



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، آشنایی بیشتر با تابع - ۲ سوال

۸۴- اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مساوی باشند، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & ; x \neq 3 \\ x - 3 & ; x = 3 \end{cases}, \quad g(x) = 2x + b$$

۲ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۸۲- ماشین f به عنوان ورودی، عددی حقیقی را قبول و آن را a برابر کرده و سپس b واحد به آن اضافه می‌کند. اگر به ازای اعداد ۲- و ۳ به ترتیب خروجی‌های ۱ و ۱۱ را بدهد، ab کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۸ (۳)

۶ (۲)

۱۰ (۱)

حسابان ۱، انواع تابع - ۴ سوال

۸۳- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & ; x > 0 \\ \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$ از کدام نواحی عبور می‌کند؟

۴) دوم و چهارم

۳) سوم و چهارم

۲) اول و سوم

۱) اول و دوم

۸۱- کدام گزینه نمی‌تواند هم دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$ باشد؟

۴) $(2, +\infty)$

۳) $[2, +\infty)$

۲) $(0, +\infty)$

۱) $[0, +\infty)$

۹۳- اگر $4 = [3x+2]$ باشد، مقدار $[2x+3]$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

۹۵- دامنه تابع گویای $f(x) = \frac{x^2 + 3 + \frac{1}{x}}{x^2 + 6x + k}$ به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{a, b\}$ است. مقدار $|k+a+b|$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

حسابان ۱، وارون تابع - ۳ سوال

۹۶- اگر دامنه و برد تابع یک به یک f برابر با \mathbb{R} و جواب نامعادله $f(x) \leq x$ به صورت $(-\infty, +\infty)$ باشد، دامنه عبارت $\sqrt{f^{-1}(x)} - f(x)$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 4]$ (۲) $[-4, 4]$ (۳) $[4, +\infty)$ (۴) قابل محاسبه نمی باشد.

۹۴- اگر تابع $f(x) = ax + 2$ با وارونش در بیش از یک نقطه تقاطع داشته باشند، مقدار $f^{-1}(3)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

۸۵- اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، نمودار تابع $g(x) = ax + b$ محور طولها را در چه نقطه‌ای قطع می کند؟

- (۱) $(3, 0)$ (۲) $(-\frac{3}{2}, 0)$ (۳) $(-3, 0)$ (۴) $(\frac{3}{2}, 0)$

حسابان ۱، اعمال روی توابع - ۷ سوال

۸۶- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ باشد، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

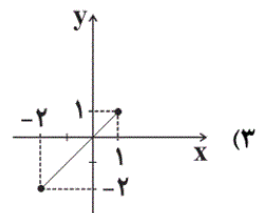
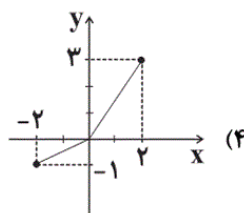
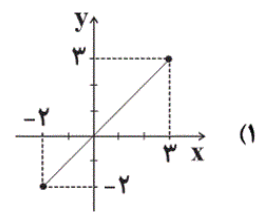
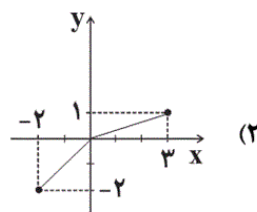
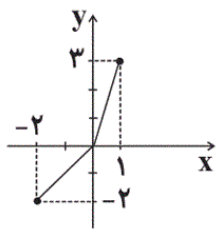
- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - \{0\}$

۸۷- توابع $f = \{(-1, 4), (2, 0), (-3, \frac{3}{2})\}$ و $g = \{(0, \frac{3}{2}), (2, -1), (-1, 1)\}$ مفروض اند. مجموع همه مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های

مرتب تابع $\frac{1}{2}f - 3g^2$ کدام است؟ ($g \cdot g = g^2$)

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

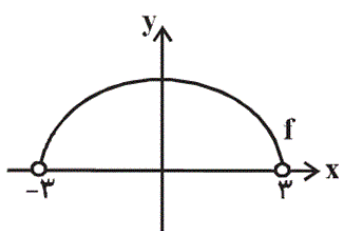
۹۰- نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ به شکل روبه‌رو است. نمودار تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ کدام است؟



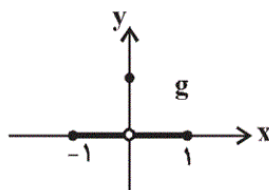
۹۲- توابع $f = \{(0, 1), (-1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$ و $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ مفروض اند. اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = f(0)$ باشد، کدام است a ؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۷- اگر $f(x) = 8x^3 - 1$ و $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، مقدار $(f+g)(-1)$ کدام است؟
 -۶ (۱) -۷ (۲) -۸ (۳) -۹ (۴)



۹۹- اگر نمودارهای f و g به صورت زیر باشند، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۱۰۰- اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = x + [x]$ آن گاه برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)
 (۰, +∞) (۱) ℝ (۲) [۰, ۱) (۳) (۰, ۱) (۴)

