



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

جبر و احتمال، استدلال ریاضی - 4 سوال

۱۳۱ - برای ... درستی گزاره «اگر دو عدد حقیقی a و b مخالف صفر باشند و $a + b = 1$ ، آنگاه $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ » از روش ... استفاده می‌کنیم.

- (۲) رد-مثال نقض
(۴) رد-برهان خلف

- (۱) اثبات-استدلال استنتاجی
(۳) اثبات-استدلال استقرایی

۱۳۲ - درستی کدامیک از گزاره‌های زیر را می‌توان با استفاده از مثال نقض رد کرد؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) هرگاه n مضرب ۴ باشد، آنگاه n^2 مضرب ۸ است.
(۲) باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر عدد ۸، برابر یک است.
(۳) باقیمانده تقسیم مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ بر عدد ۳، برابر یک است.
(۴) هر عدد اول فرد به یکی از دو صورت $1 - 2^n$ یا $1 + 2^n$ نوشته می‌شود.

۱۳۳ - یک مدرسه حداقل چند دانش‌آموز داشته باشد تا مطمئن باشیم دست کم ۱۲ دانش‌آموز در این مدرسه، ماه تولد یکسانی دارند؟

- (۱) ۱۴۵
(۲) ۱۳۳
(۳) ۱۲۱
(۴) ۱۰۹

۱۳۴ - در هر زیرمجموعه n عضوی از مجموعه $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ ، حداقل دو عضو وجود دارد که حاصل جمع آن‌ها برابر

۲۰ است. کم‌ترین مقدار n کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۸

جبر و احتمال، مجموعه‌ها - 6 سوال

۱۳۵ - مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ ، چند زیرمجموعه پنج عضوی دارد که ۷ و ۱۷ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن‌ها باشند؟

- (۱) ۶۶
(۲) ۷۲
(۳) ۸۴
(۴) ۹۱

۱۳۶ - اگر $\{1, 2, 3, 4\} = A$ و $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = B$ باشد، آنگاه چند مجموعه مانند X در رابطه $(A - B) \subseteq X \subseteq (A \Delta B)$ صدق می‌کند؟

- (۱) ۱۶
(۲) ۸
(۳) ۴
(۴) ۱

-۱۳۷ - اگر A، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، آنگاه حاصل $(A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B \cup C) \cap (B' \cup C)$ کدام است؟

B' (۴)

C' (۳)

B (۲)

C (۱)

-۱۳۸ - اگر $B = \{\{a, \{b\}\}\}$ و $A = \{a, \{b\}\}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

B $\in P(A)$ (۴)

B $\subseteq P(A)$ (۳)

A $\in P(B)$ (۲)

A $\subseteq P(B)$ (۱)

-۱۳۹ - هرگاه $A - B' \subseteq A' \cup B'$ باشد، کدام رابطه همواره درست است؟

A $\subseteq B'$ (۴)

B' $\subseteq A$ (۳)

B = \emptyset (۲)

A = \emptyset (۱)

-۱۴۰ - اگر m یک عدد طبیعی دو رقمی باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

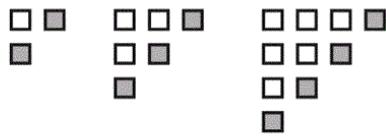
$\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \geq \frac{1}{m} \right\}$ (۲)

$\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \right\}$ (۱)

$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \right\}$ (۴)

$\left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{m} \right\}$ (۳)

ریاضی پایه، الگو و دنباله - ۵ سوال



-۱۰۱ - با توجه به الگوی مقابل، تعداد مربع‌های سفید در شکل دهم کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

۱۰۰ (۲)

۵۰ (۴)

۱۱۰ (۱)

۵۵ (۳)

-۱۰۲ - زاویه‌های یک پنج‌ضلعی، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. اگر بزرگ‌ترین زاویه، ۷ برابر کوچک‌ترین زاویه باشد،

کوچک‌ترین زاویه داخلی این پنج‌ضلعی چند درجه است؟

۲۷ (۴)

۱۸ (۳)

۴۵ (۲)

۳۶ (۱)

-۱۰۳ - جمله هشتم یک دنباله هندسی صعودی برابر ۸ و حاصل ضرب جمله‌های دهم و هجدهم آن برابر 2^{18} است. جمله سی‌ودوم این

دنباله کدام است؟

۲۳۳ (۴)

۲۳۱ (۳)

۲۲۸ (۲)

۲۲۷ (۱)

- ۱۰۴ حاصل عبارت $x = \sqrt[13]{x^5 \sqrt{x^2}}$ به ازای x^{15} برابر کدام است؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

- ۱۰۵ اگر $x = \sqrt[8]{\sqrt[9]{\sqrt{81}}}$ باشد، x^2 کدام است؟

۹ (۲)

۸۱ (۱)

۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

ریاضی پایه، مثلثات - ۱۰ سوال

- ۱۲۵ مقدار عبارت $\sin 5^\circ \cos 10^\circ \cos 15^\circ + \cos 5^\circ \sin 10^\circ \cos 15^\circ$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

- ۱۲۶ مقدار عبارت $A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{8}\right)$ کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{16}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

- ۱۲۷ حاصل عبارت $T = \sqrt{1 - \sin(100^\circ)} + \sqrt{1 + \sin(100^\circ)}$ کدام است؟

$\cos 40^\circ$ (۴)

$2\cos 40^\circ$ (۳)

$\sin 40^\circ$ (۲)

$2\sin 40^\circ$ (۱)

- ۱۲۸ حاصل عبارت $x = 20^\circ + 2\cos 2x \cdot \cos x$ به ازای $x = 20^\circ$ کدام است؟

$2\cos 10^\circ$ (۴)

$\sin 80^\circ$ (۳)

$2\sin^2 80^\circ$ (۲)

$2\cos^2 80^\circ$ (۱)

- ۱۲۹ حاصل $\tan 105^\circ$ کدام است؟

$-\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ (۲)

$-\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$ (۱)

$$\cos(2x - \frac{7\pi}{\lambda}) + 2\sin(2x - \frac{3\pi}{\lambda}) + 3\sin(2x + \frac{5\pi}{\lambda}) = \frac{1}{3} \text{ اگر } -130^\circ \text{ باشد، مقدار } \lambda \text{ کدام است؟}$$

$$-\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (1)$$

- ۱۱۲ در یک ساعت عقربه‌ای، نوک عقربه دقيقه‌شمار در مدت زمان 40° دقیقه، مسافت 60 سانتی‌متر را طی کرده است. طول عقربه دقيقه‌شمار چند سانتی‌متر است؟

$$15\pi \quad (2)$$

$$\frac{15}{\pi} \quad (1)$$

$$45\pi \quad (4)$$

$$\frac{45}{\pi} \quad (3)$$

- ۱۱۳ زاویه بین دو خط $x - \sqrt{3}y = 1$ و $\sqrt{3}x - y = 1$ چند درجه است؟

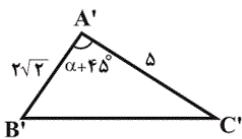
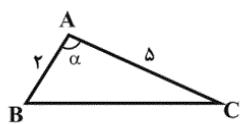
$$60 \quad (4)$$

$$45 \quad (3)$$

$$30 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

- ۱۱۴ اگر مساحت مثلث ABC برابر با 3 باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟ (${}^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$)



