

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، معادلات درجه دوم - ۱ سوال

۹۷- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^3 - 3x^2 - 1 = \alpha x^3 + 3\beta x + 1$ باشند، ریشه‌های کدام معادله زیر برابر با α^3 و β^3 است؟

$$x^3 - 14x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^3 - 22x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^3 - 42x - 1 = 0 \quad (4)$$

$$x^3 - 36x - 1 = 0 \quad (3)$$

حسابان ۱، معادلات گویا و گنگ - ۱ سوال

۹۰- معادله $x - \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = 4$ دارای دو جواب حقیقی است. قدر مطلق تفاضل این دو جواب کدام است؟

۸) (۴)

۶) (۳)

۴) (۲)

۲) (۱)

حسابان ۱، قدر مطلق و ویژگی‌های آن - ۱ سوال

۹۵- تعداد جواب‌های معادله $|2x^2 + 4x| + \frac{3}{2} = |-x^2 - 2|$ کدام است؟

۱) (۱)

۲) (۲)

۳) (۳)

۴) صفر

حسابان ۱، آشنایی با هندسه تحلیلی - ۱ سوال

۸۴- کدام نقطه زیر روی نیمساز ربع اول قرار دارد و از دو خط $3x + 4y = 1$ و $7x + 24y = 1$ به یک فاصله است؟

(۲, ۲) (۲)

(۱, ۱) (۱)

(۴, ۴) (۴)

(۳, ۳) (۳)

حسابان ۱، آشنایی بیشتر با تابع - ۱ سوال

۹۱ - تابع $f(x) = |x + |x|| + |x - |x||$ با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

$$y = |3x| - x \quad (2)$$

$$y = |3x - |x|| \quad (1)$$

$$y = \frac{2x^2}{|x|} \quad (4)$$

$$y = \sqrt{4x^2} \quad (3)$$

حسابان ۱، انواع تابع - ۲ سوال

۹۲ - اگر $[2x - 1] = 3[4x + 3]$ باشد، حاصل کدام است؟

۱۳) ۱۲ یا ۱۴

۱۲) فقط ۱۲

۱۲) ۱۱ یا ۱۲

۱) فقط ۱۱

۱۰۰ - اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2+ax-12}$ به صورت $\mathbb{R} - \{b-1, -b\}$ باشد، تعداد اعداد صحیح بازه $[6a, -4a]$ که عضو دامنه

$$\text{تابع } g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-4}} \text{ هستند، کدام است؟}$$

۴) ۴

۲) ۳

۱) ۲

۱) صفر

حسابان ۱، وارون تابع - ۲ سوال

۸۷ - اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ کدام عدد زیر، در دامنه تابع وارون f موجود نیست؟

-۲) ۴

۲) ۳

-۱) ۲

۱) ۱

۹۳ - دو تایی مرتب (a, b) کدام می‌تواند باشد تا نمودار وارون تابع $b = \frac{2x}{a} - y$ بر خود تابع منطبق نباشد؟

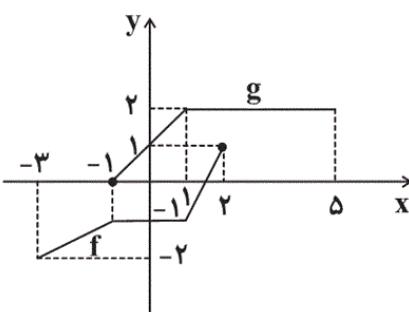
(۲, ۵) ۴

(-۲, ۵) ۳

(-۲, ۰) ۲

(۲, ۰) ۱

حسابان ۱، اعمال روی توابع - ۴ سوال



۱ (۱)

۲ (۲) صفر

-۲ (۳)

۲ (۴)

-۸۸ - اگر $\{a\}$ متمایز باشد، حاصل ضرب اعضای متمایز $D_{f-g} = \{0, -1\}$ و $g = \{(2a, 2), (0, 1), (-3, 4)\}$ ، $f = \{(-2, 2), (-1, -1), (0, -\frac{2}{a})\}$ است؟

برد $2f + g$ چند برابر a است؟

-۱۸ (۴)

۱۸ (۳)

۹ (۲)

-۹ (۱)

-۸۹ - اگر $g(x) = \frac{x+4}{x-1}$ و $f(x) = 2x - 4$ باشد، حاصل $(gof)(x)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۹۸ - اگر $f(x) = \sqrt{4-x} + 2$ و نقاط A و B ابتدا و انتهای نمودار تابع $h(x) = (f \circ f^{-1})(x) + (f^{-1} \circ f)(x)$ باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

است؟

$9\sqrt{5}$ (۴)

$4\sqrt{5}$ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

حسابان ۱، تابع نمایی - ۷ سوال

-۹۹ - ۸۰۰ میلی گرم از یک ماده با نیمه عمر m سال در اختیار داریم. اگر پس از $12/5$ سال 600 میلی گرم از این ماده باقی بماند، m کدام است؟

۱۰۰ (۴)

۹۰ (۳)

۳۰ (۲)

۶۰ (۱)

-۹۶ - فاصله نقطه تقاطع نمودارهای دو تابع $y = 2^{x+1} + 9$ و $y = 5(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2x}$ از محور طولها کدام است؟

$\sqrt{101}$ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۱ (۱)

-۸۲- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱) در تابع نمایی $y = a^x$ ، با افزایش x ، مقدار y کم می‌شود.

(۲) در تابع نمایی $y = a^x$ ، با افزایش x ، مقدار y نیز زیاد می‌شود.

(۳) در تابع نمایی $y = a^x$ ، برای x ‌های منفی نسبت به x ‌های مثبت، با افزایش x ، مقدار y با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد.