حسابان ۱، تابع نمایی - ۴ سوال

۹۸- اگر نقطه (a, b) محل تلاقی نمودارهای دو تابع $y = 9\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{4x} + 1$ و $y = 12\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۱- تحت شرایط ایده آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت نصف می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد. جرم توده پس از ۲۰ ساعت چند برابر جرم توده پس از ۱۰ ساعت است؟

- $\frac{1}{2^{10}}$ (۱)
- 2^{10} (۲)
- 2^8 (۳)
- $\frac{1}{2^8}$ (۴)

۸۸- اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادله توانی $4^{2x-1} \geq \frac{1}{1024}$ و $9^{2x+2} < 81^2$ ، چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟
 ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۸۹- کدام خط، نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2^x & ; x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x > 0 \end{cases}$ را در نقاط بیش‌تری قطع می‌کند؟

- $y = 0$ (۱)
- $y = \frac{1}{2}$ (۲)
- $y = 1$ (۳)
- $y = 2$ (۴)

هندسه ۲، تبدیل‌های هندسی - ۳ سوال

الف) بازتاب نسبت به خط، فقط یک نقطه ثابت تبدیل منحصر به فرد دارد.

ب) هر چندضلعی و تصویر آن تحت یک تبدیل طولیا، با هم هم‌نهشت هستند.

پ) شیب یک خط، تحت بازتاب نسبت به هر خط همواره تغییر می‌کند.

۳ (۴)

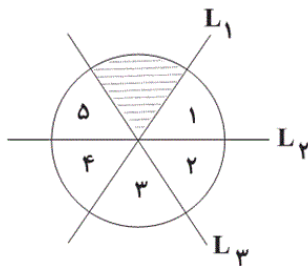
۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۰۸- ترکیب کدام بازتاب‌ها به ترتیب از راست به چپ، قطاع هاشور خورده را در جایگاه «۲» قرار نمی‌دهد؟ (قطاع‌ها با هم برابر بوده و خطوط L_1 ،

L_2 و L_3 در مرکز دایره هم‌رس‌اند.)



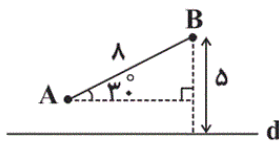
L_2 و L_1 (۱)

L_1 و L_3 (۲)

L_1 و L_2 (۳)

L_3 و L_2 (۴)

۱۰۹- در شکل زیر، بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d را A' و B' می‌نامیم. مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ کدام است؟



$12\sqrt{3}$ (۱)

$24\sqrt{3}$ (۲)

$36\sqrt{3}$ (۳)

$48\sqrt{3}$ (۴)

هندسه ۲، چندضلعی محاطی و محیطی - سوال ۷ -

۱۱۰- پاره خط AB به طول $4\sqrt{2}$ با خط d ، زاویه 45° می‌سازد و نقطه A روی خط d واقع است. اگر B' بازتاب نقطه B نسبت به خط d باشد،

شعاع کوچک‌ترین دایره محاطی خارجی مثلث ABB' کدام است؟

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۴ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۱۰۱- سه نیمساز داخلی یک چهارضلعی همسرس‌اند. اگر اندازه‌های اضلاع آن $AB = 3a - 4$ ، $BC = 5a - 6$ ،

$AD = a^2 + 2$ و $CD = 6a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۰۲- یک ۱۲ ضلعی منتظم بر دایره‌ای به شعاع ۱ واحد محیط شده است. محیط این ۱۲ ضلعی منتظم کدام است؟

$24 \tan 15^\circ$ (۴)

$12 \tan 15^\circ$ (۳)

$12 \sin 15^\circ$ (۲)

$24 \sin 15^\circ$ (۱)

۱۰۳- یک دوزنقه متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۴ و ۱۶ واحد، محیطی است. اندازه شعاع دایره محاطی آن کدام است؟

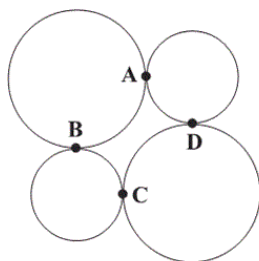
۶ (۴)

$4\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۲)

۴ (۱)

۱۰۴- مطابق شکل، چهار دایره در چهار نقطه بر هم مماس‌اند. چهارضلعی‌ای که رئوس آن نقاط تماس دایره‌ها هستند، الزاماً چگونه است؟



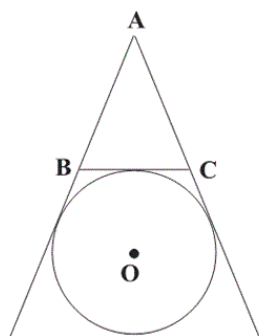
(۱) محیطی

(۲) محاطی

(۳) دوزنقه

(۴) متوازی‌الاضلاع

۱۰۵- در شکل زیر دایره (O, r) ، دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) است. اگر $h_a = 12$ باشد،



حاصل $\frac{r_c h_b}{r_c - h_b}$ کدام است؟ ($AB = c$ و $AC = b$ ، $BC = a$)