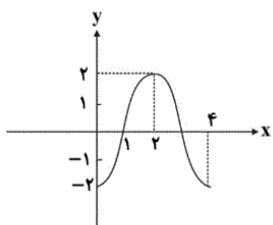
$$3/5 \quad (1)$$

$$7 \quad (2)$$

$$3/5\sqrt{2} \quad (3)$$

$$7\sqrt{2} \quad (4)$$

- ۱۱۵ نمودار زیر که در یک دوره تناوب رسم شده است، مربوط به کدام تابع می‌تواند باشد؟



$$y = -2\cos\frac{\pi x}{2} \quad (2)$$

$$y = -2\cos 4x \quad (1)$$

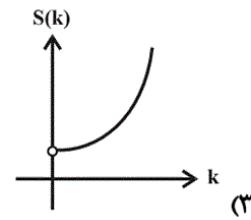
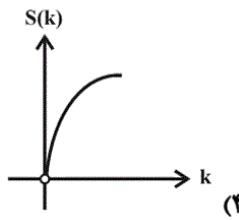
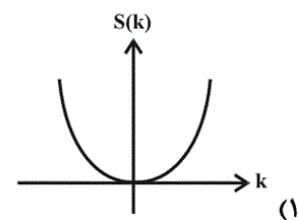
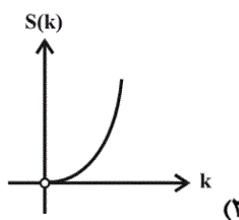
$$y = 2\cos\left(\frac{-\pi x}{2}\right) \quad (4)$$

$$y = 2\cos\left(\frac{-x}{4}\right) \quad (3)$$

ریاضی پایه ، توابع خاص - نامعادله و تعیین علامت - ۶ سوال

- ۱۰۶- از تقاطع نمودار دوتابع $y = k$ و $y = |3x| - x$ مثلى در صفحه ایجاد مى شود که مساحت آن را بحسب k با $S(k)$

نمایش مى دهیم. نمودار $S(k)$ کدام است؟



- ۱۰۷- معادله $|x - 4| = 4$ چند جواب دارد؟

۴) صفر

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

- ۱۰۸- در دامنه تابع $f(x) = \sqrt{|x-1| + |x+2| - 6}$ چند عدد صحیح قرار نمی گیرد؟

۹) ۴

۸) ۳

۷) ۲

۶) ۱

- ۱۰۹- مجموعه جواب نامعادله $|x - 1| \leq \sqrt{x+1}$ کدام است؟

$-3 \leq x \leq 3$ (۴)

$0 \leq x \leq 3$ (۳)

$-1 \leq x \leq 3$ (۲)

$-1 \leq x \leq 1$ (۱)

- ۱۱۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^r + 2\sqrt{2x+a}$ بالای محور x ها است؟

$a > 1$ (۲)

$a < -1$ (۱)

$a > 2$ (۴)

$1 < a < 2$ (۳)

- ۱۱۱- به ازای چند مقدار از $k \in \mathbb{N}$ ، عدد ۲ بین صفرهای تابع $f(x) = -x^r + 5x - 2^k$ قرار می گیرد؟

۲) ۲

۱) ۱

۴) بی شمار

۳) ۳

- ۱۱۶- مجموع تمام جملات یک دنباله حسابی 2430 می باشد. اگر مجموع 10 جمله اول این دنباله 15 و مجموع 10 جمله آخر آن 1065 باشد، این دنباله چند جمله دارد؟

۳۴) ۴

۵۳) ۳

۲۲) ۲

۴۵) ۱

- ۱۱۷- در یک دنباله هندسی صعودی غیر صفر، مجموع 8 جمله اول 17 برابر مجموع 4 جمله اول است. مجموع معکوس های 8 جمله اول چند برابر مجموع معکوس های 4 جمله اول است؟

$\frac{17}{16}$) ۲

$\frac{1}{12}$) ۱

۲) ۴

$\frac{16}{17}$) ۳

- ۱۱۸- در یک دنباله هندسی نزولی نامتناهی با جمله اول a_1 داریم: $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{a_n}$. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۲) ۴

$\frac{5}{2}$) ۳

$\frac{3}{2}$) ۲

$\frac{5}{4}$) ۱

- ۱۱۹- اگر باقی مانده تقسیم $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x + 2$ برابر باشد، باقی مانده تقسیم $x^3 + ax^2 + 2b$ بر $x + 2$ کدام است؟

۴) ۴

۲) ۳

-۲) ۲

-۴) ۱

- ۱۲۰- اگر $f(x)$ یک چند جمله ای باشد به طوری که نمودار تابع $y = x + f(x)$ محور x ها را در نقاطی به طول 1 و $x=2$ قطع کند، باقی مانده تقسیم $(x-3)(x+2)$ بر $f(x)$ کدام است؟

$1-x$) ۴

$x+1$) ۳

$-x$) ۲

x) ۱

- ۱۲۱- اگر ضرایب جمله وسط در بسط دو جمله ای های $(1+\alpha x)^4$ و $(1-\alpha x)^4$ با هم برابر باشند ($\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$)، مقدار α کدام است؟

$\frac{10}{3}$) ۴

$-\frac{5}{3}$) ۳

$\frac{3}{5}$) ۲

$-\frac{3}{10}$) ۱

- ۱۲۲ - مجموعه مقادیر k کدام باشد تا معادله $\frac{t}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{k}$ ، یک جواب داشته باشد؟

\emptyset (۴)

{-1, 1} (۳)

(-1, 1) (۲)

{-1} (۱)

- ۱۲۳ - معادله‌ای که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله $x^3 + 7x - 1 = 0$ باشد، کدام است؟

$$x^3 + 7x - 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^3 - 7x + 1 = 0 \quad (۱)$$

$$x^3 - 7x - 1 = 0 \quad (۴)$$

$$x^3 + 7x + 1 = 0 \quad (۳)$$

- ۱۲۴ - اگر α و β جواب‌های معادله $x^3 - 6x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\beta^2} + \beta^3$ کدام است؟

۳۸ (۴)

۳۴ (۳)

۶ (۲)

۱ (۱)

آمار و مدل سازی، آمار و مدل سازی

- ۱۰ سوال -

- ۱۵۱ - اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی به صورت $E + 2$ مدل سازی شده باشد، مساحت مثلث از کدام مدل زیر پیروی می‌کند؟

$$S = \sqrt{3} + E_1 \quad (۴)$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} (2 + E_1) \quad (۳)$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + E_1 \quad (۲)$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} + E_1 \quad (۱)$$

- ۱۵۲ - سرشماری وقتی صورت گرفته است که ...

(۱) افراد نمونه‌ای از جامعه آماری را مورد مطالعه قرار دهیم.

(۲) موضوع مورد مطالعه جامعه آماری پژوهی‌نش باشد.

(۳) تمام افراد جامعه آماری را مورد مطالعه قرار دهیم.

(۴) بخشی از افراد جامعه آماری در دسترس نباشند.

(۳) تمام افراد جامعه آماری را مورد مطالعه قرار دهیم.