(۴) در تابع نمایی $y = a^x$ ، برای x ‌های منفی نسبت به x ‌های مثبت، با افزایش x ، مقدار y با سرعت بیشتری افزایش می‌یابد.

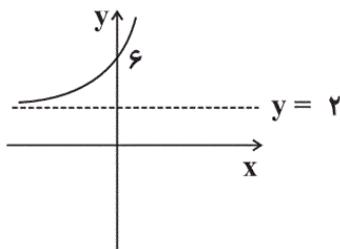
-۸۳- نامعادله $\sqrt{8^{x-2}} > \frac{1}{6^x}$ چند جواب صحیح کوچک‌تر یا مساوی صفر دارد؟

(۱) صفر

(۲)

(۳)

-۸۴- نمودار $f(x) = a^{x+2} - b$ به صورت زیر است. (۸) کدام است؟



۱۰۲۶ (۱)

۱۰۲۴ (۲)

۱۰۲۲ (۳)

۱۰۲۰ (۴)

-۸۵- کدام گزینه می‌تواند مثالی برای تابع f باشد که دو ویژگی زیر را دارد؟

الف) اولاً وارون‌پذیر نباشد.

ب) ثانیاً برای هر عدد حقیقی x ، $f(x) < x$ باشد.

$$f(x) = [x] + 1 \quad (۱)$$

$$f(x) = 2^x \quad (۲)$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$f(x) = x^2 - 1 \quad (۴)$$

۹۴ - داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۳۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن در بدن شخص پس از t

ساعت از رابطه $A(t) = 30e^{-0.09t}$ به دست می‌آید. چه درصدی از دارو پس از ۲ ساعت از بدن او خارج می‌شود؟

۱۹) ۴

۸۱) ۳

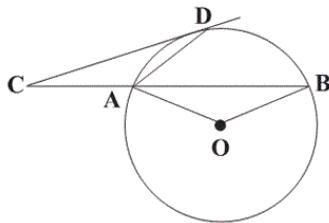
۱۰) ۲

۹۰) ۱

هندسه ۲ ، مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره - ۱ سوال

۱۰۱ - در شکل زیر CD (در نقطه D) مماس بر دایره‌ای به مرکز O باشد، زاویه AOB چند برابر زاویه ACD است؟ (A،

C و B در یک امتدادند).



۳) ۱

۴) ۲

۵) ۳

۶) ۴

هندسه ۲ ، تبدیل های هندسی - ۳ سوال

۱۰۶ - نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $OA' = 16$ ، نقطه O روی خط L و $OA = 10$ باشد، فاصله نقطه A

از OA' کدام است؟

۹/۶) ۴

۷/۲) ۳

۶) ۲

۴/۸) ۱

۱۰۷ - کدام گزینه در مورد تبدیل طولپا همواره درست است؟

۱) تبدیل طولپا شبی خطوط را حفظ می‌کند.

۲) تبدیل طولپا جهت شکل را حفظ می‌کند.

۳) تبدیل طولپا فقط یک نقطه ثابت تبدیل دارد.

۴) تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

۱۱۰ - نقطه A درون زاویه‌ای به اندازه 45° درجه قرار دارد. اگر فاصله A تا رأس زاویه برابر یک واحد و A' و A'' تصاویر نقطه A در بازتاب نسبت به اضلاع زاویه باشند، آن‌گاه طول پاره خط A'A'' کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

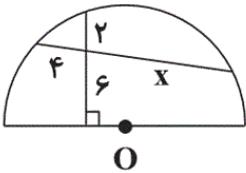
$2\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

هندسه ۲ ، رابطه‌های طولی در دایره - ۲ سوال

۱۰۲ - در نیم‌دایره شکل مقابل، مقدار x کدام است؟ (O مرکز دایره است).

۳ (۱)



۴ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

۱۰۳ - دو دایره (۱) C'(O', r) و (۲) C(O, R) مفروض‌اند. اگر $OO' = 10$ باشد، آن‌گاه نسبت طول مماس مشترک خارجی به مماس مشترک داخلی

کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

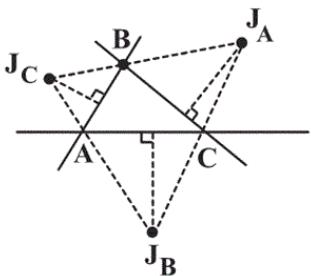
$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

هندسه ۲ ، چندضلعی محاطی و محیطی - ۴ سوال

۱۰۴ - مطابق شکل، نیمسازهای خارجی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر طول عمودهای مشخص شده ۲، ۳ و ۶ باشند، اندازه شعاع دایره

محاطی داخلی مثلث ABC کدام است؟



۰/۵ (۱)

۰/۷۵ (۲)

۱ (۳)

۱/۵ (۴)

۱۰۵ - در یک مثلث قائم‌الزاویه، دایره محاطی داخلی در نقطه تماس با وتر، آن را به دو قطعه به طول‌های ۳ و ۱۰ واحد تقسیم می‌کند. اندازه شعاع

دایره محاطی خارجی نظیر رأس قائم کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

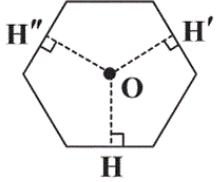
۱۰۸ - در شش‌ضلعی منتظم زیر اگر $\text{OH} + \text{OH}' + \text{OH}'' = 3\sqrt{3}$ باشد، طول شعاع دایره محیطی این شش‌ضلعی کدام است؟

۱ (۱)

$\sqrt{3}$ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)



۱۰۹ - مطابق شکل از نقاط A و B بر دایره مماس‌هایی رسم می‌کنیم. اگر اندازه زاویه C برابر ۸۰ درجه باشد، آن‌گاه مجموع دو زاویه A و B چند