۴۰ (۱)

۳۰ (۲)

۲۰ (۳)

۱۵ (۴)

۱۰۶ - مساحت محدود بین دو دایره محیطی و محاطی داخلی مثلث متساوی الاضلاعی به محیط ۱۸ کدام است؟

۱۲π (۴)

۹π (۳)

۶π (۲)

۳π (۱)

آمار و احتمال ، مبانی احتمال - ۲ سوال

۱۱۵ - اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، حاصل $1 + P(B) - P(A) - P(B - A)$ همواره برابر کدام است؟

$P(A \cup B')$ (۴)

$P(A' \cap B)$ (۳)

$P(A \cap B')$ (۲)

$P(A' \cup B)$ (۱)

۱۱۶ - از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این عدد بر ۳ یا ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۱۲ بخش پذیر نباشد، کدام است؟

۰/۴۲ (۴)

۰/۴۸ (۳)

۰/۵۰ (۲)

۰/۵۶ (۱)

آمار و احتمال ، مجموعه - زیر مجموعه - ۳ سوال -

۱۱۱ - اگر $A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$ و $B \times C = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\}$

باشند، در این صورت مجموعه $(B \cup C) - A$ دارای چند زیرمجموعه می‌باشد؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۱۲ - اگر $A = [۲, ۴]$ و $B = \{۱, ۲\}$ باشند، نمودار ضرب دکارتی $A \times B$ چگونه است؟

(۲) دو پاره خط موازی محور y ها

(۱) چهار نقطه

(۴) سطح یک مستطیل

(۳) دو پاره خط موازی محور x ها

۱۱۳ - اگر $A = [-۱, ۱]$ و $B = \{-۱, ۱\}$ باشد، مساحت سطح محصور به نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

آمار و احتمال ، احتمال غیر هم شانس - ۲ سوال -

۱۱۷ - سه شناگر a ، b و c با هم مسابقه می‌دهند. شانس برنده شدن a و b مساوی یکدیگر و شانس برنده شدن هر کدام از آن‌ها دو برابر c است.

احتمال برد b یا c کدام است؟

$\frac{۴}{۵}$ (۴)

$\frac{۱}{۵}$ (۳)

$\frac{۲}{۵}$ (۲)

$\frac{۳}{۵}$ (۱)

۱۱۸ - تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال مشاهده هر عدد زوج، k برابر احتمال مشاهده هر عدد فرد است. اگر در پرتاب این تاس، احتمال

رو شدن عددی اول، $\frac{5}{12}$ باشد، k کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

آمار و احتمال ، احتمال شرطی - ۲ سوال

۱۱۹ - در پرتاب ۳ تاس می‌دانیم که جمع اعداد رو شده ۷ است. احتمال این که هر سه عدد رو شده فرد باشند، کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

۱۲۰ - فوتبالیستی هر بار که به طرف دروازه شوت می‌کند، اگر روحیه خوبی داشته باشد، به احتمال ۷۰ درصد گل می‌زند، در غیر این صورت احتمال گل شدن شوت او ۴۰ درصد است. همچنین می‌دانیم اگر او در هر مرحله گلی بزند، در شوت بعدی روحیه خوبی دارد و در غیر این صورت، روحیه‌اش ضعیف خواهد شد. اگر بدانیم قبل از بازی روحیه خوبی داشته است، احتمال این که از سه شوت او، دقیقاً دو شوت آخر گل شود، کدام است؟

۰/۸۴ (۴)

۰/۰۵۴ (۳)

۰/۰۸۴ (۲)

۰/۲۱ (۱)

آمار و احتمال ، پیشامدهای مستقل و وابسته - ۱ سوال

۱۱۴ - در پرتاب یک تاس، چند پیشامد مانند A می‌توان تعریف کرد، به گونه‌ای که احتمال رخ دادن آن برابر با $\frac{1}{4}$ بوده و شامل عضو ۲ نباشد؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

-۸۴

(علی بهرمن‌پور)

چون $f(x)$ و $g(x)$ برابرند پس به ازای هر x ، مقدار دو تابع برابر است. حال به ازای دو مقدار $x=3$ و $x=0$ در تساوی، مقدار a و b را تعیین می‌کنیم.

$$f(3) = g(3) \Rightarrow 3b - 6 = 6 + b \Rightarrow b = 6$$

$$f(0) = g(0) \Rightarrow \frac{a}{3} = 6 \Rightarrow a = 18$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{18}{6} = 3$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۸۲

(یاسین سپهر)

با توجه به اطلاعات مساله، ضابطه f را تشکیل می‌دهیم. چون f هر عدد ورودی مانند x را a برابر کرده و سپس به آن b واحد اضافه می‌کند. پس: $f(x) = ax + b$ حال a و b را می‌یابیم:

$$f(-2) = 1 \Rightarrow a(-2) + b = 1 \Rightarrow -2a + b = 1$$

$$f(3) = 11 \Rightarrow a(3) + b = 11 \Rightarrow 3a + b = 11$$

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 3a + b = 11 \end{cases} \Rightarrow 3a + b - (-2a + b) = 11 - 1$$

$$\Rightarrow 5a = 10 \Rightarrow a = 2, \quad 3a + b = 11 \Rightarrow 6 + b = 11 \Rightarrow b = 5$$

$$\Rightarrow ab = 2 \times 5 = 10$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه ۴۰)