- ۱۵۳ - نوع متغیرهای زیر به ترتیب (از راست به چپ) کدام است؟

حجم آب یک تانکر - تعداد نامه‌های یک صندوق - جنسیت افراد یک شهر

(۱) کمی پیوسته - کمی پیوسته - کمی گسسته - کمی ترتیبی

(۲) کمی گسسته - کمی گسسته - کمی گسسته - کمی ترتیبی

(۱) کمی پیوسته - کمی اسمی

(۳) کمی گسسته - کمی گسسته - کمی گسسته - کمی اسمی

(۳) کمی پیوسته - کمی اسمی

حدود دسته‌ها	a - b	b - c	c - d	d - e
مرکز دسته‌ها	۳	x	y	۱۱

- ۱۵۴ - با توجه به جدول مقابل، حاصل $e - a$ کدام است؟

۱۲ (۴)

$\frac{۳۲}{۳}$ (۳)

$\frac{۲۸}{۳}$ (۲)

۸ (۱)

دسته	۱	۲	۳	۴
فراوانی	۳	۶	۴	۲

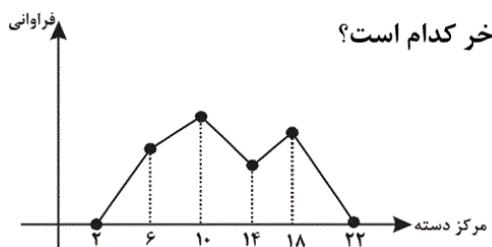
- ۱۵۵ - اگر به داده‌های جدول روبه‌رو ۵ داده اضافه کنیم، در نمودار دایره‌ای، زاویه متناظر با دسته دوم، 18° کاهش می‌یابد. فراوانی جدید این دسته کدام است؟

۹) ۴

۸) ۳

۷) ۲

۶) ۱



- ۱۵۶ - اگر مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی زیر برابر ۳۶ باشد، فراوانی تجمعی دسته آخر کدام است؟

۸) ۱

۹) ۲

۱۰) ۳

۶) ۴

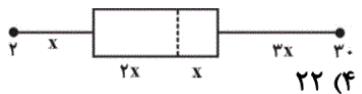
- ۱۵۷ - میانگین اولین بیست عدد زوج طبیعی، چند واحد بیشتر از میانگین اولین بیست عدد فرد طبیعی است؟

۴) صفر

۵) ۳

۲) ۲

۱) ۱



- ۱۵۸ - در نمودار جعبه‌ای روبه‌رو، چارک سوم کدام است؟

۲۰) ۳

۱۸) ۲

۱۶) ۱

- ۱۵۹ - دامنه تغییرات داده‌های $a, 4, 6, 8, 2, 8, a$ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها به ازای بیشترین مقدار ممکن برای a ، چند برابر ضریب تغییرات این داده‌ها به ازای کمترین مقدار ممکن برای a است؟

۲) ۴

$\frac{3}{2}$ ۳

$\frac{1}{2}$ ۲

$\frac{2}{3}$ ۱

- ۱۶۰ - اگر میانگین داده‌های آماری $1 - 2a + 11 - 3b + 4c + 1$ برابر ۵ و انحراف معیار این داده‌ها برابر صفر باشد، واریانس داده‌های a, b, c کدام است؟

$\frac{38}{9}$ ۴

$\frac{112}{27}$ ۳

$\frac{37}{9}$ ۲

$\frac{115}{27}$ ۱

هندسه ۱، هندسه و استدلال - ۲ سوال

- ۱۴۱ - در کدام مثلث، همواره دو زاویه خارجی وجود دارد که مجموع آنها، سه برابر زاویه داخلی غیرمجاور آن دو زاویه باشد؟

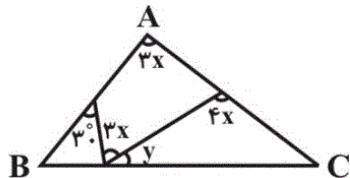
۲) متساوی الاضلاع

۱) متساوی الساقین

۴) منفرجه الزاویه

۳) قائم الزاویه

- ۱۴۲ - اگر در شکل روبرو $\hat{B} - \hat{C} = 25^\circ$ باشد، آنگاه ی کدام است؟



55° (۲)

45° (۱)

65° (۴)

60° (۳)

هندسه ۱ ، مساحت و قضیه ی فیثاغورس - ۳ سوال

- ۱۴۳ - اگر مساحت یک ذوزنقه متساوی الساقین که قطرهای آن بر هم عمودند، برابر ۱۸ باشد، طول قطر آن کدام است؟

6 (۲)

3 (۱)

$6\sqrt{2}$ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

- ۱۴۴ - در مثلث قائم الزاویه‌ای ارتفاع وارد بر وتر، دو پاره خط به اندازه‌های $1 - a$ و $a - 4$ روی آن ایجاد می‌کند. اگر اندازه این ارتفاع برابر $3\sqrt{6}$ واحد باشد، مساحت کوچک‌ترین مثلث قائم الزاویه پدیدآمده از رسم این ارتفاع کدام است؟

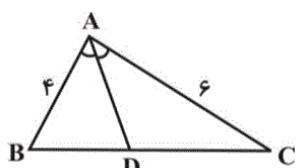
$9\sqrt{6}$ (۲)

$12\sqrt{6}$ (۱)

$6\sqrt{6}$ (۴)

$8\sqrt{6}$ (۳)

- ۱۴۵ - مساحت مثلث ABC به اضلاع $4 = AC$ و $6 = AB$ و $10 = BC$ برابر است. اگر AD نیمساز زاویه A باشد، فاصله نقطه D از



صلع AB کدام است؟

2 (۲)

3 (۱)

$2/5$ (۴)

4 (۳)

هندسه ۱ ، تشابه - ۲ سوال

- ۱۴۶ - مربع ABCD به ضلع $\sqrt{5}$ مفروض است. اگر نقطه M وسط ضلع BC باشد، فاصله رأس A از پاره خط DM کدام است؟

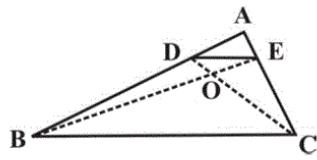
$$\frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

$$2(4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

- ۱۴۷ - در شکل زیر اگر $DE \parallel BC$ و $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{5}$ باشد، مساحت مثلث ADE چند برابر مساحت مثلث DEO است؟



$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

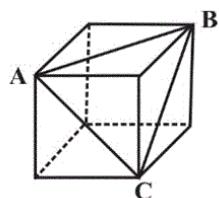
$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{6}{5} \quad (3)$$

هندرسه ۱، شکل های فضایی - ۳ سوال

- ۱۴۸ - اگر مساحت کل مکعب شکل زیر برابر ۱۰۸ باشد، آنگاه مساحت مثلث ABC چند برابر $\sqrt{3}$ است؟



$$6(2)$$

$$9(1)$$

$$2(4)$$

$$\frac{9}{2}(3)$$

- ۱۴۹ - درون یک کره به شعاع ۵، یک مخروط قائم و یک استوانه، هر دو به شعاع قاعده ۳ محاط کرده‌ایم. قدر مطلق اختلاف حجم استوانه و حجم مخروط کدام است؟

$$36\pi \quad (2)$$

$$27\pi \quad (1)$$

$$54\pi \quad (4)$$

$$45\pi \quad (3)$$

- ۱۵۰ - صفحه‌ای موازی با دو قاعده منشور قائمی به ارتفاع ۴ واحد که قاعده‌های آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با طول ضلع ۲ واحد

هستند، آن را به دو منشور یکسان تقسیم می‌کند. اگر این دو منشور را از یکی از وجوه مربعی آنها به هم بچسبانیم، مساحت

کل شکل حاصل کدام است؟

$$16(4)$$

$$16+2\sqrt{3}(3)$$

$$8+4\sqrt{3}(2)$$

$$16+4\sqrt{3}(1)$$

(سید عارل رضا مرتفعی)

-۱۳۱

$$a + b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 - \frac{1}{a})(1 - \frac{1}{b}) = (\frac{a-1}{a})(\frac{b-1}{b}) = (\frac{-b}{a}) \times (\frac{-a}{b}) = 1$$

بنابراین برای اثبات درستی گزاره مورد نظر از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۴

۳

۲

۱

(علیرضا شریف خطیبی)

-۱۳۲

گزاره‌های بیان شده در گزینه‌های «۱» و «۲» و «۳» همگی صحیح هستند،

عدد ۱۱ مثال نقضی برای گزینه «۴» است، زیرا ۱۱ عددی اول است ولی به

هیچ یک از دو صورت $1 - 2^n$ یا $1 + 2^n$ نوشته نمی‌شود.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱

(مهرداد ملوندی)

