



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دیفرانسیل و انتگرال ، دنباله - 8 سوال -

۱۰۷- بزرگ‌ترین جمله دنباله  $a_n = \frac{n}{(n+2)(n+32)}$  کدام است؟

- ۰/۰۴ (۴)                      ۰/۰۳ (۳)                      ۰/۰۲ (۲)                      ۰/۰۱ (۱)

۱۰۸- دنباله بازگشتی  $p_{n+1} = -\frac{p_n}{1+p_n}$  با کدام جمله اول، یک دنباله هم صعودی و هم نزولی است؟

- ۳ (۴)                      ۳ (۳)                      -۲ (۲)                      ۲ (۱)

۱۰۹- کدام دنباله نزولی است؟

- (۱)  $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$                       (۲)  $\left\{ n - \frac{1}{n} \right\}$   
(۳)  $\left\{ \sqrt{n} - n^2 \right\}$                       (۴)  $\left\{ (\sqrt{2} - 1)^{-n} \right\}$

۱۱۰- کدام گزینه در مورد دنباله  $a_n = \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{2+5+8+\dots+(3n-1)}$  صحیح است؟

- (۱) صعودی و کران‌دار                      (۲) صعودی و بی‌کران  
(۳) نزولی و کران‌دار                      (۴) نزولی و بی‌کران

۱۱۱- به ازای مقادیر  $n \geq n_0$ ، فاصله اعداد دنباله  $\left\{ \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} \right\}$  از عدد همگرایی خود کوچک‌تر از  $\frac{1}{40}$  است، کوچک‌ترین مقدار  $n_0$

کدام است؟

- ۱۱ (۴)                      ۱۰ (۳)                      ۹ (۲)                      ۸ (۱)

۱۱۲- جملات دنباله  $\{a_n\}$  با جمله عمومی  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+3}} + 5 & n \text{ فرد;} \\ \frac{5n-7}{n+1} & n \text{ زوج;} \end{cases}$  برای هر  $n \geq M$  در نامساوی  $|a_n - 5| < 0/1$  صدق می‌کنند. کوچک‌ترین مقدار طبیعی  $M$  کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۵۱ (۳) ۱۱۹ (۴) ۱۲۰

۱۱۳- اگر  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+k}{n+1}\right)^n = e$  باشد،  $k$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)  $\frac{3}{2}$

۱۱۴- اگر  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دنباله‌های صعودی باشند، چند دنباله‌های زیر لزوماً صعودی است؟

- الف)  $\{a_n + b_n\}$  (۱) ب)  $\{a_n - b_n\}$  (۲) پ)  $\{a_n b_n\}$  (۳) ت)  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  (۴)

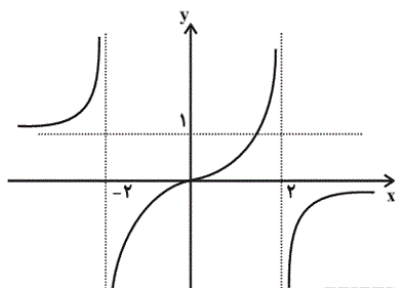
دیفرانسیل و انتگرال، حد - ۱۷ سوال -

۱۱۵- برای اثبات عدم وجود حد تابع  $f(x) = \cos \frac{2\pi}{x}$  در نقطه  $x=0$ ، اگر یکی از دنباله‌ها  $a_n = \frac{1}{n}$  باشد، دنباله دیگر کدام

نمی‌تواند باشد؟

- (۱)  $b_n = \frac{2}{2n-1}$  (۲)  $b_n = \frac{2}{2n+1}$   
(۳)  $b_n = \frac{4}{4n+1}$  (۴)  $b_n = -\frac{1}{n}$

۱۱۶- اگر نمودار  $y = f(x)$  به صورت روبه‌رو و  $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$  باشد،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(a_n))$  کدام است؟



- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)  $\infty$

۱۱۷- اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + kx + b} - 1}{x} = 3$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۱۱۸- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(1 + \cos x)}{\sin(\sin^2 x)}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳) صفر (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۱۹- تابع  $f(x) = ax - [ax]$  در بازه  $(0, a)$  دارای ۸ نقطه ناپیوستگی است. حدود  $a$  کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است).

- (۱)  $2 < a < 3$  (۲)  $2 < a \leq 3$   
(۳)  $\sqrt{8} < a \leq 3$  (۴)  $\sqrt{8} \leq a < 3$

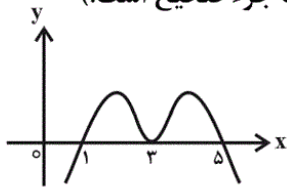
۱۲۰- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{|2x-3| - |2x+3|}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۳ (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴) وجود ندارد.

۱۲۱- تابع با ضابطه  $f(x) = \cos(\pi[\frac{x}{3}])$  در  $x = 3$  چگونه است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است).