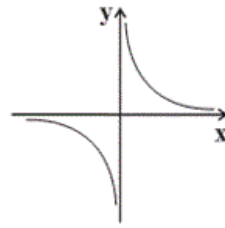
۴

۳

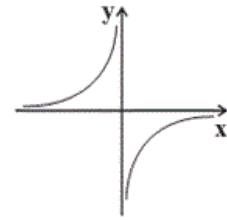
۲

۱ ✓

نمودار دو تابع $y = \frac{1}{x}$ و $y = -\frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم:

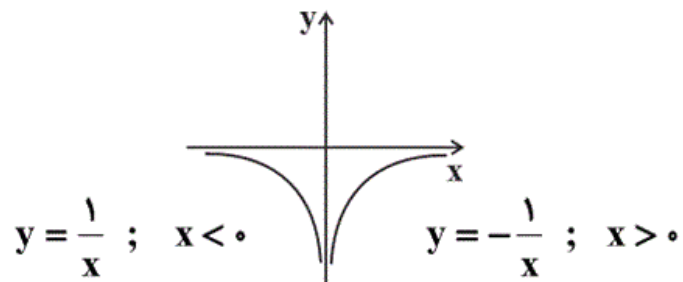


$$y = \frac{1}{x}$$



$$y = -\frac{1}{x}$$

حال نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



پس نمودار f از نواحی سوم و چهارم می‌گذرد.

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

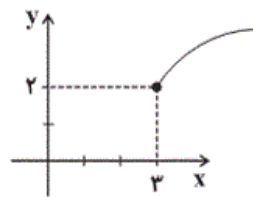
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

هر مجموعه دلخواه که شامل برد تابع می‌باشد هم‌دامنه است.



$$R_f = [2, +\infty)$$

پس تنها گزینه «۴» است که شامل برد تابع نیست.

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۳۸، ۳۹ و ۴۶ تا ۴۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی بهرمن‌پور)

$$[3x+2]=4 \Rightarrow 4 \leq 3x+2 < 5 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \leq 2x < 2 \Rightarrow \frac{13}{3} \leq 2x+3 < 5 \Rightarrow [2x+3]=4$$

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳

۲✓

۱

(علی شوراچی)

دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3 + \frac{1}{x}}{x^2 + 6x + k}$ ، عدد صفر را شامل نمی‌شود، پس یکی

از اعداد a و b برابر با صفر است. (مثلاً $a = 0$) با توجه به این که فقط یک عدد دیگر (b) در دامنه تابع f وجود ندارد، دو حالت به وجود می‌آید:

(۱) مخرج ریشه مضاعف دارد:

$$\Delta_{\text{مخرج}} = 0 \Rightarrow 36 - 4k = 0 \Rightarrow k = 9$$

حال مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا b به دست آید:

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow |k + a + b| = |9 + 0 + (-3)| = 6$$

(۲) مخرج دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها صفر است:

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 + 6(0) + k = 0 \Rightarrow k = 0$$

۴

۳

۲✓

۱

شرط دامنه تابع رادیکالی با فرجه زوج:

$$f^{-1}(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \geq f(x)$$

با توجه به این که $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند

x هایی که به ازای آن‌ها $f^{-1}(x)$ بالاتر از $y = x$ یا مساوی با آن

است، جواب سوال می‌باشند. در محدوده $(4, +\infty)$ خط $y = x$ بالاتر

از $f(x)$ یا مساوی با آن می‌باشد، پس $f^{-1}(x)$ هم بالاتر از $f(x)$ یا

مساوی با آن خواهد بود.

(مسابقه ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۹۴

(مهمد بصیرایی)

وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است. وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y = ax + 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{a} \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{x-2}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{2}{a}$$

اگر f و f^{-1} در بیش از یک نقطه برخورد داشته باشند، چون هر دو توابعی خطی هستند، باید بر هم منطبق باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow ax + 2 = \frac{1}{a}x - \frac{2}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \\ 2 = -\frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

پس ضابطه f و f^{-1} به صورت $f(x) = f^{-1}(x) = -x + 2$ درمی‌آید.

$$\Rightarrow f^{-1}(3) = -3 + 2 = -1$$

(مسابقه ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۸۵-

(امین قربانعلی پور)

رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مولفه‌های اول برابر نباشند.