-۱۳۳

فرض کنید تعدادی کبوتر می‌خواهند در n لانه قرار گیرند. برای این‌که

لانه‌ای وجود داشته باشد که حداقل k کبوتر در آن قرار بگیرند، باید حداقل

تعداد کبوترها برابر $1 + (k-1)n$ باشد. پس داریم:

$$12(12-1)+1=12\times 11+1=133$$

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲

۱

فرض کنید مجموعه A به زیرمجموعه‌های زیر افزایش شده باشد:

$$\{10\}, \{12, 14\}, \{14, 16\}, \{16, 18\}, \{18, 20\}$$

اگر حداقل ۶ عضو از مجموعه S انتخاب شود، آنگاه با توجه به ۵ زیرمجموعه فوق، طبق اصل لانه کبوتری، ۲ عضو در یکی از ۴ زیرمجموعه اول خواهند بود که مجموع آنها برابر ۲۰ است، پس $\min(n) = 6$.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

اعضایی که در زیرمجموعه‌های مورد نظر قطعاً حضور ندارند عبارت‌اند از:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 18, 19, 20$$

و اعضايی که قطعاً در زیرمجموعه‌های مورد نظر حضور دارند، ۷ و ۱۷ می‌باشند. بنابراین از بین $20 - 9 = 11$ عضو باقی‌مانده، باید سه عضو دیگر

انتخاب کنیم که این کار به $\binom{9}{3} = 84$ حالت صورت می‌گیرد.

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(فرهار صابر)

$$A - B = \{1\}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1\} \cup \{5, 6, 7\} = \{1, 5, 6, 7\}$$

$$\Rightarrow \{1\} \subseteq X \subseteq \{1, 5, 6, 7\}$$

مجموعه X قطعاً دارای عضو ۱ است، ولی می‌تواند شامل هر یک از عضوهای ۵، ۶ و ۷ باشد یا نباشد. در این صورت تعداد مجموعه‌های X برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۰ و ۵۰ تا ۵۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(مهرداد ملوندی)

$$\begin{aligned} & [A \cup (B \cup C)] \cap [A' \cup (B \cup C)] \cap (B' \cup C) \\ &= [\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset}] \cup (B \cup C) \cap (B' \cup C) \\ &= (B \cup C) \cap (B' \cup C) = \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} \cup C = C \end{aligned}$$

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۳ تا ۵۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(هومن نورائی)

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a, \{b\}\}\}$$

با توجه به این‌که تنها عضو مجموعه B به مجموعه $P(A)$ تعلق دارد، پس $B \subseteq P(A)$ است.

(جبر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$A - B' \subseteq A' \cup B' \Rightarrow A \cap B \subseteq (A \cap B)'$$

پس الزاماً $A \cap B = \emptyset$ می باشد. زیرا هیچ مجموعه ای به غیر از تهی،

زیرمجموعهٔ متمم خودش نیست. بنابراین داریم:

$$A \subseteq B', \quad B \subseteq A'$$

(جبر و احتمال - مجموعه ها: صفحه های ۳۶ تا ۵۲)

۴✓

۳

۲

۱

در گزینه «۲» داریم:

$$\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \geq \frac{1}{m} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m} \right\} \Rightarrow \text{مجموعه متناهی است.}$$

در سایر گزینه ها، مجموعه ها نامتناهی هستند.

(جبر و احتمال - مجموعه ها: صفحه های ۴۰ و ۴۱)

۴

۳

۲✓

۱

(سعید فانجانی)

اگر شکل‌ها را به صورت مربع کامل $(n+1)(n+1)$ در نظر بگیریم، در هرشکل، $(n+1)^2$ مربع وجود دارد که $n+1$ مربع سیاه هستند؛ در نتیجه:

$$\text{تعداد مربع‌های باقیمانده در شکل } n \text{ ام} = (n+1)^2 - (n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$$

که این عبارت تعداد کل مربع‌های باقیمانده در شکل n ام را نشان می‌دهد

اما تعداد مربع‌های سفید در این مسئله، نصف این تعداد است، یعنی:

$$\frac{n^2 + n}{2}. \text{ در نتیجه در شکل دهم تعداد مربع‌های سفید برابر است با:}$$

$$\frac{10^2 + 10}{2} = 55$$

(ریاضیات ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سید عادل حسینی)

 $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$: دنباله زاویه‌ها $a_1 + 10d = 540^\circ \Rightarrow a_1 + 2d = 108^\circ$ مجموع زوایا

$$\frac{\text{بزرگترین زاویه}}{\text{کوچکترین زاویه}} = \frac{a_1 + 4d}{a_1} = 7 \Rightarrow 3a_1 = 2d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 27^\circ \\ d = 40/5^\circ \end{cases}$$

(ریاضیات ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

راه حل اول:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} t_8 = t_1 r^7 = 2^3 \\ t_1 \cdot t_{18} = t_1^2 r^{26} = 2^{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ t_1 = 2^{-4} \end{cases}$$

دنبالهٔ صعودی

$$\Rightarrow t_n = 2^{n-4} \Rightarrow t_{32} = 2^{27}$$

راه حل دوم: در یک دنبالهٔ هندسی اگر برای اعداد طبیعی m, n, p, q داریم:

داشته باشیم: $t_m t_n = t_p t_q$ برقرار است. در

$$\Rightarrow t_1 \cdot t_{18} = t_8 t_{20} \Rightarrow t_{20} = 2^{15}$$

نتیجه داریم:

$$t_{32} = \frac{2^{30}}{2^3} = 2^{27}$$

از طرفی $t_{20} = t_8 t_{32}$; بنابراین:

(ریاضیات ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱ ✓

$$x \sqrt[3]{x} \sqrt[5]{x^2} = x x \sqrt[3]{x^5} = x^{1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5}} = x^{\frac{26}{15}}$$

به جای x عدد $\sqrt[13]{2^{15}}$ را قرار می‌دهیم:

$$(\sqrt[13]{2^{15}})^{\frac{26}{15}} = (2^{\frac{15}{13}})^{\frac{26}{15}} = 2^2 = 4$$

(ریاضیات ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

 ۴ ۳ ۲ ✓ ۱

$$\sqrt[4]{81} = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{24} \Rightarrow x^3 = 24$$

(ریاضیات ۲ - الگو و نیازهای ۱۷ تا ۲۱)

 ۱✓ ۲ ۳ ۴

(علی شعبان)

دانلود از سایت ریاضی سرا -۱۲۰

$$\sin \delta^\circ \cos 1^\circ \cos 1\delta^\circ + \cos \delta^\circ \sin 1^\circ \cos 1\delta^\circ$$

$$= \cos 1\delta^\circ \left(\sin \delta^\circ \cos 1^\circ + \cos \delta^\circ \sin 1^\circ \right)$$

$$= \cos 1\delta^\circ \sin(\delta^\circ + 1^\circ)$$

$$= \sin 1\delta^\circ \cos 1\delta^\circ = \frac{1}{2} \sin(2 \times 1\delta^\circ) = \frac{1}{2} \sin 2^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(مسابقات - مسئله‌ها: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

 ۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\begin{aligned}
 A &= \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda}\right) \\
 &= \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right) \\
 &= \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos^2 \frac{3\pi}{\lambda}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} \\
 &= \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right)^2 = \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

(مسابقات- مسئله های ۱۰ تا ۱۷)

 ✓ ۱

$$\sqrt{1 - \sin 100^\circ} = \sqrt{1 - \cos 10^\circ} = \sqrt{2 \sin^2 5^\circ} = \sqrt{2} \sin 5^\circ$$

$$\sqrt{1 + \sin 100^\circ} = \sqrt{1 + \cos 10^\circ} = \sqrt{2 \cos^2 5^\circ} = \sqrt{2} \cos 5^\circ$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{2} \sin 5^\circ + \sqrt{2} \cos 5^\circ = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5^\circ \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin(5^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 50^\circ = \sqrt{2} \cos 40^\circ$$