- (۱) فقط پیوستگی راست دارد.  
(۲) فقط پیوستگی چپ دارد.  
(۳) پیوسته است.  
(۴) نه از راست پیوسته و نه از چپ پیوسته است.

۱۲۲- نمودار تابع  $f$  به صورت شکل زیر است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow \delta} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)}$  کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)



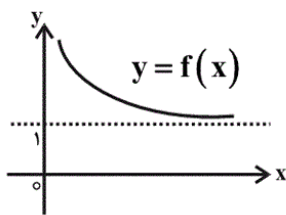
- (۱)  $+\infty$       (۲)  $-\infty$   
(۳) ۱          (۴) -۱

۱۲۳- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2+ax+b+1} = +\infty$  باشد،  $a+b$  کدام است؟

- (۱) -۶      (۲) ۸      (۳) -۲      (۴) ۲

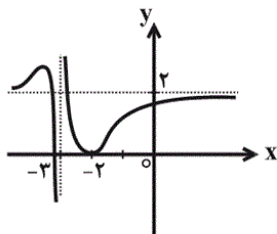
۱۲۴- مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ \frac{2}{1-x} \right]$  کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

- (۱)  $+\infty$       (۲)  $-\infty$   
(۳) صفر      (۴) -۲



۱۲۵- با توجه به نمودار تابع  $y=f(x)$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) -۱  
(۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $-\frac{1}{2}$



۱۲۶- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-x+1}{(f \circ f)(x) - 2}$  کدام است؟

- (۱)  $-\infty$       (۲)  $+\infty$   
(۳) ۱          (۴) ۲

۱۲۷- خط  $y = \frac{2}{3}$ ، معادلهٔ مجانب افقی تابع  $y = \frac{ax^f + 2x - 1}{(2a-1)x^f + 3}$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲  
(۳) -۱      (۴) -۲

۱۲۸- اگر  $x = -1$  تنها مجانب قائم تابع  $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^2 + ax + 1}$  باشد، محل برخورد مجانب‌های نمودار این تابع از مبدأ مختصات

چقدر فاصله دارد؟

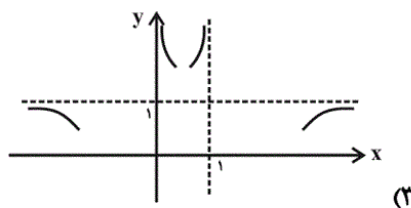
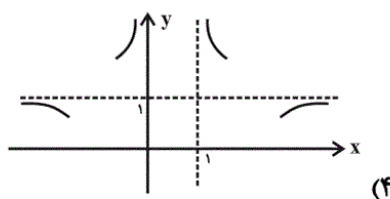
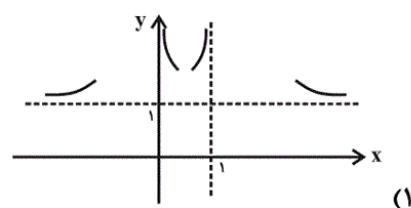
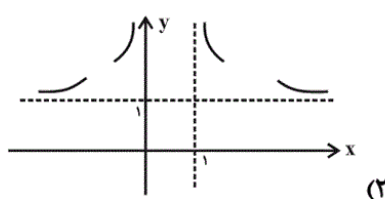
(۲)  $3\sqrt{2}$

(۱)  $2\sqrt{2}$

(۴)  $\sqrt{5}$

(۳)  $\sqrt{10}$

۱۲۹- کدام نمودار، قسمتی از نمودار تابع  $y = 2^{\frac{1}{x-x^2}}$  را در اطراف مجانب‌های آن نشان می‌دهد؟



۱۳۰- کدام خط مجانب مایل نمودار تابع  $f(x) = x\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}}$  است؟

(۲)  $y = x + 1$

(۱)  $y = x$

(۴)  $y = x - \frac{1}{2}$

(۳)  $y = x + \frac{1}{2}$

۱۰۱- بازه  $(\frac{b}{6}, 2a - 1)$ ، بازه‌ای متقارن به مرکز  $\frac{7}{3}$  و شامل ۴ عدد صحیح است. به ازای کدام مقدار  $b$ ، این بازه بیشترین شعاع ممکن را

دارد؟

(۴) ۸

(۳) ۲۸

(۲)  $\frac{31}{3}$

(۱) ۳۴

۱۰۲- اگر  $x$ ،  $y$  و  $z$  سه عدد حقیقی باشند، در اثبات «اگر  $x + z = y + z$  باشد، آن گاه  $x = y$ ». کدام یک از اصل‌های زیر استفاده نشده است؟

- (۱) خاصیت شرکت‌پذیری  
 (۲) وجود عضو همانی جمع  
 (۳) وجود عضو قرینه  
 (۴) منحصر به فرد بودن عضو قرینه