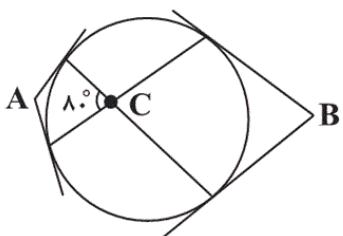
درجه است؟

۸۰ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۶۰ (۳)

۲۰۰ (۴)



آمار و احتمال ، مبانی احتمال - ۲ سوال

۱۲۰ - در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه وجود دارد. دو مهره را به صورت متواالی و بدون جای‌گذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن که اولی سفید و دومی سیاه باشد، کدام است؟

$\frac{15}{28}$ (۴)

$\frac{2}{7}$ (۳)

$\frac{15}{56}$ (۲)

$\frac{5}{14}$ (۱)

۱۱۴ - سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» آمد، ۳ بار و اگر «پشت» آمد، ۲ بار دیگر همان سکه را می‌اندازیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱۲ (۴)

۲۴ (۳)

۶۴ (۲)

۳۲ (۱)

آمار و احتمال ، گزاره - ۳ سوال

۱۱۱ - نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{Z} ; x^2 + x > 2$ کدام است؟

$\exists x \in \mathbb{N} ; x^2 + x \leq 2$ (۲)

$\forall x \in \mathbb{Z} ; x^2 + x < 2$ (۱)

$\exists x \in \mathbb{Z} ; x^2 + x \leq 2$ (۴)

$\exists x \in \mathbb{Z} ; x^2 + x < 2$ (۳)

۱۱۲ - کدام گزینه درست است؟

(۱) برای تساوی دو مجموعه A و B ، باید تعداد اعضای دو مجموعه برابر و $A \subseteq B$ باشد.

(۲) اگر عضوی دلخواه از A درون B باشد، می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq B$ است.

(۳) اگر هر عضو دلخواه که در A نباشد، در B باشد، آن‌گاه $B \subseteq A'$ است.

(۴) اگر $C \subseteq A \cup B$ باشد، آن‌گاه عضوی در C هست که به هر دو مجموعه A و B تعلق دارد.

۱۱۳ - اگر دو مجموعه $C \times D$ و $A \times B$ به صورت زیر تعریف شوند، آن‌گاه مجموعه $(D - A) \times (B \cup C)$ چند عضو دارد؟

$(a \neq d, a \neq 1, 2, d \neq 2)$

$A \times B = \{(a, 1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (1, -1), (a, 0), (1, 1), (a, -1)\}$

$C \times D = \{(-1, 2), (0, 2), (3, d), (3, 2), (-1, d), (0, d)\}$

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

آمار و احتمال، احتمال غیر هم شانس - ۳ سوال -

۱۱۵ - از مجموعه اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخابی نه بر ۵ و نه بر ۶ بخشیدن باشد، کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{5}{6}$ (۱)

۱۱۶ - احتمال روشدن هر وجه یک تاس متناسب با عدد آن وجه است. احتمال آن که عدد روشده، عددی فرد باشد، کدام است؟

$\frac{4}{7}$ (۴)

$\frac{3}{7}$ (۳)

$\frac{11}{21}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱۱۷ - اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $C = \{b, c, d\}$ و $B = \{a, b, d\}$ ، $A = \{a, c\}$ سه پیشامد روی این فضای نمونه‌ای باشند، به طوری که $P(A) = 0/3$ و $P(B) = 0/8$ ، آن‌گاه مقدار $P(C')$ کدام است؟

۰/۹ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۷ (۲)

۰/۱ (۱)

آمار و احتمال، احتمال شرطی - ۲ سوال -

۱۱۸ - اگر برای دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه‌ای، $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $P(B | A')$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{6}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

۱۱۹ - در یک خانواده ۳ فرزندی، می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده حداکثر ۲ فرزند پسر دارد؟

$$\frac{7}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{6}{7} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{7} \text{ (۱)}$$

(محمد رضا توجه)

برای تشکیل معادله درجه دوم جدید با توجه به

این که $\frac{c}{a} = \alpha\beta = -1$ و $-\frac{b}{a} = \alpha + \beta = 3$ است، می‌توان نوشت:

$$S_{\text{جدید}} = \alpha^3 + 1\cdot\beta + 3$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^3 \times (1\cdot\beta + 3)$$

اما چون α ریشهٔ معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ است در معادله صدق می‌کند.

بنابراین:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha + 1 \Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 + \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = 3(3\alpha + 1) + \alpha = 10\alpha + 3$$

$$\Rightarrow S_{\text{جدید}} = (10\alpha + 3) + (1\cdot\beta + 3) = 10(\alpha + \beta) + 6 = 36$$

$$\Rightarrow P_{\text{جدید}} = (10\alpha + 3) \times (1\cdot\beta + 3) = 100\alpha\beta + 30(\alpha + \beta) + 9 = -1$$

بنابراین معادله موردنظر به شکل $x^2 - 36x - 1 = 0$ می‌باشد.

(مسابقات ایران و معارله - صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲

۱

(علی شهرابی)

$$\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = 4-x \Rightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = (2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})$$

$$\xrightarrow{2+\sqrt{x} \neq 0} \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 2-\sqrt{x} \Rightarrow (2-\sqrt{x})^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ 2-\sqrt{x} = -1 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

پس قدرمطلق تفاضل جواب‌های این معادله، $|x| = 8$ است.