(مسابقات- مسئله های ۱۰ تا ۱۷)

 ✓ ۱

(جواب اسماقی)

$$\frac{1}{2} + 2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \cos(40^\circ + 20^\circ) + \cos(40^\circ - 20^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos 20^\circ$$

$$= 1 + \cos 20^\circ = 2 \cos^2 10^\circ = 2 \sin^2 80^\circ$$

(مسابقات- مثلثات: صفحه‌های ۵ و ۷)

 ۱ ۲ ۳ ۴

(کوش شاهدینهوریان)

$$\tan(10\delta^\circ) = \tan(45^\circ + 6^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 6^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 6^\circ}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}$$

(مسابقات- مثلثات: صفحه‌های ۵ و ۷)

 ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left(2x + \frac{5\pi}{\lambda}\right) - \left(2x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) = \pi \Rightarrow 2x + \frac{5\pi}{\lambda} = \pi + \left(2x - \frac{3\pi}{\lambda}\right)$$

$$2\sin\left(2x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) + 3\sin\left(\pi + \left(2x - \frac{3\pi}{\lambda}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2\sin\left(2x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) - 3\sin\left(2x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(2x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{3\pi}{\lambda}\right)\right) = \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\left(-2x + \frac{7\pi}{\lambda}\right) = \frac{-1}{3} \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{7\pi}{\lambda}\right) = -\frac{1}{3}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

یک دور کامل در دایره، ۶۰ دقیقه است. بنابراین عقریه دقیقه‌شمار $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

دایره را طی کرده است. دایره کامل 2π رادیان است. بنابراین داریم:

$$\text{زاویه دوران عقریه بر حسب رادیان} = \frac{2}{3} \times 2\pi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$$r = \frac{L(\text{طول کمان})}{\theta(\text{برحسب رادیان})} \quad (\text{شعاع دایره یا همان طول عقریه دقیقه‌شمار})$$

$$= \frac{60}{4\pi} = \frac{45}{\pi} \quad (\text{سانتی‌متر})$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$d_1 : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \theta_1 = m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta_1 = 30^\circ$$

$$d_2 : y = \sqrt{3}x + 1 \Rightarrow \tan \theta_2 = m_2 = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow |\theta_2 - \theta_1| = 30^\circ$$

(ریاضیات ۲- مذکور: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)

 ۱ ۲ ۳ ۴

(علی شورابی)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC)\sin \alpha \Rightarrow r = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{r}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{0^\circ < \alpha < 90^\circ} \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A}' = \sin(\alpha + 45^\circ) = \sin \alpha \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos \alpha$$

$$= \frac{r}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{r}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}(A'B')(A'C')\sin \hat{A}' = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 5 \times \frac{r\sqrt{2}}{10} = r$$

(ریاضیات ۲- مذکور: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۲)

 ۱ ۲ ۳ ۴

دوره تناوب تابع برابر ۴ است، پس داریم:

$$y = a \cos bx \quad (a, b \neq 0), T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4 = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\Rightarrow |b| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{2}$$

ضمناً با توجه به شکل مقدار ماکزیمم تابع ۲ و مقدار مینیمم آن ۲ - است،

پس:

$$|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

در نتیجه با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌های (۲) یا (۴) می‌توانند صحیح باشند.

در گزینه (۴) داریم:

$$y = 2 \cos\left(-\frac{\pi x}{2}\right) = 2 \cos\frac{\pi x}{2}$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$$

در حالی که طبق شکل به ازای $x = 0$ $y = -2$ داریم، پس گزینه (۴)

صحیح نیست.

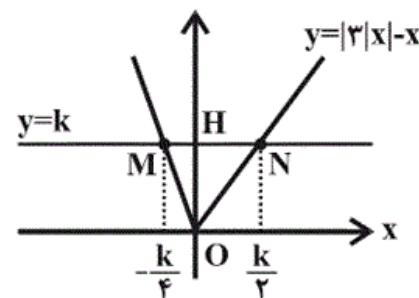
(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

۴

۳

۲ ✓

۱



واضح است برای اینکه مثلث ایجاد شود، باید $k > 0$ باشد؛ بنابراین با توجه

به شکل داریم:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |MN| |OH| \Rightarrow S(k) = \frac{3}{8} k^2; k > 0$$

(ریاضیات ۲ - توابع فاصل - نامعارله و تعیین علامت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۴

۳

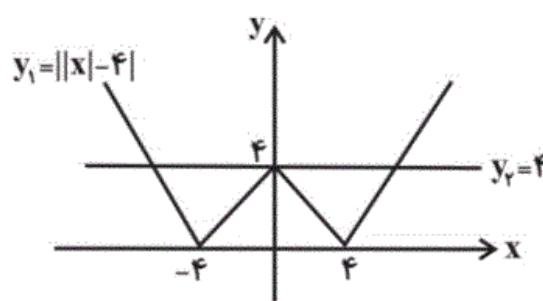
۲ ✓

۱

ابتدا نمودار $y_1 = ||x| - 4|$ را رسم کرده، سپس نمودار $y_2 = 4$ را رسم

می‌کنیم. با توجه به شکل، این دو نمودار در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند.

بنابراین معادله سه جواب دارد.



(ریاضیات ۲ - توابع فاصل، نامعارله و تعیین علامت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۴

۳

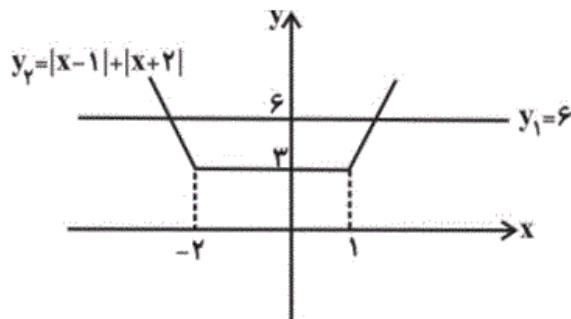
۲

۱ ✓

$$f(x) = \sqrt{|x-1| + |x+2| - 6}$$

$$|x-1| + |x+2| - 6 \geq 0 \Rightarrow |x-1| + |x+2| \geq 6$$

نمودارهای $y_1 = 6$ و $y_2 = |x-1| + |x+2|$ را رسم می‌کنیم.



باید مقادیری از x را بیابیم که به ازای آنها $y_1 < y_2$ باشد.

اگر $-2 < x < 1$ باشد، همواره $y_2 < y_1$ است، بنابراین $\{x \in \{-1, 0\}\}$.

اگر $x \geq 1$ باشد، $y_2 = 2x + 1$ ، بنابراین داریم:

$$y_2 < y_1 \Rightarrow 2x + 1 < 6 \Rightarrow x < 2.5 \xrightarrow[x \in \mathbb{Z}]{x \geq 1} x \in \{1, 2\}$$

اگر $-2 \leq x$ باشد، $y_2 = -2x - 1$ ، بنابراین داریم:

$$-2x - 1 < 6 \Rightarrow -2x < 7 \Rightarrow x > -3.5 \xrightarrow{x \leq -2} x \in \{-3, -2\}$$

بنابراین ۶ مقدار صحیح $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ در دامنه تابع قرار نمی‌گیرد.