۱۰۳- اگر  $k$  عددی گنگ و مثبت باشد، کدام عدد همواره گنگ است؟

- (۱)  $\frac{2k^2 + 3}{k^2 + 1}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$   
 (۳)  $\frac{k}{k^2 - 1}$   
 (۴)  $\sqrt{k} - 3\sqrt[3]{k}$

۱۰۴- اگر کسر  $\frac{b}{11}$  دارای بسط اعشاری  $0.\overline{5a}$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۸  
 (۲) ۱۰  
 (۳) ۱۲  
 (۴) ۱۳

۱۰۵- اگر مجموعه جواب نامعادله  $\max\{(2x - 5), (5 - 2x)\} < 1$  یک بازه متقارن به مرکز  $a$  و شعاع  $r$  باشد،  $a + r$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴)  $\frac{7}{2}$

۱۰۶- اگر  $x > a > 0 > b > -x$  باشد، حاصل عبارت  $A = |x + a| + |x + b| - |x - a - b|$  کدام است؟

- (۱)  $x$   
 (۲)  $3x$   
 (۳)  $x + 2a + 2b$   
 (۴)  $x + 2a - 2b$

## هندسه‌ی تحلیلی، مقاطع مخروطی - 5 سوال

۱۳۶- مرکز دایره‌ی گذرنده از نقطه  $A(1, 2)$  روی خط  $x + 2y = 3$  قرار دارد و خط  $2x - y = 1$  بر دایره عمود است. شعاع این دایره

کدام است؟

- (۱) ۲  
 (۲)  $\sqrt{2}$   
 (۳) ۱  
 (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۱۳۷- دایره‌ای به معادله  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 28 = 0$  مفروض است. معادله خط شامل کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه  $A(1, 3)$  در

این دایره کدام است؟

(۲)  $x - 5y - 12 = 0$

(۱)  $x - 5y + 14 = 0$

(۴)  $5x + y + 6 = 0$

(۳)  $5x + y - 8 = 0$

۱۳۸- دایره  $C$  به مرکز  $O(1, -1)$ ، بر خط به معادله  $3x - 4y + 3 = 0$  مماس است. معادله ضمنی این دایره کدام است؟

(۲)  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

(۱)  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

(۴)  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

(۳)  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

۱۳۹- نقاط  $(3, 0)$  و  $(-3, 0)$  کانون‌های یک بیضی هستند. اگر نقطه  $(3, 2)$  روی این بیضی واقع باشد، خروج از مرکز آن کدام

است؟

(۲)  $\frac{\sqrt{10}-1}{3}$

(۱)  $\frac{\sqrt{10}-3}{3}$

(۴)  $\frac{\sqrt{10}-2}{3}$

(۳)  $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{3}}{3}$

۱۴۰- به ازای چه مقادیری از  $a$  معادله  $(a^2 - 5a + 6)y^2 + (a^2 - 4)x^2 + ay + bx - b^2 = 1$  نشانگر یک سهمی است؟

(۲)  $a = 2, -2$

(۱)  $a = 2, 3$

(۴)  $a = -2, -3$

(۳)  $a = -2, 3$

هندسه‌ی تحلیلی، بردار - 2 سوال



۱۳۲- اگر  $a+b+c=0$  و اندازه بردارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  به ترتیب برابر ۲، ۲ و ۴ باشد، حاصل  $a.b+b.c+c.a$  کدام است؟

(۱) -۱۲      (۲) -۸

(۳) ۸      (۴) ۱۲

۱۳۳- دو بردار  $(\sqrt{a}, -2, \sqrt{a})$  و  $(0, -4, 0)$  قطره‌های یک چهارضلعی هستند. اگر زاویه بین این دو بردار  $30^\circ$  و مساحت چهارضلعی

برابر ۴ باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) -۴      (۲) ۴

(۳) ۱۲      (۴) -۱۲

هندسه‌ی تحلیلی، **ماتریس، دترمینان و دستگاه** - 1 سوال -

۱۳۱- دترمینان کدام یک از ماتریس‌های زیر برابر با صفر نیست؟ ( $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ x & y & z \\ b & b & b \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

هندسه‌ی تحلیلی، **خط و صفحه** - 2 سوال -

۱۳۴- به ازای کدام مقدار  $m$ ، خطوط  $L_1: \frac{x+1}{2} = y = z-1$  و  $L_2: \frac{x}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{m}$  متقاطع‌اند؟

(۱) ۹      (۲) -۶

(۳) -۹      (۴) ۶

۱۳۵- مربع فاصله نقطه  $A(2,3,1)$  از خط  $L: \begin{cases} y+2z=3 \\ x=4 \end{cases}$  کدام است؟

۱/۸ (۱)

۲/۴ (۲)

۳/۶ (۳)

۴/۸ (۴)

### ریاضیات گسسته ، نظریه ی گراف - 4 سوال

۱۴۲- در یک گراف ساده،  $q = 32$  و  $\Delta = 4$  است. اگر مجموع درجات رئوس زوج این گراف برابر ۵۴ باشد، آنگاه تعداد رئوس درجه