(حسابان ا- هیبر و معادله- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۲)

 ۴ ✓ ۳ ۲ ۱

(مهدی ملارمفتانی) -۹۵

$$-|2x^2 + 4x| + \frac{3}{2} = |-x^2 - 2| \Rightarrow |-x^2 - 2| + |2x^2 + 4x| = \frac{3}{2}$$

$$|-x^2 - 2| = |-(x^2 + 2)| = |x^2 + 2| \geq 2$$

با توجه به این‌که $|2x^2 + 4x|$ همواره نامنفی است، بنابراین $|x^2 + 2| + |2x^2 + 4x|$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ بوده و هیچگاهبرابر $\frac{3}{2}$ نمی‌شود.

(حسابان ا- هیبر و معادله- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

 ۴ ✓ ۳ ۲ ۱

نیمساز ربع اول $x = y$ است پس نقطه مورد نظر می‌تواند (a, a) باشد.

حال داریم:

$$\frac{|7a+24a-1|}{\sqrt{7^2+24^2}} = \frac{|3a+4a-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow \frac{|7a+24a-1|}{25} = \frac{|3a+4a-1|}{5}$$

$$\Rightarrow |31a-1| = 5 |7a-1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 31a-1 = 35a-5 \Rightarrow a=1 \\ 31a-1 = -35a+5 \Rightarrow 66a=6 \Rightarrow a=\frac{1}{11} \end{cases}$$

که تنها جواب $(1, 1)$ در گزینه‌ها هست.

(حسابان - بیر و معادله - صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱

-۹۱

ضابطه تابع f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = |x+|x|| + |x-|x|| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x+x| + |x-x| & ; \quad x \geq 0 \\ |x-x| + |x+x| & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2|x| & ; \quad x \geq 0 \\ 2|x| & ; \quad x < 0 \end{cases} = 2|x|$$

باید دنبال تابعی باشیم که ضابطه آن به صورت $y = 2|x|$ و دامنه اش

\mathbb{R} باشد. در بین گزینه‌ها، فقط تابع گزینه «۳» این دو ویژگی را دارد:

$$y = \sqrt{4x^2} = 2\sqrt{x^2} = 2|x|$$

$$D = \mathbb{R}$$

(حسابان - ترکیبی - صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸ و ۲۹ تا ۳۳)

۴

۳

۲

۱

(علی شهرابی)

$$[2x - 1] = 3 \Rightarrow 3 \leq 2x - 1 < 4 \xrightarrow{+1} 4 \leq 2x < 5$$

$$\xrightarrow{\times 2} 8 \leq 4x < 10 \xrightarrow{+3}$$

$$11 \leq 4x + 3 < 13 \Rightarrow [4x + 3] = 11 \text{ یا } 12$$

(حسابان ا- تابع- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

-۱۰۰

(سینا محمدپور)

می‌دانیم دامنه تابع گویای f به صورت:{ریشه‌های مخرج $D_f = \mathbb{R} - \{-b\}$ می‌باشد. بنابراین، -1 و b ریشه‌های عبارت $x^2 + ax - 12 = 0$ هستند، حال از آنجایی که مجموع این ریشه‌ها برابر است با $(-a)$ ، پس داریم:

$$(-b) + (-1) = (-a) \Rightarrow -1 = -a \Rightarrow a = 1$$

از طرفی برای به دست آوردن دامنه تابع $(g(x))$ داریم:

$$|x| - 4 > 0 \Rightarrow |x| > 4 \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}$$

بنابراین اعداد صحیح بازه $[6, -4]$ که عضو D_g می‌باشند عبارتنداز $\{5, 6\}$.

(حسابان ا- تابع- صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با توجه به این که $\frac{3}{x-1}$ همواره مخالف صفر است، بنابراین $2 \neq f(x)$

است. پس در دامنه تابع f^{-1} ، ۲ وجود نخواهد داشت.

روش دوم: ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x + 1 \Rightarrow yx - 2x = y + 1$$

$$x(y-2) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x \neq 2$$

(مسابان ا- تابع- صفحه‌های ۵۱۴ تا ۶۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{2}{a} \\ \frac{ab}{2} = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \text{ هر مقدار می‌تواند باشد.} \\ b = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

بنابراین (۲، ۵) جواب سوال است.

(مسابان ا- تابع- صفحه‌های ۵۱۴ تا ۶۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علیرضا پورقلی)

-۸۱

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 1$$

(مسابان ا- تابع- صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امین قربانعلی پور)

$\forall a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ برابر است با $D_f \cap D_g$ پس:

$$f = \{(-2, 3), (-1, -1), (0, 4)\}$$

$$g = \{(-1, 3), (0, 1), (-3, 4)\}$$

$$(\forall f + g)(0) = \forall f(0) + g(0) = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$(\forall f + g)(-1) = \forall f(-1) + g(-1) = 2(-1) + 3 = 1$$

$$\Rightarrow (\forall f + g) \text{ برد} = \{9, 1\}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{حاصل ضرب اعضای برد}}{a} = \frac{9 \times 1}{-\frac{1}{2}} = -18$$

(مسابقات تابع - صفحه های ۶۳ تا ۶۶)

 ✓

(علی شهرابی)

$$g(f(x)) = \frac{x+4}{x-1} \Rightarrow g(2x-4) = \frac{x+4}{x-1}$$

عبارت $4 - 2x$ را مساوی λ قرار می دهیم:

حالا $x = 6$ را در تساوی بالا قرار می دهیم:

$$g(2x-4) = \frac{x+4}{x-1} \xrightarrow{x=6} g(\lambda) = \frac{6+4}{6-1} = 2$$

(مسابقات تابع - صفحه های ۶۶ تا ۷۰)

 ✓

می‌دانیم که $(f^{-1} \circ f)(x) = f(f^{-1}(x))$ هر دو تابع همانی می‌باشند.