با توجه به زوج مرتب‌های $(3, 2)$ و $(3, a^2 - a)$ ، برای تابع بودن باید $a^2 - a = 2$ باشد:

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 & \text{ق ق} \\ a = -1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید اگر $a = -1$ باشد، دو زوج مرتب $(-1, 4)$ و $(-1, 5)$ عضو f خواهند بود که قابل قبول نیست، پس $a = 2$ است. برای یک‌به‌یک بودن در دو زوج مرتب $(b, 2)$ و $(3, 2)$ ، باید $b = 3$ باشد.
پس:

$$g(x) = ax + b = 2x + 3 \xrightarrow{y=0} 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۴

۳

۲

۱

۸۶-

(علی شهرابی)

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

حالا با استفاده از تعریف، دامنه تابع $g \circ f$ را حساب می‌کنیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \neq 0\} = (0, +\infty)$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

(سعید مدیرفراسانی)

$$D_f \cap D_g = \{-1, 2\}$$

$$\left. \begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow \frac{1}{2}f - 3g^2 = \frac{1}{2}(4) - 3(1)^2 = -1 \Rightarrow (-1, -1) \\ x = 2 &\Rightarrow \frac{1}{2}f - 3g^2 = \frac{1}{2}(0) - 3(-1)^2 = -3 \Rightarrow (2, -3) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع همه مؤلفه‌ها} = -1 + (-1) + 2 + (-3) = -3$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سعید مدیرفراسانی)

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad , \quad x \in D_{f^{-1} \circ f}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} D_{f^{-1} \circ f} &= D_f = R_{f^{-1}} = [-2, 3] \\ R_{f^{-1} \circ f} &= D_{f^{-1} \circ f} = [-2, 3] \end{aligned} \right.$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\Rightarrow g(a) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{a-1} = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{a-1} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-1} = 4 \Rightarrow a = 16 + 1 = 17$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$f(x) = \lambda x^3 - 1 \Rightarrow f(g(x)) = \lambda g^3(x) - 1$$

$g(-1)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(g(-1)) = -1 \Rightarrow \lambda(g(-1))^3 - 1 = -1 \Rightarrow g(-1) = 0$$

مقدار $f + g$ را در $x = -1$ حساب می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow (f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-\lambda - 1) + 0 = -9$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$D_f = (-3, 3) \text{ و } D_g = [-1, 1]$$

$$D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_f \cap D_g = [-1, 1] \\ g(x) = 0 \Rightarrow x \in [-1, 1] - \{0\} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = [-1, 1] - ([-1, 1] - \{0\}) = \{0\}$$

پس دامنه تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عدد صحیح است.

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = g(x - [x]) = x - [x] + [x - [x]]$$

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ ، بنابراین:

$$[x - [x]] = 0 \Rightarrow g(f(x)) = x - [x]$$

برد این تابع بازه $(0, 1)$ است.

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳ و ۶۶ تا ۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۹۸

(علی بهرمن‌پور)

برای یافتن محل تلاقی، ضابطه دو نمودار را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$9 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{4x} + 1 = 12 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 \Rightarrow 9 \times \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\right]^{2x} + 1 = 12 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3$$

$$\Rightarrow 9 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 1 = 12 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 \Rightarrow t = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow 9t^2 + 1 = 12t - 3$$

$$\Rightarrow 9t^2 - 12t + 4 = 0 \Rightarrow (3t - 2)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -1$$

با جای‌گذاری $x = -1$ در یکی از معادلات داریم:

$$y = 12 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - 3 = 12 \times \left(\frac{2}{3}\right) - 3 = 5$$

در نتیجه محل تلاقی $(a, b) = (-1, 5)$ است؛ پس: $a + b = 4$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

$$f(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = \text{جرم توده پس از } t \text{ ساعت}$$

$$\Rightarrow \frac{f(20)}{f(10)} = \frac{100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{2^{10}}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی شهبازی)

$$4^{2x-1} \geq \frac{1}{1024} \Rightarrow 2^{4x-2} \geq 2^{-10} \Rightarrow 4x-2 \geq -10 \Rightarrow x \geq -2 \quad (1)$$

$$9^{2x+2} < 81^2 \Rightarrow 9^{2x+2} < 9^4 \Rightarrow 2x+2 < 4 \Rightarrow x < 1 \quad (2)$$

حال بین (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:

$$(1) \cap (2) = [-2, +\infty) \cap (-\infty, 1) = [-2, 1)$$

بازه $[-2, 1)$ شامل سه عدد صحیح -2 ، -1 و صفر می‌باشد.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

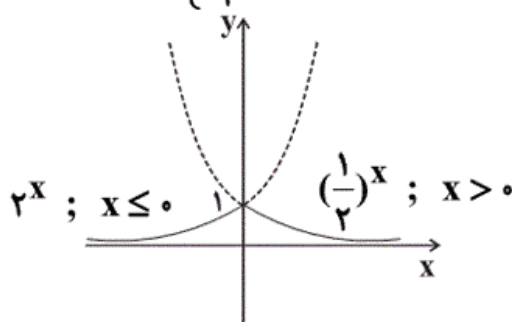
۴

۳

۲

۱ ✓

نمودار تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2^x & ; x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x > 0 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



خط‌های $y = 2$ و $y = 0$ نمودار f را قطع نمی‌کنند.