(ریاضیات ۲ - توابع خاص - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۴

۳

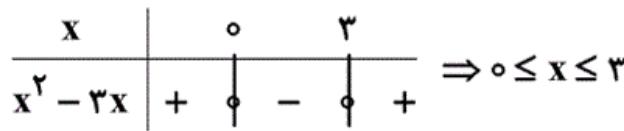
۲

۱ ✓

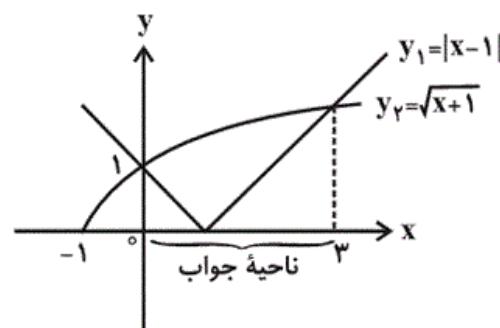
روش اول:

$$|x-1| \leq \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 - 2x + 1 \leq x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x \leq 0$$



روش دوم: به کمک رسم نمودار داریم:



(ریاضیات ۲ - توابع فاصلن - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سراسری فارج از کشور ریاضی - ۱۹)

- ۱۱۰

برای این‌که نمودار بالای محور x ها باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ \text{ضریب } x^2 > 0 \end{cases}$$

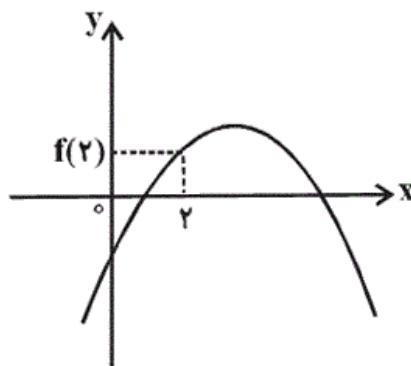
$$\Rightarrow \begin{cases} a - 4(a-1) < 0 \Rightarrow -4a^2 + 4a + 1 < 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 > 0 \\ a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a-2)(a+1) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -1 \xrightarrow{(1)} a > 2$$

(ریاضیات ۲ - توابع فاصلن - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با توجه به این که $a > 0$ است، نمودار تابع مانند نمودار شکل زیر خواهد بود.



بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$f(2) > 0 \Rightarrow -4 + 10 - 2^k > 0 \Rightarrow 2^k < 6 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 1, 2$$

تذکر: در ابتدا باید شرط $0 > \Delta$ را بررسی می‌کردیم، اما در این مسئله با

برقراری شرط $0 > f(2)$ ، شرط $0 > \Delta$ نیز برقرار می‌شود.

(ریاضیات ۲ - توابع فاصل - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 15$$

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_9 = 1065$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{10} + a_9) = 1080$$

از طرفی در هر دنباله حسابی داریم:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{10} + a_9$$

$$\Rightarrow 10(a_1 + a_n) = 1080 \Rightarrow a_1 + a_n = 108$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 2430 \Rightarrow \frac{n}{2}(108) = 2430 \Rightarrow n = 45$$

(حسابان - مهاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) \Rightarrow \frac{S_\lambda}{S_\varphi} = \frac{a_1 \left(\frac{1-q^\lambda}{1-q} \right)}{a_1 \left(\frac{1-q^\varphi}{1-q} \right)} = 1 + q^\varphi = 17$$

$$\Rightarrow q^\varphi = 16 \Rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow{\text{دنباله صعودی است}} q = 2$$

می‌دانیم که دنباله $\dots, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}$ نیز دنباله‌ای هندسی با جمله اول $\frac{1}{a_1}$ و

قدرنسبت $\frac{1}{q}$ است.

$$\Rightarrow S'_n = \frac{1}{a_1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{q}\right)} \right) \Rightarrow \frac{S'_\lambda}{S'_\varphi} = \frac{\left(\frac{1}{a_1}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda\right)}{\left(\frac{1}{a_1}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\varphi\right)}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^\varphi = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$$

(مسابان - محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱

۲

۳

۴

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\Delta^n} \Rightarrow S_{n+1} - S_n = \frac{1}{\Delta^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{\Delta^n} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{1}{\Delta} \\ a_3 = \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{\Delta}}{\frac{1}{\Delta}} = 1 \quad (1)$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{\Delta}}{\frac{1}{\Delta}} = 1 \Rightarrow a_1 = 1 \quad (2)$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \stackrel{(1), (2)}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{\Delta}} = \frac{\Delta}{\Delta-1} = \frac{\Delta}{4}$$

(حسابان - مماسیات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱

۲

۳

۴ ✓

باقي‌مانده تقسیم $1 + bx^3 + ax^6$ بر $x^3 + 1$ برابر ۱ است. بنابراین با توجه

به رابطه تقسیم داریم:

$$ax^6 + bx^3 + 1 = (x^3 + 1)Q(x) + 1$$

$$a(x^3)^2 + bx^3 + 1 = (x^3 + 1)Q(x) + 1$$

$$\xrightarrow{x^3 = -1} a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0 + 1$$

$$\Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \quad (*)$$

باقي‌مانده تقسیم $P(x) = x^2 + ax + 2b$ بر $x + 2$ برابر (-۲) است:

$$\begin{aligned} R &= P(-2) = (-2)^2 + a(-2) + 2b = 4 - 2a + 2b \\ \xrightarrow{(*)} \quad 4 - 2a + 2a &= 4 \Rightarrow R = 4 \end{aligned}$$

(حسابان - مهاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۸)

✓

چون نمودار تابع $y = x + f(x)$ از نقاط $(1, 0)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases} y = x + f(x) \xrightarrow{(1, 0)} 1 + f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = -1 \\ y = x + f(x) \xrightarrow{(2, 0)} 2 + f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = -2 \end{cases} \quad (1)$$

فرض کنیم خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$

به ترتیب $R(x) = ax + b$ و $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{cases} f(1) = a + b = -1 \\ f(2) = 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -x$$

(حسابان - مهاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۸)

✓

(مفتار، منصوری)

در بسط $(1 + \alpha x)^4$ که دارای ۵ جمله است، جمله وسط، جمله سوم است

که برابر است با $(\alpha x)^2 \times 1 \times 6$ و در بسط $(1 - \alpha x)^6$ که دارای ۷ جمله

است، جمله وسط، جمله چهارم است که برابر است با $(\alpha x)^3 \times 1 \times (-20)$.

بنابراین:

$$6\alpha^2 = -20\alpha^3 \Rightarrow 3 = -10\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{10}$$

(حسابان - مهاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱ ✓

(محمد باقر کرايه‌پيان)

$$\begin{aligned} \frac{t}{t-1} - \frac{1}{t+1} &= \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{t^2 + t - t + 1}{t^2 - 1} = \frac{1}{k} \\ \Rightarrow kt^2 + k &= t^2 - 1 \\ \Rightarrow t^2 &= -\frac{k+1}{k-1} \quad (1) \end{aligned}$$

برای این که معادله (۱)، یک جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$-\frac{k+1}{k-1} = 0 \Rightarrow k = -1$$

(ریاضیات ۲ - توابع فاصل - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱ ✓

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a}$$

چنانچه $\frac{1}{x''}$ و $\frac{1}{x'}$ ریشه‌های معادله مطلوب باشند، داریم:

$$S = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x'} \cdot \frac{1}{x''} = \frac{1}{x'x''} = \frac{a}{c} \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{c}\right)x + \frac{a}{c} = 0 \\ &\Rightarrow cx^2 + bx + a = 0 \end{aligned}$$

بنابراین ریشه‌های معادله $x^2 - 7x - 1 = 0$ عکس ریشه‌های معادله مذکور

می‌باشند.