فرد این گراف کدام نمی‌تواند باشد؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

۱۴۳- در گراف  $K_6$  که در آن  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  است، چند مسیر از رأس  $a$  به رأس  $b$  وجود دارد که رأس  $e$  عضوی از آن

مسیر نباشد؟

۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

۱۵ (۳)

۱۶ (۴)

۱۴۴- گراف  $G$  از مرتبه ۱۰ مفروض است. اگر  $a$  و  $b$  دو رأس از این گراف باشند به گونه‌ای که با حذف یال  $ab$ ، گراف ناهمبند

شود، آنگاه حداکثر اندازه گراف  $G$  کدام است؟

۱۰ (۱)

۳۷ (۴)

۳۶ (۳)

۲۱ (۲)

۱۴۵- گراف همبند  $G$  از مرتبه ۱۰ و فاقد دور است. اگر یکی از رئوس این گراف از درجه ۶ باشد، حداکثر چند رأس از درجه ۱ دارد؟

۶ (۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۱۴۶ - چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی مانده تقسیم ۹۶ بر هر یک از آنها، برابر ۶ باشد؟

۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۱۲ (۴)

۱۴۷ - چند عدد اول مانند  $p$  با خاصیت  $p \mid 30! + 13p$  وجود دارد؟

(۱) هیچ

(۲) ۸

(۳) ۱۰

(۴) بی شمار

۱۴۸ - اگر  $80[a, b] = 21(a^2 - b^2)$  و  $(a, b) = 2$  باشد، آنگاه  $b$  کدام است؟

(۱) ۷

(۲) ۱۴

(۳) ۶

(۴) ۱۰

۱۴۹ - به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، دو عدد  $7 + 11n$  و  $2 + 9n$  نسبت به هم اول اند؟

(۱) ۸۷

(۲) ۸۸

(۳) ۸۹

(۴) ۹۰

۱۵۰- اگر  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح باشند و معادله  $ax + by = 5$  در مجموعه اعداد صحیح جواب داشته باشد، آنگاه کدام یک از

معادلات سیاله زیر ممکن است در  $\mathbb{Z}$  جواب نداشته باشد؟

$$ax + by = a \quad (2)$$

$$ax + by = 10 \quad (1)$$

$$ax + by = 3ab \quad (4)$$

$$ax + by = 7 \quad (3)$$

ریاضیات گسسته، ترکیبات - 1 سوال -

۱۴۱- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد چهاررقمی با شرط «رقم یکان < رقم صدگان < رقم هزارگان» می توان نوشت؟

$$20 \quad (2)$$

$$35 \quad (1)$$

$$80 \quad (4)$$

$$60 \quad (3)$$

(ممدظاهر شعاعی)

$$a_n = \frac{n}{(n+2)(n+32)} = \frac{n}{n^2 + 34n + 64} = \frac{1}{n + 34 + \frac{64}{n}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{(\sqrt{n} - \frac{8}{\sqrt{n}})^2 + 16 + 34} = \frac{1}{(\sqrt{n} - \frac{8}{\sqrt{n}})^2 + 50}$$

بنابراین  $a_n$  وقتی ماکزیمم است که  $\sqrt{n} - \frac{8}{\sqrt{n}}$  برابر صفر شود یعنی  $n = 8$ ؛

که در این صورت  $a_8 = \frac{1}{50} = 0/02$  بزرگ‌ترین جمله دنباله است.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱

دنباله‌ای که هم صعودی و هم نزولی باشد، دنباله ثابت است. در دنباله ثابت،

تمامی جملات برابرند پس  $p_{n+1} = p_n$  داریم:

$$p_{n+1} = -\frac{p_n}{1+p_n} \Rightarrow p_n = -\frac{p_n}{1+p_n}$$

$$\xrightarrow{p_n=x} x(1+x) = -x$$

$$\Rightarrow x + x^2 + x = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, -2$$

با توجه به گزینه‌ها

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} p_n = -2 \Rightarrow p_1 = -2$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزینه «۱»: با نوشتن چند جمله اول مشخص می‌شود که دنباله، غیریکنوا است.

$$a_1 = \frac{1}{2} \nearrow a_2 = 1 \nearrow a_3 = \frac{9}{8} \searrow a_4 = 1$$

گزینه «۲»:

صعودی:  $n$

$$n \uparrow \Rightarrow \frac{1}{n} \downarrow \Rightarrow \frac{-1}{n} \uparrow \Rightarrow \frac{-1}{n} : \text{صعودی}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع دو دنباله صعودی}} n - \frac{1}{n} : \text{صعودی}$$

گزینه «۴»:

$$(\sqrt{2}-1)^{-n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^n = (\sqrt{2}+1)^n \xrightarrow{\sqrt{2}+1 > 1} \text{صعودی}$$