$f^{-1} \circ f$ تابعی همانی روی دامنه f و $f(f^{-1}(x))$ تابعی همانی روی

برد f است، لذا:

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\forall x \in R_f \quad ; \quad (f \circ f^{-1})(x) = x$$

دامنه f بازه $(-\infty, 4]$ و برد آن بازه $[2, +\infty)$ است. بنابراین:

$$\forall x \in (-\infty, 4] \quad ; \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\forall x \in [2, +\infty) \quad ; \quad (f \circ f^{-1})(x) = x$$

بنابراین از آنجایی که دامنه مجموع دو تابع، اشتراک دامنه‌های آنهاست،

می‌توان نوشت:

$$h(x) = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x) = x + x = 2x$$

$$D_h(x) = (-\infty, 4] \cap [2, +\infty) = [2, 4]$$

۱

۲

۳

۴

$$A(t) = A_0 \cdot 2^{\frac{t}{m}} = 100 \times 2^{\frac{t}{m}}$$

طبق صورت سوال داریم:

$$12/5 = 100 \times 2^{\frac{-600}{m}}$$

سال

$$\Rightarrow 2^{\frac{600}{m}} = \frac{12}{5} \Rightarrow 2^{\frac{600}{m}} = 2.4 \Rightarrow \frac{600}{m} = 6 \Rightarrow m = 100$$

(مسابقات - توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۹ تا ۷۲)

۱

۲

۳

۴

چون دو تابع متقاطع‌اند، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$2^{x+1} + 9 = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x} \Rightarrow 2 \times 2^x + 9 = 5 \times \frac{1}{2^x}$$

$$\xrightarrow{2^x = A} 2A + 9 = \frac{5}{A} \xrightarrow{\times A} 2A^2 + 9A - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = 81 - 4(2)(-5) = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11 \\ A_1, 2 = \frac{-9 \pm 11}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ق ق} \\ -5 & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

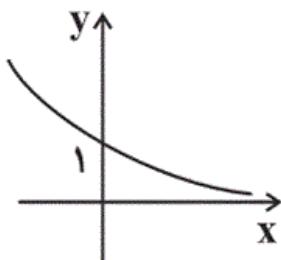
۱

۲

۳✓

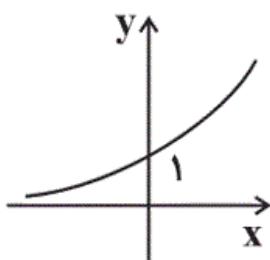
۴

اگر $a < 1$ باشد، نمودار تابع نمایی $y = a^x$ به صورت زیر است:



طبق نمودار، با افزایش X ، y کاهش می‌یابد و برای X های منفی نسبت به X های مثبت با افزایش X سرعت کاهش y ، بیشتر است. پس گزینه‌های «۱» و «۳» درست می‌باشند.

همچنین نمودار تابع نمایی $y = a^x$ و $a > 1$ ، به صورت زیر می‌باشد:



طبق نمودار، با افزایش X ، y نیز افزایش می‌یابد و برای X های مثبت نسبت به X های منفی با افزایش X ، سرعت افزایش y ، بیشتر است. در واقع برای X های منفی نسبت به X های مثبت، سرعت افزایش y کمتر است. بنابراین گزینه «۲» نیز درست است اما گزینه «۴» نادرست می‌باشد.

(مسابقات اتحادیه علمی و فناوری - صفحه‌های ۷۹ تا ۷۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\Rightarrow \frac{3x - 6}{2} > -6 \Rightarrow 3x - 6 > -12 \Rightarrow 3x > -6 \Rightarrow x > -2$$

پس مجموعه جواب‌های صحیح کوچک‌تر یا مساوی صفر $\{0, -1, -2\}$ می‌باشد.

(مسابقات تابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۹ تا ۷۲)

۴

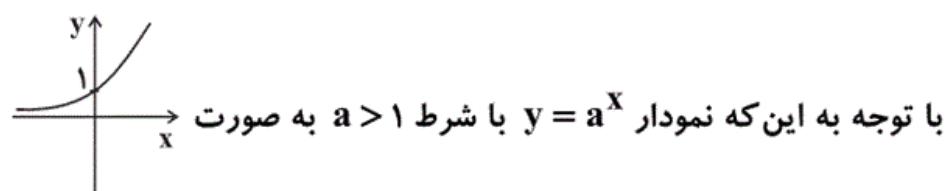
۳ ✓

۲

۱

(امیر هوشمند فمسه)

-۸۵



است و نمودار ۲ واحد به بالا منتقل شده است. پس $b = 2$ و در

نتیجه $b = -2$ است.

$$f(0) = a^0 + b = 6 \xrightarrow{a > 1} a = 2 \Rightarrow f(x) = 2^{x+2} + 2$$

$$\Rightarrow f(8) = 2^8 + 2 = 1026$$

(مسابقات تابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۹ تا ۷۲)

۴

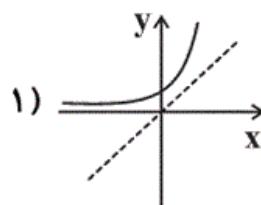
۳

۲

۱ ✓

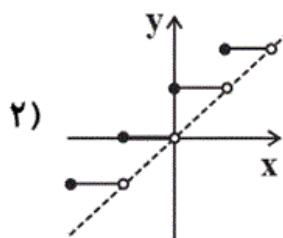
نمودار تمام توابع داده شده را رسم می‌کنیم و دو ویژگی را بررسی

می‌کنیم:

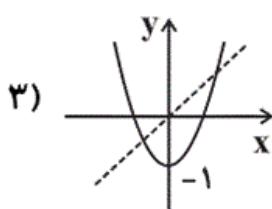


وارون پذیر است.

$$x < f(x)$$

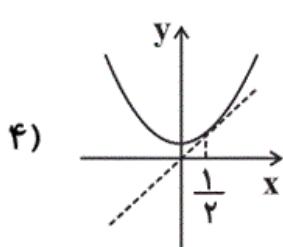


هر دو ویژگی را دارد \Rightarrow
 $x < f(x)$ وارون پذیر نیست.