(حسابان - مماسات هبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

✓

۳

۲

۱

با توجه به معادله $x^2 - 6x + 1 = 0$ داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 6 \quad (1)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{\beta^2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \beta^2 + \alpha^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6^2 - 2 = 34$$

(مسابان) - مهاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷

 ۳ ۲ ۱ ۰

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \xrightarrow{a=2+E} S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2+E)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (4 + 4E + E^2)$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (4 + 4E) \Rightarrow S = \sqrt{3}(1+E)$$

از E^2 صرف نظر می‌کنیم. بنابراین:

$$S = \sqrt{3} + \sqrt{3}E \Rightarrow S = \sqrt{3} + E_1$$

(آمار و مدل‌سازی - اندازه‌گیری و مدل‌سازی: صفحه‌های ۹ تا ۱۳)

 ۳ ۲ ۱ ۰

سرشماری وقتی صورت گرفته است که تمام افراد جامعه آماری را مورد

مطالعه قرار دهیم.

(آمار و مدل‌سازی - جامعه و نمونه: صفحه ۱۸)

۴

۳

۲

۱

حجم آب یک تانکر، متغیر کمی پیوسته، تعداد نامه‌های یک صندوق، متغیر

کمی گستته و جنسیت افراد یک شهر، متغیر کیفی اسمی است.

(آمار و مدل‌سازی - متغیرهای تعدادی: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱

e کران بالای دسته چهارم و a کران پایین دسته اول است و اختلاف

آنها، برابر طول دسته‌های اول تا چهارم است، یعنی داریم:

$$e - a = 4x = 4 \times \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱

$$\text{زاویه قدیم} = \text{زاویه جدید} - 18^\circ$$

$$\text{زاویه قدیم} = \frac{f_2}{n} \times 360^\circ = \frac{6}{15} \times 360^\circ = 144^\circ$$

بنابراین زاویه جدید در نمودار دایره‌ای برابر 126° است.

$$\text{زاویه جدید} = \frac{f'_2}{n'} \times 360^\circ = 126^\circ = \frac{f'_2}{20} \times 360^\circ \Rightarrow \frac{f'_2}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\Rightarrow f'_2 = 7$$

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۳)

- نمودارها و تحلیل داده‌ها: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۵

۴

۳

۲✓

۱

می‌دانیم که مساحت زیر نمودار مستطیلی تعدادی داده آماری، برابر مساحت

زیر نمودار چندبر فراوانی آن داده‌ها است. از طرفی اختلاف بین مركزهای دو

دستهٔ متوالی در نمودار چندبر فراوانی، برابر طول دسته‌ها در نمودار مستطیلی

است. پس داریم:

$$\text{طول دسته‌ها در نمودار مستطیلی} = 6 - 2 = 4$$

$$\text{فراوانی کل} \times \text{طول دسته‌ها} = \text{مساحت زیر نمودار مستطیلی}$$

$$\Rightarrow \text{فراوانی تجمعی دسته آخر} = \text{فراوانی کل داده‌ها} = 9$$

(آمار و مدل‌سازی - نمودارها و تحلیل داده‌ها: صفحه‌های ۸۲ تا ۹۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

طبق قضیه صفحه ۱۲۸ کتاب درسی، اگر \bar{x} میانگین داده‌های x_1, \dots, x_n باشد، آنگاه $a\bar{x} + b$ میانگین داده‌های $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$ است.

بنابراین اگر x_1, \dots, x_n ، اولین بیست عدد فرد طبیعی باشند، آنگاه اولین

بیست عدد زوج طبیعی به صورت $x_1 + 1, \dots, x_{20} + 1$ خواهند بود و در نتیجه

میانگین آن‌ها، یک واحد بیشتر از میانگین اولین بیست عدد فرد طبیعی

است.

(آمار و مدل‌سازی - شاخص‌های مرکزی: صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا مقدار x را با استفاده از دامنه تغییرات حساب می‌کنیم:

$$2 + 7x = 30 \Rightarrow x = 4$$

$$Q_3 = 2 + 4x \xrightarrow{x=4} Q_3 = 18$$

چارک سوم انتهای جعبه است.

(آمار و مدل‌سازی - شاخص‌های مرکزی: صفحه‌های ۱۲۰ و ۱۲۱)

۴

۳

۲

۱

برای داده‌های ۸، ۶، ۴، ۲، ۰، میانگین برابر $\bar{x}_1 = 4$ و برای داده‌های

۱۰، ۸، ۶، ۴، ۲، میانگین برابر $\bar{x}_2 = 6$ است، پس داریم:

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}} \xrightarrow{\sigma_1 = \sigma_2} \frac{CV_2}{CV_1} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

(آمار و مدل‌سازی - شاخص‌های پراکندگی: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱

چون انحراف معیار داده‌ها برابر صفر است، پس داده‌ها همگی با هم برابرند و

چون میانگین آن‌ها برابر ۵ است، پس همه داده‌ها برابر ۵ می‌باشند.

$$\begin{cases} 2a - 1 = 5 \Rightarrow a = 3 \\ 3b + 11 = 5 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{3-2+1}{3} = \frac{2}{3} \\ 4c + 1 = 5 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2}{3} = \frac{(3 - \frac{2}{3})^2 + (-2 - \frac{2}{3})^2 + (1 - \frac{2}{3})^2}{3}$$

$$= \frac{(\frac{7}{3})^2 + (-\frac{8}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2}{3} = \frac{49 + 64 + 1}{27} = \frac{114}{27} = \frac{38}{9}$$

(آمار و مدل‌سازی - شاخص‌های مرکزی: صفحه ۱۳۵)

- شاخص‌های پرآندرگی: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۶ -

✓

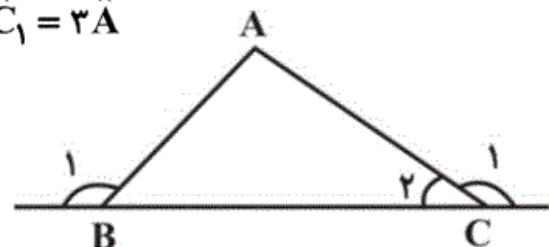
۳

۲

۱

$$\begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 2\hat{A} \\ \hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 2\hat{A}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



(هندسه ا- هندسه و استدلال: صفحه ۱۱۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(نوید مبیدی)

طبق تمرین ۱۲ صفحه ۱۴ کتاب درسی، در چهارضلعی AMNP می‌توان

نوشت:

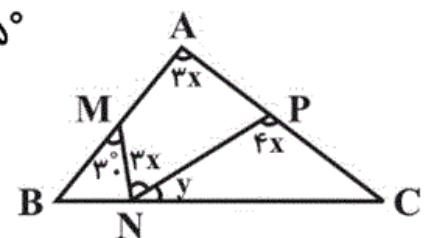
$$4x + 30^\circ = 3x + 3x \Rightarrow 2x = 30^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 3 \times 15^\circ = 45^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

طبق فرض مسئله $\hat{B} - \hat{C} = 25^\circ$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 135^\circ \\ \hat{B} - \hat{C} = 25^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = 80^\circ, \hat{C} = 55^\circ$$

$$\Delta NPC: y + 4x + \hat{C} = 180^\circ$$



$$\Rightarrow y = 180^\circ - 4 \times 15^\circ - 55^\circ = 65^\circ$$

(هندسه ا- هندسه و استدلال: صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

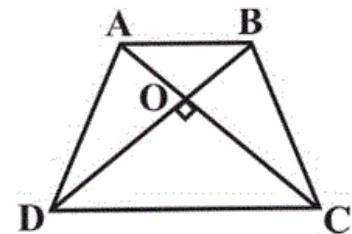
می‌دانیم در ذوزنقه متساوی الساقین، طول دو قطر برابر است. اگر طول قطر

را L فرض کنیم، داریم:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{OA \times BD}{2} + \frac{OC \times BD}{2}$$

$$= \frac{BD \times (OA + OC)}{2} = \frac{BD \times AC}{2}$$



$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{L \times L}{2} = 18 \Rightarrow L = 6$$