پس فقط گزینه «۳» می‌تواند صحیح باشد.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$n \geq 1 \Rightarrow 3n+1 \geq 4 \Rightarrow \frac{3n+1}{2} \geq 2$$

$$0 < \frac{2}{3n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{2}{3n+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{2}{3n+1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq a_n < 1$$

بنابراین دنباله کران‌دار است.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سراسری ریاضی فارج از کشور - ۸۸)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$$

$$\left| \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} - 2 \right| < \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{7}{3 + 2^{n-1}} < \frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow 3 + 2^{n-1} > 280 \Rightarrow 2^{n-1} > 277$$

$n$  عددی طبیعی است، توانی از ۲ را باید بگیریم که بزرگتر از ۲۷۷ باشد:

$$2^{n-1} \geq 2^9 \Rightarrow n-1 \geq 9 \Rightarrow n \geq 10$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$n \text{ فرد باشد: } \left| \frac{1}{\sqrt{n+3}} + 5 - 5 \right| < 0.1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+3}} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+3} > 10 \Rightarrow \sqrt{n} > 7$$

$$\Rightarrow n > 49 \xrightarrow{n \text{ فرد}} n = 51, 53, 55, \dots$$

$$n \text{ زوج باشد: } \left| \frac{5n-7}{n+1} - 5 \right| < 0.1 \Rightarrow \left| \frac{5n-7-5n-5}{n+1} \right| < 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow n+1 > 120 \Rightarrow n > 119 \xrightarrow{n \text{ زوج}} n = 120, 122, 124, \dots$$

بنابراین شماره جمله‌هایی که در نامساوی مفروض صدق می‌کنند به صورت

زیر است:

$$51, 53, 55, \dots, 117, 119, 120, 121, 122, 123, \dots$$

در نتیجه از جمله ۱۱۹م به بعد همگی در نامساوی گفته شده صدق می‌کنند.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+k}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{k-1}}\right)^{\frac{n+1}{k-1} \times n}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{(k-1)n}{n+1}} = e^{k-1} = e \Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

الف)  $\begin{cases} \{a_n\} \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \\ \{b_n\} \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n \end{cases} \xrightarrow{+} a_{n+1} + b_{n+1} \geq a_n + b_n$

$\Rightarrow \{a_n + b_n\}$  صعودی است.

دنباله‌های دیگر لزوماً صعودی نیستند؛ زیرا با فرض  $a_n = n^2$  و

$$b_n = -\frac{16}{n} \text{ داریم؛}$$

ب)  $a_n - b_n = n^2 + \frac{16}{n}$  غیریکنواست.

پ)  $a_n b_n = n^2 \times \frac{-16}{n} = -16n$  نزولی است.

ت)  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{-\frac{16}{n}} = -\frac{1}{16} n^3$  نزولی است.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کامپس سالاری)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{2\pi}{\frac{1}{n}} = \cos 2n\pi = 1$$

گزینه (۱):  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2}{2n-1}\right)$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{2\pi}{\frac{2}{2n-1}} = \cos(2n-1)\pi = -1$$

گزینه (۲):  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2}{2n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{2\pi}{\frac{2}{2n+1}}$

 ۴ ✓ ۳ ۲ ۱

(میلاد منصوری)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$  و چون دنباله صعودی است، یعنی  $a_n$  با مقادیر کم‌تر از ۲

به ۲ میل می‌کند.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(a_n)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(دیفرانسیل - ۵ و پیوستگی؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۸)

 ۴ ۳ ۲ ۱ ✓

وقتی  $x \rightarrow 0$ ، مخرج کسر به سمت صفر میل می‌کند و از طرفی حاصل حد هم برابر با ۳ است، پس می‌بایست صورت کسر نیز به صفر میل کند تا پس از رفع ابهام حاصل حد برابر با ۳ شود.

$$\sqrt{(0)^2 + k(0) + 1} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{b} - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x^2 + kx + 1} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{x^2 + kx + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + kx + 1} + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + kx + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + kx + 1} + 1)} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+k)}{x(\sqrt{0+0+1}+1)} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+k}{2} = 3 \Rightarrow \frac{k}{2} = 3 \Rightarrow k = 6$$

(مسابان - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۵۰ تا ۱۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(1 + \cos x)}{\sin(\sin^2 x)} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\sin(1 + \cos x)}{\cos(1 + \cos x)}}{\sin(\sin^2 x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{\sin(\sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sin(\sin^2 x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}}}{\sin^2 x \frac{\sin(\sin^2 x)}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(مسئله - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۵۰ تا ۱۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کازم ابلالی)

می‌دانیم تابع  $y = [ax]$  در نقاطی که  $ax$  عددی صحیح باشد، ناپیوسته است.

