (\log_2^3)^x = (\log_2^3)^{-x+1} \Rightarrow x = -x+1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امین قربانعلی پور)

اگر جرم یک ماده هسته‌ای پس از مدت زمان  $m$  نصف شود نیمه عمر آن  $m$  است. اگر  $A_0$  مقدار اولیه و  $A(t)$  جرم ثانویه آن بعد از مدت زمان  $t$  باشد:

$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{m}}$$

$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{m}} \Rightarrow 4 = 16\sqrt[3]{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}} \Rightarrow \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}} \quad (1)$$

از طرفین تساوی (۱) لگاریتم در مبنای  $\frac{1}{2}$  می‌گیریم:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}} = \frac{t}{15} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{3}} = \frac{t}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{t}{15} \Rightarrow \frac{t}{15} = \frac{8}{3} \Rightarrow t = 40 \text{ سال}$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = f(x) = \frac{4^x + 2 \times 2^x + 1}{4^x + 2^x} = \frac{(2^x + 1)^2}{2^x(2^x + 1)} = \frac{2^x + 1}{2^x} = 1 + 2^{-x}$$

حالا وارون آن را پیدا می‌کنیم:  $y - 1 = 2^{-x} \Rightarrow -x = \log_2(y-1)$

$$\Rightarrow x = \log_2 \frac{1}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1}{x-1}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

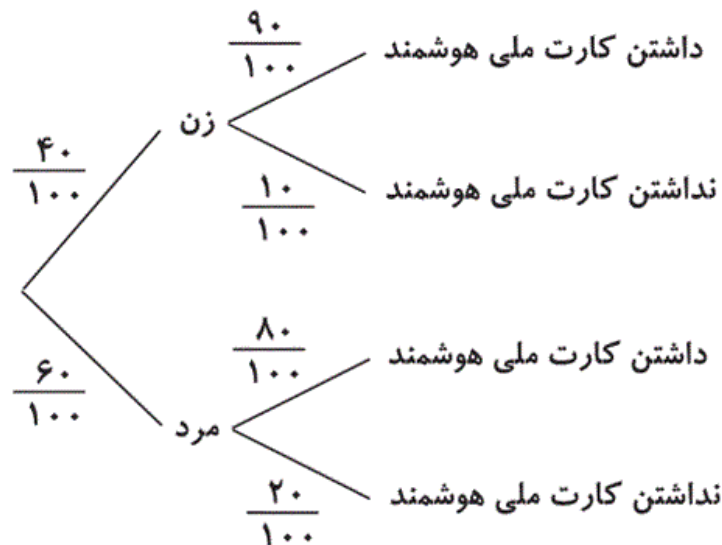
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نمودار درختی را برای حل مسئله رسم می‌کنیم:



$$P(\text{داشتن کارت ملی هوشمند}) = \frac{40}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{80}{100}$$

$$= \frac{84}{100} = 0.84$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

 ۴

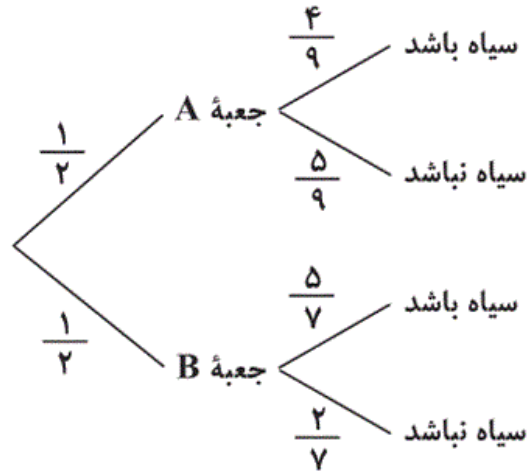
 ۳

 ۲

 ۱



نمودار درختی را برای حل مسئله رسم می‌کنیم:



اگر پیشامد سیاه نبودن گوی خارج شده را با C نمایش دهیم، داریم:

$$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{5}{18} + \frac{1}{7} = \frac{35+18}{126} = \frac{53}{126}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + P(B_3)P(A | B_3)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{15} \times 0 + \frac{6}{15} \times 1 + \frac{4}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{15}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