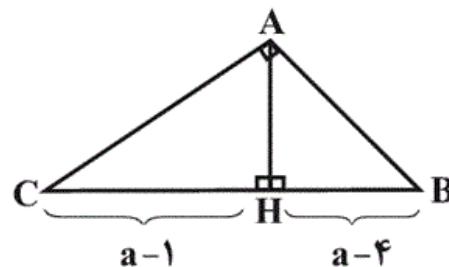
(هنرسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۰)

۴

۳

۲ ✓

۱



طول ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی طول دو قطعه پدید آمده روی وتر

است، پس داریم:

$$AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow (3\sqrt{6})^2 = (a-1)(a-4)$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a - 50 = 0 \Rightarrow (a-10)(a+5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ a = -5 \end{cases}$$

غ.ق.ق

$$\Rightarrow \begin{cases} CH = 10 - 1 = 9 \\ BH = 10 - 4 = 6 \end{cases}$$

کوچکترین مثلث قائم‌الزاویه در شکل، مثلث AHB است و داریم:

$$S_{\triangle AHB} = \frac{BH \times AH}{2} = \frac{6 \times 3\sqrt{6}}{2} = 9\sqrt{6}$$

(هندرسه - مساحت و تفہیہ فیثاغورس: صفحه‌های ۱۴ و ۶۵)

۱

۲

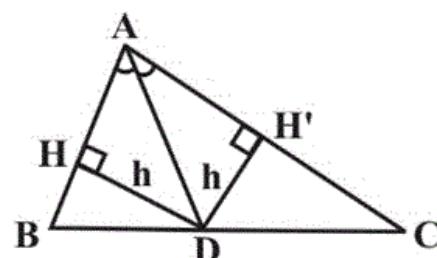
۳

۴

مجموع مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD برابر مساحت

مثلث ABC است.

چون D روی نیمساز زاویه A قرار دارد، پس $DH = DH' = h$ است. داریم:



$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AB \times DH + \frac{1}{2} AC \times DH' \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times h + \frac{1}{2} \times 6 \times h = 5h \Rightarrow 10 = 5h \Rightarrow h = 2 \end{aligned}$$

- هندسه - هندسه و استدلال: تمرین ۲۰ صفحه ۲۷

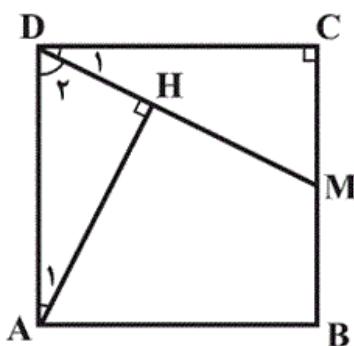
مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۶ (۱۴۶)

۱

۲

۳ ✓

۴



مطابق شکل، ارتفاع AH وارد بر پاره خط DM را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم الزاویه AHD و DCM متشابه‌اند (زوایای 1 و \hat{D}_1 هر دو متمم زاویه \hat{D}_2 هستند، پس $\hat{H} = \hat{C} = 90^\circ$ و از طرفی $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ است)، لذا داریم:

$$\frac{AH}{DC} = \frac{AD}{DM}, DC = AD = \sqrt{5}$$

$$DM = \sqrt{DC^2 + CM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{25}}{2}} \Rightarrow AH = 2$$

(هنرسه ا - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

✓

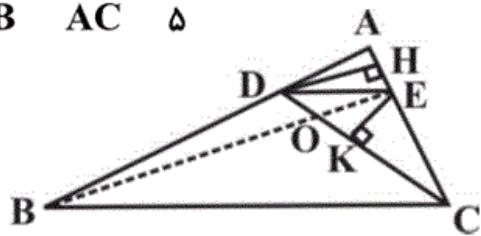
۳

۲

۱

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تممیم قضیه تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta DEC}} = \frac{\frac{1}{2} \times DH \times AE}{\frac{1}{2} \times DH \times EC} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{4} \quad (*)$$

به دلیل موازی بودن DE و BC ، مثلثهای OBC و ODE متشابه

هستند و در نتیجه داریم:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{DE}{BC} \xrightarrow{\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}} \frac{OD}{OC} = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{OD}{OD+OC} = \frac{1}{1+5} \Rightarrow \frac{OD}{CD} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{S_{\Delta DEO}}{S_{\Delta DEC}} = \frac{\frac{1}{2} EK \times OD}{\frac{1}{2} EK \times CD} = \frac{OD}{CD} = \frac{1}{6} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta DEO}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(هنرمه - تشابه: صفحه‌های ۷۷ و ۸۳)

۳ ✓

۲

۱

اگر اندازه یال مکعب را a بگیریم، آنگاه داریم:

$AB = BC = AC = a\sqrt{2}$ \Rightarrow مثلث ABC متساوی الاضلاع است

$$\text{مساحت کل مکعب} = 6a^2 = 108 \Rightarrow a^2 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{(3\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

(هنرسه ا - شکل های فضایی: صفحه های ۱۰ تا ۱۶)

۴

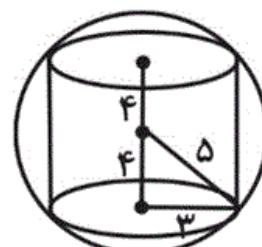
۳

۲

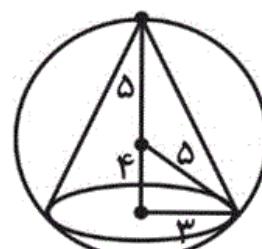
۱ ✓

همان طور که در شکل زیر دیده می شود، ارتفاع استوانه برابر ۸ است.

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi \times 9 \times 8 = 72\pi : \text{حجم استوانه}$$



همچنین با توجه به شکل زیر ارتفاع مخروط برابر $9 + 4 = 13$ است.



$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h' = \frac{1}{3} \pi \times 9^2 \times 9 = 27\pi : \text{حجم مخروط}$$

$$V_1 - V_2 = 72\pi - 27\pi = 45\pi$$

(هنرسه ا - شکل های فضایی: صفحه های ۱۳ تا ۱۶)

۴

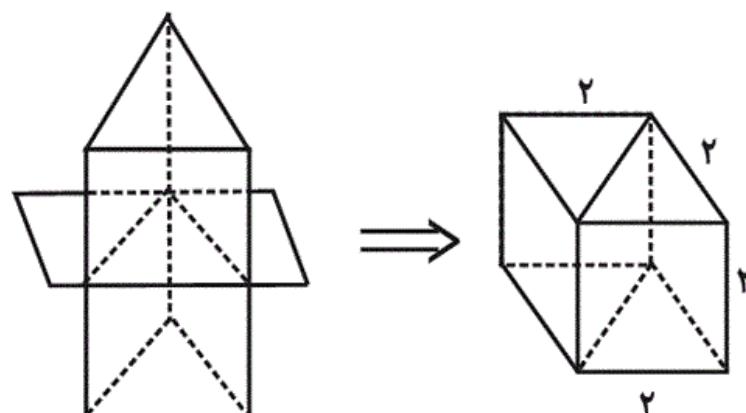
۳ ✓

۲

۱

شکل حاصل، منشور قائمی به ارتفاع دو واحد است که قاعده‌های آن لوزی با

طول ضلع ۲ واحد هستند، پس داریم:



$$\text{مساحت جانبی} = 4 \times (2 \times 2) = 16$$

$$\text{مساحت دو قاعده} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \right) = 2\sqrt{3} \Rightarrow 4\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت کل} = 16 + 4\sqrt{3}$$

(هنرمه ۱ - شکل های فضایی: صفحه های ۱۷ تا ۲۰)

۴

۳

۲

۱ ✓