وارون پذیر نیست.

شرط $f(x) < x$ را ندارد.



وارون پذیر نیست.

در نقطه $x = \frac{1}{2}$ ، تابع f و خط $y = x$ با هم
برخورد می‌کنند.

(حسابان ا- ترکیبی- صفحه‌های ۵۱۴ تا ۶۲۰ و ۷۹ تا ۷۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

مقداری از دارو که بعد از ۲ ساعت در بدن می‌ماند برابر با $A(2) = 24 / 3 = 8$ میلی‌گرم می‌باشد. بنابراین مقدار داروی خارج شده پس از ۲ ساعت $7 / 5 = 1.4$ میلی‌گرم می‌باشد و درصد آن برابر است با:

$$\frac{5 / 7}{30} \times 100 = 19\%$$

(مسابان - توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۱

۲

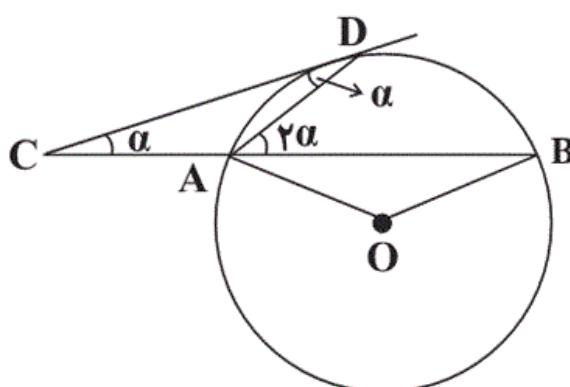
۳

۴

اگر $AC = AD$ باشد، آن‌گاه $\hat{A}CD = \hat{ADC}$ است. اگر فرض

$\hat{BAD} = \hat{ACD} + \hat{ADC} = 2\alpha$ باشد، اندازه زاویه خارجی $\hat{ACD} = \alpha$ کنیم

است. حال با توجه به شکل داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{BD} = 4\alpha \\ \hat{ADC} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \alpha \Rightarrow \widehat{AD} = 2\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = 6\alpha$$

حال با توجه به این‌که زاویه AOB مرکزی است، داریم:

$$\hat{AOB} = \widehat{ADB} = 6\alpha \xrightarrow{\hat{ACD}=\alpha} \hat{AOB} = 6\hat{ACD}$$

(هنرسه ۲ - دایره - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۴ ✓

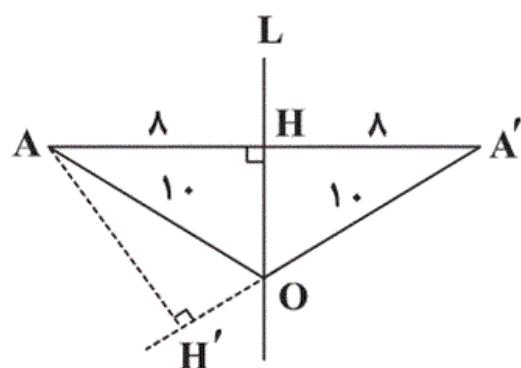
۳

۲

۱

AHO است و با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث **A'OA**، $A'O = A'0 = 10$

طول **OH** برابر ۶ به دست می‌آید.



$$\begin{aligned} OH^2 &= AO^2 - AH^2 \\ \Rightarrow OH^2 &= 10^2 - 8^2 = 6^2 \\ \Rightarrow OH &= 6 \end{aligned}$$

حال با نوشتن رابطه مساحت در مثلث **AA'O** داریم:

$$S_{AA'O} = \frac{OH \times AA'}{2} = \frac{AH' \times A'O}{2}$$

$$\Rightarrow 6 \times 16 = AH' \times 10 \Rightarrow AH' = 9.6$$

(هنرسه ۲ - تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱ ✓

۲

۳

۴

تبديلی که طول پاره خط را حفظ می‌کند، تبدیل طولپا است. تبدیل طولپا

اندازه زاویه، محیط و مساحت را حفظ می‌کند.

در مورد گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳»، تبدیل بازتاب تبدیل طولپا است ولی

ممکن است شب خطوط و جهت شکل را تغییر دهد و بیشمار نقطه ثابت

تبديل دارد.

(هنرسه ۴ - تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۳۱۴ تا ۳۱۰)

۴✓

۳

۲

۱

مطابق شکل قرینه نقطه A نسبت به اضلاع زاویه $x\hat{O}y = 45^\circ$ رسم شده

است. چون Ox و Oy به ترتیب عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AA'

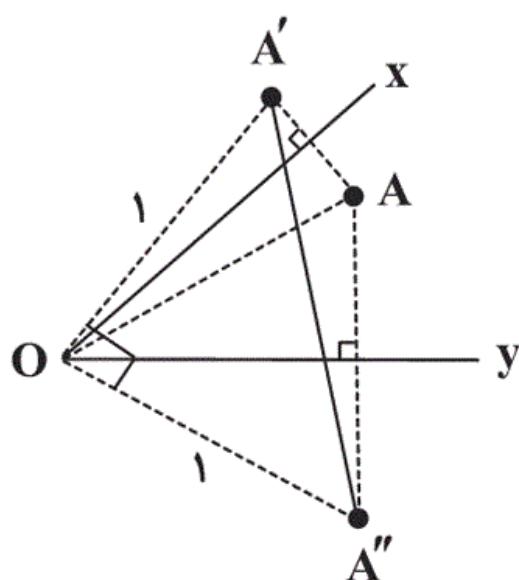
و AA'' هستند، پس طبق خاصیت طولپایی بازتاب