خط $y = 1$ در یک نقطه و خط $y = \frac{1}{2}$ در دو نقطه نمودار f را قطع می‌کنند.

پس خط $y = \frac{1}{2}$ در بین گزینه‌ها بیش‌ترین نقاط برخورد را با تابع f دارد.

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۰۷

(فرشاد فرامرزی)

بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد (صفحه ۳۸ کتاب درسی)؛ پس مورد «الف» نادرست است.

مورد «ب» درست است. (صفحه ۴۰ کتاب درسی)

اگر محور بازتاب موازی با خط یا عمود بر آن باشد، آن‌گاه شیب خط تحت بازتاب ثابت می‌ماند، پس مورد «پ» نادرست است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۳۴ تا ۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۰۸

(علیرضا نصرالهی)

بازتاب نسبت به خط L_2 ، قطاع هاشورخورده را در جایگاه (۳) و سپس بازتاب نسبت به خط L_1 ، آن را در جایگاه (۴) قرار می‌دهد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

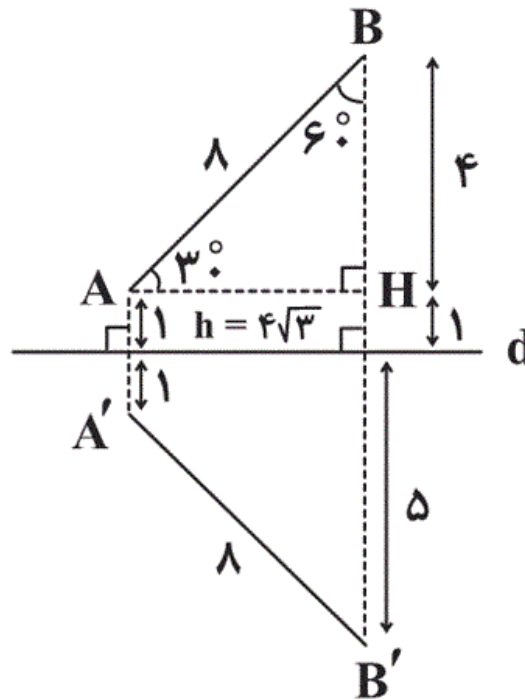
 ۲

 ۱

مطابق شکل، اگر A' و B' ، بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d باشند، آن گاه چهارضلعی $ABB'A'$ ، یک ذوزنقه متساوی الساقین است. مطابق شکل ارتفاع ذوزنقه (AH) ، در واقع ضلع روبه‌رو به زاویه 60° در مثلث

قائم‌الزاویه AHB است، پس $h = AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 4\sqrt{3}$ است و

داریم:



$$S = \frac{h(AA' + BB')}{2} = \frac{4\sqrt{3}(2 + 10)}{2}$$

$$= 24\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۴۰)

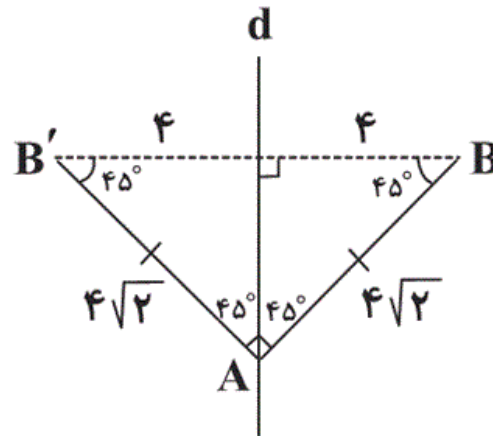
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مطابق شکل دو پاره خط AB و AB' برابر یکدیگرند و $\hat{B}AB' = 90^\circ$ می باشد. بنابراین مثلث ABB' قائم الزویه است و داریم:



$$P = 4 + 4\sqrt{2}$$

$$S = \frac{4 \times 4}{2} = 16$$

شعاع کوچک ترین دایره محاطی خارجی $r_b = \frac{S}{P - b} = \frac{16}{4} = 4$

(هندسه ۲- ترکیبی- صفحه های ۲۵، ۲۶ و ۳۷ تا ۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر سه نیمساز داخلی زوایای یک چهارضلعی هم رس باشند، آن گاه لزوماً نیمساز داخلی زاویه دیگر این چهارضلعی نیز از نقطه همرسی سه نیمساز دیگر عبور می کند و در نتیجه چهارضلعی محیطی است. در چهارضلعی محیطی ABCD داریم:

$$AB + CD = BC + AD$$

$$3a - 4 + 6a = 5a - 6 + a^2 + 2$$

$$9a - 4 = 5a + a^2 - 4 \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق} \\ a = 4 \end{cases}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه های ۲۵ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۰۲

(سجاد عابد)

اگر a طول هر ضلع n ضلعی منتظم محیط بر یک دایره به شعاع r باشد، داریم:

$$a = 2r \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$\text{محیط } ۱۲ \text{ ضلعی منتظم} = ۱۲a = ۱۲ \times (۲ \times ۱ \times \tan \frac{180^\circ}{12}) = ۲۴ \tan 15^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه ۳۰)