پس تابع  $y = ax - [ax]$  نیز در نقاطی که  $ax = k$  و  $k \in \mathbb{Z}$  باشد،

ناپیوسته است. یعنی تابع در نقاط  $\frac{1}{a}$ ،  $\frac{2}{a}$ ،  $\frac{3}{a}$  و ... ناپیوسته است. برای این

که در بازه  $(0, a)$  تعداد نقاط ناپیوستگی برابر ۸ باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{8}{a} < a \leq \frac{9}{a} \Rightarrow 8 < a^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{8} < a \leq 3$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

۴

۳

۲

۱

(هاری پلور)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{|2x-3| - |2x+3|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{-(2x-3) - (2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{-4x} = \frac{-3}{2}$$

(سابان - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۵۰ تا ۱۵۳)

۴

۳

۲

۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \cos\left(\pi \left[\frac{x}{3}\right]\right) = \cos\left(\pi \left[\frac{3^+}{3}\right]\right) = \cos \pi = -1 \\ f(3) = \cos\left(\pi \left[\frac{3}{3}\right]\right) = \cos \pi = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \cos\left(\pi \left[\frac{x}{3}\right]\right) = \cos\left(\pi \left[\frac{3^-}{3}\right]\right) = \cos 0 = 1 \end{array} \right.$$

بنابراین تابع در  $x = 3$  پیوستگی راست دارد.

(مسئله - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کیان کریمی خراسانی)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)} = \frac{+1}{0^+} = +\infty \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x) - f(x-4)} = +\infty$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کیا مقدس نیاک)

در همسایگی  $x = 3$ ، صورت مقداری مثبت دارد و چون حاصل حد  $+\infty$  شده است، باید مخرج نیز در همسایگی  $x = 3$  مقداری مثبت داشته باشد و از طرفی  $x = 3$  ریشه آن باشد، پس  $x = 3$  ریشه مضاعف آن است؛ در نتیجه:

$$(x-3)^2 = x^2 + ax + b + 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 + ax + b + 1$$

$$\Rightarrow a = -6, b + 1 = 9 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a + b = -6 + 8 = 2$$

(دیفرانسیل - ص ۵۰ و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱

(کاظم اجلالی)

اگر  $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر  $\frac{2}{1-x}$  منفی هستند و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1-x} = 0$  یعنی در

$+\infty$ ، تابع  $y = \left[ \frac{2}{1-x} \right]$  با تابع  $y = -1$  برابر است؛ در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ \frac{2}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x+1) = -\infty$$

(دیفرانسیل - ص ۵۰ و پیوستگی: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴

۳

۲

۱



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f(x)}(\sqrt{f(x)} - 1)}{(1 - \sqrt{f(x)})(1 + \sqrt{f(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{f(x)}}{1 + \sqrt{f(x)}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(جهانبفش نیکنام)

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{-x+1}{(f \circ f)(x) - 2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴ و ۷۸ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^f + 2x - 1}{(2a - 1)x^f + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^f}{(2a - 1)x^f} = \frac{a}{2a - 1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a = 2$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عمید علیزاده)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - x}{x^2 + ax + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ :مجانب افقی}$$

در نتیجه نقطه  $A = (-1, 3)$ ، محل برخورد مجانب‌های نمودار این تابع

است. اگر نقطه  $O$  مبدأ مختصات باشد، داریم:

$$|OA| = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{10}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{x(1-x)}} = 2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{1}{x(1-x)}} = 2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0$$

پس یا گزینه «۱» صحیح است یا «۳».

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2^{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2^{-x^2} = 2^{-\infty} = 2^{0^-} = 1$$

اما همواره  $\frac{1}{2x^2} < 1$  است؛ بنابراین گزینه «۳» صحیح است.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر  $y = mx + h$  مجانب مایل این تابع باشد، داریم:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}}}{x} = 1$$

$$h = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x\left(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x\left(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - 1\right)\left(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} + 1\right)}{\left(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x \sin \frac{1}{x}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل: } y = x - \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - سر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴ ✓

۳

۲

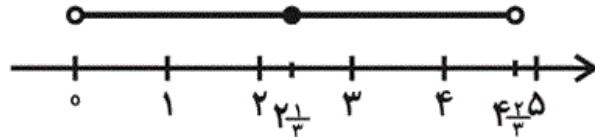
۱

$$\text{مرکز} = \frac{2a - 1 + \frac{b}{6}}{2} = \frac{7}{3} \Rightarrow 2a + \frac{b}{6} = \frac{17}{3} \quad (1)$$

بازه‌ای به مرکز  $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$  اگر شامل چهار عدد صحیح باشد، این اعداد باید

۱، ۲، ۳ و ۴ باشند. پس بیش‌ترین شعاع ممکن برای این بازه مطابق شکل

زیر برابر است با:



$$\Rightarrow 4\frac{2}{3} = \frac{b}{6} - 2a + 1 \Rightarrow \frac{b}{6} - 2a = \frac{11}{3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow b = 28$$

(مسابان - هر و پیوستگی توابع: صفحه ۱۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فریدون ساعتی)

-۱۰۲

می‌دانیم هر عدد حقیقی مانند  $z$  دارای عضو قرینه  $-z$  است، به‌طوری که

$$z + (-z) = 0$$

$$x = x + 0 = x + z + (-z) \quad \begin{array}{l} \text{خاصیت} \\ \text{شماره پذیر} \end{array} = (x + z) + (-z)$$

صفر عضو همانی      جمع است.

$$= (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱ تا ۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

عبارت  $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

اگر  $k$  گنگ باشد،  $\sqrt{k}$  نیز گنگ است، پس  $\sqrt{k+1}$  و در نتیجه  $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$  نیز

گنگ هستند. بنابراین  $1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$  نیز گنگ است.