$A' \hat{O} A'' = 2x \hat{O} y = 90^\circ$ و $OA = OA' = OA'' = 1$

مثلث $A'OA''$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، بنابر قضیه فیثاغورس

داریم:

$$A'A''^2 = OA'^2 + OA''^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AA'' = \sqrt{2}$$



(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۳۴ تا ۳۶)

۴

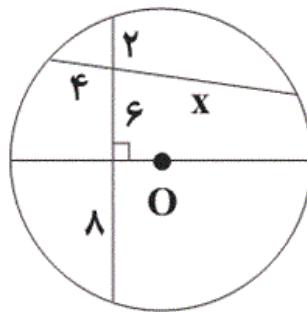
۳

۲ ✓

۱

قطر عمود بر یک وتر، آن را نصف می‌کند و بنابر رابطه طولی وترهای

متقطع داریم:



$$\begin{aligned} 4 \times x &= 2 \times (6 + 8) \\ \Rightarrow 4x &= 28 \Rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

(هندسه ۲ - دایره - صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱

طبق روابط مماس مشترک داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (7 - 1)^2} = 8$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (7 + 1)^2} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{\text{طول مماس مشترک خارجی}}{\text{طول مماس مشترک داخلی}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

(هندسه ۲ - دایره - صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

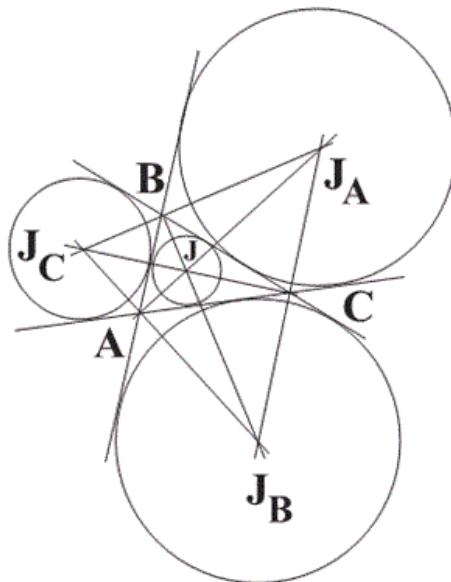
۴

۳

۲

۱

محل برخورد نیمسازهای خارجی، مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث می‌باشد. اندازهٔ عمودهای مشخص شده در شکل، در واقع شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث مفروض است. طبق تمرین ۵ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی، با داشتن طول شعاع دایره‌های محاطی خارجی می‌توان شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را به دست آورد، بنابراین:



$$\begin{cases} r_a = 6 \\ r_b = 3 \Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \\ r_c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{6}{6} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = 1$$

(هنرسه ۳ - دایره - صفحه‌های ۲۶، ۲۵ و ۲۹)

۴

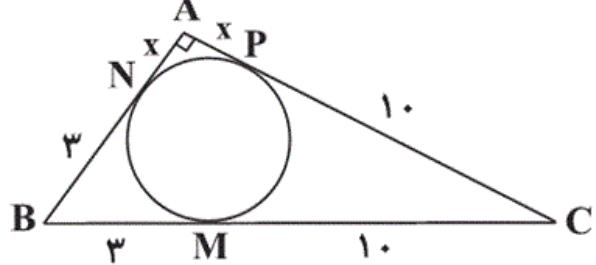
۳ ✓

۲

۱

طول دو مماس رسم شده از هر نقطه خارج دایره برابر آن، با هم برابر است.

بنابراین مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases} BM = BN = 3 \\ CM = CP = 10 \\ AN = AP = x \end{cases}$$

حال با توجه به فیثاغورس داریم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (x+3)^2 + (x+10)^2 = 13^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + x^2 + 20x + 100 = 169$$

$$\Rightarrow x^2 + 13x - 30 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-15 \end{cases}$$

غ ق ق

بنابراین طول اضلاع مثلث ۵، ۱۲ و ۱۳ است. حال با توجه به رابطه شعاع

دایره محاطی خارجی داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{5 \times 12}{2}}{15-13} = \frac{30}{2} = 15$$

(۲۶ هندسه - دایره - صفحه‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۱)

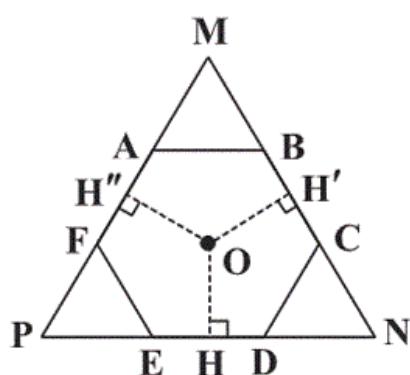
۴

۳

۲✓

۱

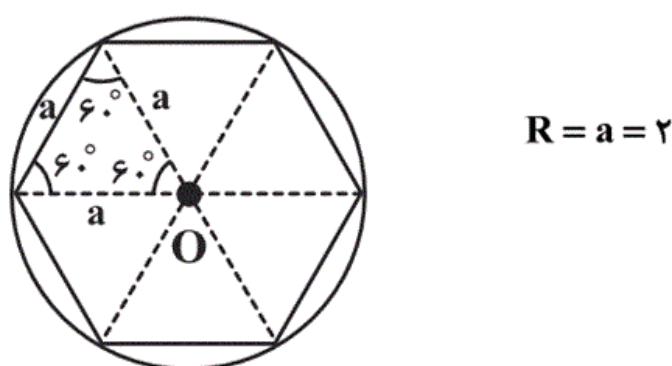
اگر اضلاع شش‌ضلعی را امتداد دهیم، با توجه به تمرین کتاب درسی مجموع طول سه عمود OH ، OH' و OH'' برابر با طول ارتفاع مثلث MNP است. بنابراین:



$$OH + OH' + OH'' = h = \frac{\sqrt{3}}{2} MN = 3\sqrt{3} \Rightarrow MN = 6$$

$$\Rightarrow BC = \frac{MN}{3} = 2$$

حال با رسم دایرهٔ محیطی شش‌ضلعی منتظم، دیده می‌شود که اندازه شعاع دایرهٔ محیطی برابر با طول ضلع شش‌ضلعی است. پس:



(هنرمه ۲ - دایره - صفحه ۳۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \frac{\widehat{MN} + \widehat{NP} + \widehat{PQ} - \widehat{MQ}}{2} \\ \hat{B} = \frac{\widehat{MN} + \widehat{MQ} + \widehat{PQ} - \widehat{NP}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \widehat{MN} + \widehat{PQ}$$

از طرفی می‌دانیم $P\hat{C}Q = \frac{\widehat{MN} + \widehat{PQ}}{2} = 100^\circ$ است، پس:

$$\hat{A} + \hat{B} = 2P\hat{C}Q = 200^\circ$$

(هندسه - ۲ - ایره - صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مبیر محمدی نویسی)

-۱۲۰

(اولی سفید | دومی سیاه) P (اولی سفید) $P =$ (دومی سیاه و اولی سفید) P

$$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۴

۳

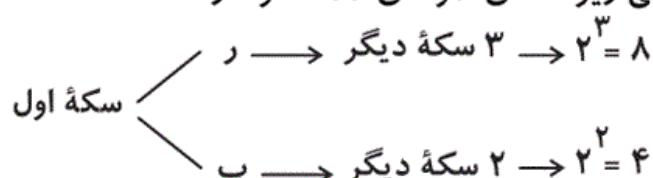
۲ ✓

۱

(سروش موئینی)

-۱۱۴

با توجه به نمودار درختی زیر، فضای نمونه‌ای ۱۲ عضو دارد.



$$n(S) = 8 + 4 = 12$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علی ارجمند)

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

$$\Rightarrow \sim(\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 + x > 2)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z}; x^2 + x \leq 2$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

 ۴✓ ۳ ۲ ۱

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۲»: اگر هر عضو دلخواه از A درون B باشد، آن‌گاه $A \subseteq B$ است.

گزینه «۳»: از تعریف داده شده نتیجه می‌شود که $A' \subseteq B$ است و نمی‌توان نتیجه گرفت که $A' \subseteq B$ می‌باشد.

گزینه «۴»: مثال نقض: $C = \{1, 2\}$ ، $A = \{1\}$ و $B = \{2\}$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱✓

(مرتضی فوییم علوی)

با توجه به ضرب دکارتی خواهیم داشت:

$$A = \{a, 1, 2\}, B = \{-1, 0, 1\}, C = \{-1, 0, 3\}, D = \{2, d\}$$

$$\Rightarrow D - A = \{d\}, B \cup C = \{-1, 0, 3, 1\}$$

از این رو مجموعه $(D - A) \times (B \cup C)$ دارای ۴ عضو می‌باشد.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

 ۴ ۳ ۲✓ ۱

(امیرحسین ابومهیوب)

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «بخش‌پذیری بر ۵» و «بخش‌پذیری بر ۶» تعریف کنیم، آن‌گاه داریم:

$$n(S) = ۳۰۰$$

$$n(A) = \left[\frac{۳۰۰}{۵} \right] = ۶۰ \quad , \quad n(B) = \left[\frac{۳۰۰}{۶} \right] = ۵۰$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{۳۰۰}{۳۰} \right] = ۱۰$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$\frac{۶۰ + ۵۰ - ۱۰}{۳۰۰} = \frac{۱۰۰}{۳۰۰} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۴۷ تا ۱۴۸)

 ۱ ۲ ۳ ۴

(سالمان اسبهور)

$$P(۱) = x, \quad P(۲) = ۲x, \quad \dots, \quad P(۶) = ۶x$$

$$P(۱) + P(۲) + \dots + P(۶) = ۱ \Rightarrow x + ۲x + \dots + ۶x = ۱ \Rightarrow ۲۱x = ۱$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۲۱}$$

$$P(۱) + P(۳) + P(۵) = \frac{۱}{۲۱} + \frac{۳}{۲۱} + \frac{۵}{۲۱} = \frac{۹}{۲۱} = \frac{۳}{۷}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۴۹)

 ۱ ۲ ۳ ۴

(عزیز الله على اصغرى)

$$A \cup B = \{a, b, c, d\} = S \Rightarrow P(A \cup B) = ۱$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۱ = ۰/۳ + ۰/۴ - P(a) \Rightarrow P(a) = ۰/۱$$

$$C = \{a\} \Rightarrow P(C) = P(a) = ۰/۱$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۰)

 ۱ ۲ ۳ ۴

$$P(B | A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

 ✓ ۳ ۲ ۱

اگر پیشامد A را «حداقل یک فرزند پسر» و پیشامد B را «حداکثر دو فرزند پسر» تعریف کنیم، داریم:

سه فرزند دو فرزند یک فرزند

$$n(A) = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 7$$

دو فرزند یک فرزند

$$n(B \cap A) = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 6$$

$$P(B | A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{6}{7}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

 ۳ ۲ ✓ ۱