۴ ✓

۳

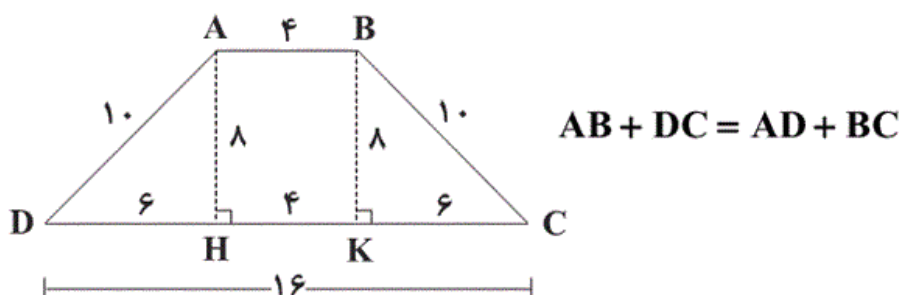
۲

۱

-۱۰۳

(رضا عباسی اصل)

فرض کنیم $ABCD$ ذوزنقه مفروض باشد، چون $ABCD$ محیطی است داریم:



$$\Rightarrow 4 + 16 = AD + BC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین } ABCD} AD = BC = 10$$

از A و B به DC عمود می‌کنیم، داریم:

$$HK = AB = 4, \quad DH = KC = \frac{16 - 4}{2} = 6$$

$$\Rightarrow \Delta BKC: BK^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow BK = 8$$

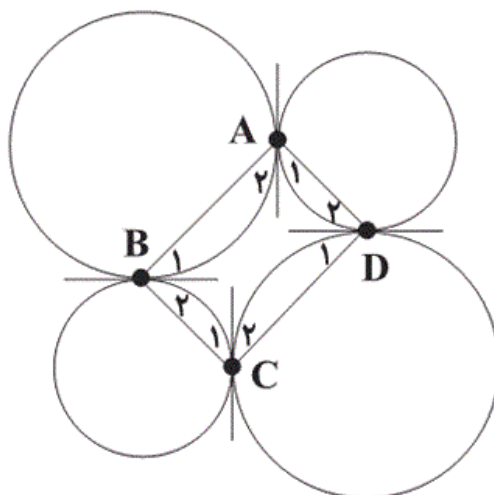
۴

۳

۲

۱ ✓

اگر مماس مشترک‌های داخلی هر دو دایره مماس خارج را رسم کنیم،
آن‌گاه مطابق شکل داریم:



$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{D}_2 = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{C}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \hat{C}_2 = \hat{D}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2} \end{array} \right.$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{(*)} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

ABCD الزاماً محاطی است.

(هندسه ۲- دایره- صفحه ۲۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم در مثلث ABC، روابط زیر برقرارند:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad , \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \quad (*)$$

از طرفی از آنجایی که مثلث مذکور، متساوی‌الساقین است، پس داریم:

$$b = c \Rightarrow \begin{cases} r_b = r_c \\ h_b = h_c \end{cases} \quad (**)$$

لذا با توجه به روابط (*) و (**) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{2}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{2}{h_b} \Rightarrow \frac{1}{h_b} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{h_a} \right)$$

□۴

□۳

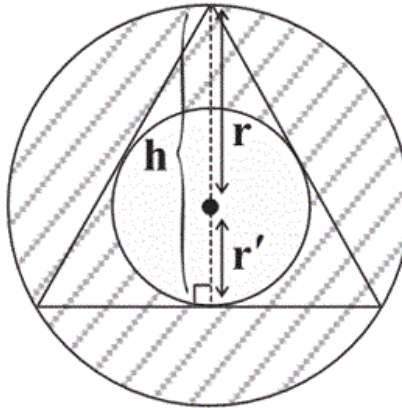
□۲

□۱✓

(ابراهیم نبفی)

 $a = 6$ (ضلع مثلث) \Rightarrow محیط مثلث متساوی الاضلاع = ۱۸ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع برابر $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ است که مطابق شکل

مجموع شعاع دو دایره محیطی و محاطی داخلی برابر اندازه این ارتفاع

است ($h = r + r'$). شعاع دایره محیطی $\frac{2}{3}$ ارتفاع و شعاع دایره محاطیداخلی $\frac{1}{3}$ ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع است.

$$a = 6 \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$r = \frac{2}{3}h \Rightarrow r = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \pi r^2 = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

$$r' = \frac{1}{3}h \Rightarrow r' = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \Rightarrow r' = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S' = \pi r'^2 = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

$$S \text{ هاشورخورده} = S - S' = 12\pi - 3\pi = 9\pi$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۲۹)

۴

۳✓

۲

۱

$$\begin{aligned}
 & 1 + P(B) - P(A) - P(B - A) \\
 &= 1 + P(B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
 &= 1 - (P(A) - P(A \cap B)) = 1 - P(A - B) \\
 &= P[(A - B)'] = P[(A \cap B)'] = P(A' \cup B)
 \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیر حسین ابومحبوب)

فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۳ و ۴ باشند. با توجه به این که $۱۲ = ۳ \times ۴$ است، پس پیشامد آن که عدد انتخابی بر ۳ یا ۴ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۱۲ بخش‌پذیر نباشد، معادل مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ است. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{\left[\frac{200}{3}\right] + \left[\frac{200}{4}\right] - \left[\frac{200}{12}\right]}{200} = \frac{66 + 50 - 16}{200} = \frac{100}{200}$$

با توجه به آن که $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ است، پس داریم:

$$P[(A \cup B) - (A \cap B)] = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{100}{200} - \frac{16}{200} = \frac{84}{200} = 0.42$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به ضرب دکارتی خواهیم داشت:

$$A = \{a\} \quad \text{و} \quad B = \{a, b, c\} \quad \text{و} \quad C = \{c, d\}$$

$$(B \cup C) - A = \{a, b, c, d\} - \{a\} = \{b, c, d\}$$

این مجموعه ۳ عضوی بوده و دارای $2^3 = 8$ زیر مجموعه می‌باشد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(حامد یهیی اوغلی)

اگر A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه ضرب دکارتی آن‌ها که آن را با

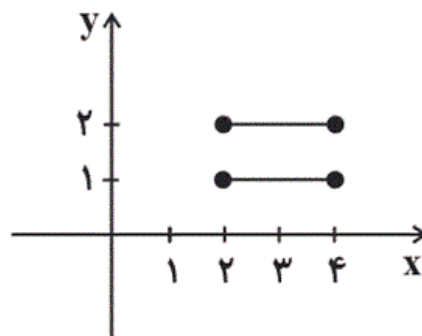
نماد $A \times B$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

در نتیجه داریم:

$$A \times B = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 4 \wedge (y = 1 \vee y = 2)\}$$

بنابراین نمودار $A \times B$ به صورت زیر است:



و لذا نمودار $A \times B$ به صورت دو پاره خط موازی محور x هاست.

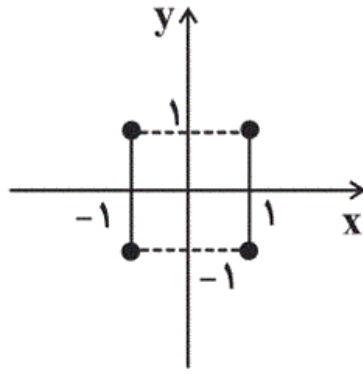
(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

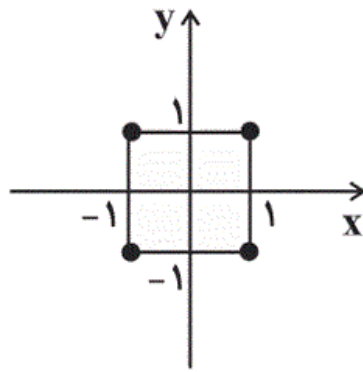
 ۲

 ۱



بنابراین نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ به صورت یک مربع به ضلع ۲

می‌باشد که مساحت سطح محصور به آن، برابر $2 \times 2 = 4$ است.



$(A \times B) \cup (B \times A)$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱

(سامان اسپهر)

-۱۱۷

$$P(a) = P(b) = 2x, \quad P(c) = x \Rightarrow 2x + 2x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$P(\{b, c\}) = P(b) + P(c) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱

$$\text{احتمال اول بودن} = P(\{2, 3, 5\}) = kx + x + x$$

$$= (k + 2)x = \frac{k + 2}{3(k + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{k + 2}{3(k + 1)} = \frac{5}{12} \Rightarrow 4k + 8 = 5k + 5 \Rightarrow k = 3$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱

-۱۱۹

(امیر هوشنگ فمسه)

تعداد حالاتی که مجموع اعداد رو شده سه تاس ۷ باشند، به صورت زیر

است:

$$B = \{(1, 2, 4), (1, 3, 3), (1, 1, 5), (2, 2, 3)\}$$

حالت ۶ حالت ۳ حالت ۳ حالت ۳

فقط در ۶ حالت، هر سه عدد رو شده فرد هستند، بنابراین اگر A

پیشامد رو شدن سه عدد فرد باشد، داریم:

$$P(A | B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴

۳

۲

۱

اگر پیشامد گل شدن شوت i ام را A_i بنامیم، داریم:

$$P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A'_1)P(A_2 | A'_1)P(A_3 | A'_1 \cap A_2)$$

$$= 0/3 \times 0/4 \times 0/7 = 0/084$$

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه کار در کلاس صفحه ۵۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مرتضی فویم علوی)

چون احتمال وقوع پیشامد A ، $\frac{1}{2}$ است، یعنی پیشامد A شامل ۳ برآمد

می‌باشد. حال باید این ۳ برآمد را طوری انتخاب کنیم که شامل عدد ۲

نشود (یعنی از میان اعداد ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶ باید ۳ عدد انتخاب کنیم). پس

تعداد حالت‌های ممکن برای مجموعه A برابر است با:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