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:

در گزینه (۱) قرار دهید  $k = \sqrt{2}$ .

در گزینه (۳) قرار دهید  $k = \sqrt{2} + 1$ .

در گزینه (۴) قرار دهید  $k = (\sqrt{3} + 1)^2$ .

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱ تا ۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سیرمعمودر رضا اسلامی)

$$\frac{a+50}{99} = \frac{b}{11} \Rightarrow a+50 = 9b$$

با توجه به این که  $a+50$  باید مضرب ۹ باشد و  $0 \leq a \leq 9$ ،

بنابراین  $a = 4$  است.

$$a = 4 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = 10$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ و ۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به تعریف قدر مطلق، یعنی:  $|x| = \max\{x, -x\}$  داریم:

$$|2x - 5| < 1 \rightarrow \left| x - \frac{5}{2} \right| < \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{5}{2}, r = \frac{1}{2} \rightarrow a + r = 3$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مدرک کل صفات)

$$x > a > 0 \Rightarrow x + a > 0$$

$$b > -x \Rightarrow x + b > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x > a \Rightarrow x - a > 0 \\ 0 > b \Rightarrow -b > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - a - b > 0$$

$$\Rightarrow A = x + a + x + b - x + a + b = x + 2a + 2b$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ و ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

خطوط داده شده هر دو شامل قطرهای دایره هستند و محل تقاطع آنها مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow O(1,1)$$

$$\Rightarrow |OA| = R \Rightarrow \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2} = 1$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه درون دایره، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است. بنابراین اگر نقطه  $O$  مرکز دایره باشد، آنگاه وتر مورد نظر بر پاره‌خط  $OA$  عمود می‌باشد. اگر خط  $d$  شامل این وتر باشد، داریم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow \text{مرکز دایره: } O(2, -2)$$

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{3 - (-2)}{1 - 2} = -5 \Rightarrow m_d = \frac{1}{5}$$

$$d \text{ معادله خط: } y - 3 = \frac{1}{5}(x - 1) \xrightarrow{\times 5} 5y - 15 = x - 1$$

$$\Rightarrow x - 5y + 14 = 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱ ✓



فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن، برابر شعاع دایره است.

$$R = \frac{|3(1) - 4(-1) + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مختصات کانون‌های بیضی  $F(۳,۰)$  و  $F'(-۳,۰)$  و نقطه  $M(۳,۲)$  روی

بیضی است. بنا به تعریف بیضی  $MF + MF' = ۲a$ ، بنابراین داریم:

$$\sqrt{(۳+۳)^2 + (۲-۰)^2} + \sqrt{(۳-۳)^2 + (۲+۰)^2} = ۲a$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۱۰} + ۲ = ۲a \Rightarrow a = \sqrt{۱۰} + ۱$$

از طرفی:

$$FF' = ۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳$$

بنابراین:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰} + ۱} = \frac{\sqrt{۱۰} - ۱}{۳}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در سهمی فقط یکی از ضرایب  $x^2$  و  $y^2$  باید صفر باشد:

$$\begin{cases} a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=3 \end{cases} \\ a^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$a=2$  در هر دو حالت مشترک است، یعنی هم ضریب  $x^2$  و هم ضریب

$y^2$  را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست. بنابراین تنها مقادیر  $a=3$  و

$a=-2$ ، جواب‌های مسئله هستند.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(معدی حاجی نژادریان)

۱۳۲ - گروه آزمایشی

$$|a+b+c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a.b + b.c + c.a)$$

$$\Rightarrow 0 = 4 + 4 + 16 + 2(a.b + b.c + c.a)$$

$$\Rightarrow 2(a.b + b.c + c.a) = -24$$

$$\Rightarrow a.b + b.c + c.a = -12$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: مشابه تمرین ۴ صفحه ۲۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

اگر قطرهای این چهارضلعی را با بردارهای  $u$  و  $v$  نمایش دهیم، آنگاه مساحت چهارضلعی (S) برابر است با:

$$S = \frac{|u \times v|}{2} = \frac{|u||v|\sin 30^\circ}{2} \Rightarrow 4 = \frac{(\sqrt{4a+16})(\sqrt{4+a}) \times \frac{1}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 16 = \sqrt{(4a+16)(a+4)} \Rightarrow 16 = 2\sqrt{(a+4)^2}$$

$$\Rightarrow 8 = |a+4| \Rightarrow \begin{cases} 8 = a+4 \Rightarrow a=4 \text{ ق.ق} \\ 8 = -a-4 \Rightarrow a=-12 \text{ ق.غ} \end{cases}$$

تذکر: به دلیل وجود  $\sqrt{a}$  در مؤلفه‌های بردار، لزوماً  $a \geq 0$  است.