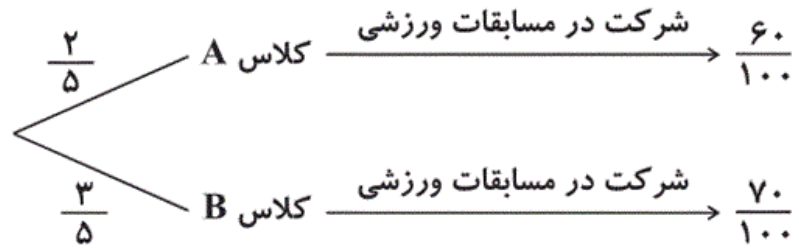
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

طبق نمودار درختی داریم:



حال اگر D پیشامد شرکت در مسابقات ورزشی باشد، طبق قانون بیز

داریم:

$$P(A | D) = \frac{P(A)P(D | A)}{P(A)P(D | A) + P(B)P(D | B)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{60}{100}}{\frac{2}{5} \times \frac{60}{100} + \frac{3}{5} \times \frac{70}{100}} = \frac{\frac{120}{500}}{\frac{330}{500}} = \frac{120}{330} = \frac{4}{11}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۱ تا ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فرض کنید C پیشامد آن باشد که خانواده انتخابی ۳ دختر داشته باشد.

داریم:

$$P(C|A) = \frac{\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad P(C|B) = \frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{1}{4}$$

در این صورت طبق قانون بیز داریم:

$$P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۷۲)

۴

۳

۲

۱

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

اگر هر دو تاس مضر ۳ بیایند، داریم:

$$B = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$A \cap B = \{(6, 6)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} = P(A) \times P(B)$$

اگر پیشامدهای گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» را به ترتیب با  $B_1$ ،  $B_2$ ،

و  $B_3$  نمایش دهیم، آن‌گاه  $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{4}$  و  $P(B_3) = \frac{1}{6}$

است. در این صورت  $P(A) \times P(B_1) = P(A) \times P(B_2) = \frac{1}{16}$

و  $P(A) \times P(B_3) = \frac{1}{24}$  خواهد بود که با توجه به این که هیچ پیشامدی

روی پرتاب دو تاس نمی‌توان تعریف کرد که دارای احتمال  $\frac{1}{16}$  یا  $\frac{1}{24}$

باشد، پس این پیشامدها قطعاً مستقل از  $A$  نیستند.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

احتمال پاسخ صحیح تصادفی به یک سوال چهارگزینه‌ای  $\frac{1}{4}$  است، پس احتمال آن که این دانش‌آموز دقیقاً به ۳ سؤال از ۶ سوال، پاسخ صحیح بدهد برابر است با:

$$\binom{6}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 20 \times \frac{1}{4^3} \times \frac{27}{4^3} = \frac{135}{4^5}$$

(آمار و احتمال - مشابه تمرین ۸ صفحه ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

چون احتمال امتحان گرفتن او در هر جلسه نسبت به جلسه‌های دیگر مستقل است، پس احتمال این که در جلسه هفتم هم امتحان بگیرد همان  $\frac{2}{5}$  است.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مر تفضی فویم علوی)

می‌دانیم که اگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقل باشند، پیشامدهای  $A'$  و  $B$ ،  
 $A$  و  $B'$  و همچنین  $A'$  و  $B'$  نیز مستقل‌اند. همچنین اگر دو پیشامد  $A$   
 و  $B$  مستقل از یکدیگر باشند، آنگاه  $P(A|B) = P(A)$  است.  
 بنابراین داریم:

$$P(A' | B) = P(A') = 0/6 \Rightarrow P(A) = 0/4$$

$$P(B | A) = P(B) = 0/2 \Rightarrow P(B') = 0/8$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A)P(B')$$

$$= 0/4 + 0/8 - 0/32 = 0/88$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مر تفضی فویم علوی)

پیشامدهای  $A$  و  $B$  را مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

$A$ : دختر بودن

$B$ : تحصیل در رشته پزشکی

با توجه به مستقل بودن دو پیشامد  $A$  و  $B$ ، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{60}{100} + \frac{15}{100} - \frac{60}{100} \times \frac{15}{100} = 0/60 + 0/15 - 0/09 = 0/66$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۴

۳ ✓

۲

۱