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۲۵ تا ۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

در ماتریس گزینه «۱»، درایه‌های ستون اول  $(-۳)$  برابر درایه‌های ستون سوم هستند، پس حاصل دترمینان آن صفر است. در ماتریس گزینه «۲»،

درایه‌های سطر اول  $\left(\frac{a}{b}\right)$  برابر درایه‌های سطر سوم هستند، پس دترمینان

آن صفر است. دترمینان ماتریس گزینه «۴» را اگر از طریق بسط یا دستور ساروس محاسبه کنیم، حاصل برابر با صفر است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۸، ۱۲۱ و ۱۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا معادله خط  $L_1$  را به صورت پارامتری در می آوریم:

$$L_1: \frac{x+1}{2} = y = z-1 = t \Rightarrow L_1: \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases}$$

سپس معادله پارامتری خط  $L_1$  را در معادله متقارن خط  $L_2$  قرار می دهیم.

مقادیر به دست آمده از حل معادلات باید یکسان باشد. داریم:

$$\frac{2t-1}{6} = \frac{t-1}{2} = \frac{t+1}{m} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2t-1}{6} = \frac{t-1}{2} \Rightarrow t=2 \\ \frac{t-1}{2} = \frac{t+1}{m} \xrightarrow{t=2} m=6 \end{cases}$$

بنابراین به ازای  $m=6$ ، دو خط  $L_1$  و  $L_2$  متقاطع اند.

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه: صفحه های ۳۹ تا ۴۱)

۴

۳

۲

۱

$$y + 2z = 3 \Rightarrow y - 3 = -2z \Rightarrow \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}$$

بنابراین بردار هادی خط به صورت  $u = (0, 2, -1)$  است. با انتخاب نقطه

$B(4, 3, 0)$  روی این خط داریم:

$$\overline{BA} = (-2, 0, 1)$$

$$\overline{BA} \times u = (-2, -2, -4)$$

اگر فاصله نقطه از خط را با  $D$  نمایش دهیم، داریم:

$$D = \frac{|\overline{BA} \times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{4+4+16}}{\sqrt{0+4+1}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}} \Rightarrow D^2 = \frac{24}{5} = 4.8$$

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم مجموع درجات رئوس گراف، دو برابر تعداد یال‌های آن است. اگر مجموع درجات رئوس زوج را با  $A$  و مجموع درجات رئوس فرد گراف را با  $B$  نمایش دهیم، داریم:

$$2q = A + B \Rightarrow 64 = 54 + B \Rightarrow B = 10$$

با توجه به این که  $\Delta = 4$  است، پس این گراف نمی‌تواند رأسی با درجه بزرگ‌تر از ۴ داشته باشد، بنابراین رئوس فرد گراف فقط می‌توانند از درجه ۱ یا ۳ باشند. اعداد گزینه‌های دیگر بر اساس حالت‌های زیر امکان‌پذیر هستند:

- گزینه «۲»: گراف سه رأس درجه ۳ و یک رأس درجه ۱ داشته باشد.
- گزینه «۳»: گراف دو رأس درجه ۳ و چهار رأس درجه ۱ داشته باشد.
- گزینه «۴»: گراف یک رأس درجه ۳ و هفت رأس درجه ۱ داشته باشد.

(ریاضیات گسسته-گراف؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳

۲

۱ ✓



یک مسیر  $a \rightarrow b$  : مسیر به طول ۱

۳ مسیر  $a \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow b$  : مسیر به طول ۲

۶ مسیر  $a \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow b$  : مسیر به طول ۳

۶ مسیر  $a \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1} \rightarrow b$  : مسیر به طول ۴

بنابراین تعداد کل مسیرها برابر است با:

$$1 + 3 + 6 + 6 = 16$$

(ریاضیات گسسته-گراف؛ صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

۴

۳

۲

۱

(امیرحسین ابومحبوب)

۱۴۴- ۱۳۹۸

حداکثر اندازه یک گراف ناهمبند از مرتبه  $p$  مربوط به حالتی است که

گراف از یک رأس تنها و یک گراف کامل مرتبه  $p-1$  تشکیل شده باشد.

حال اگر گراف با حذف یک یال، ناهمبند شود، یعنی رأس تنها را با یک یال

به یکی از رئوس گراف  $K_{p-1}$  وصل کرده‌ایم. در این صورت، اندازه گراف

مفروض برابر است با  $1 + \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ . با فرض  $p = 10$  داریم:

$$q_{\max} = \frac{9 \times 8}{2} + 1 = 37$$

(ریاضیات گسسته-گراف؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

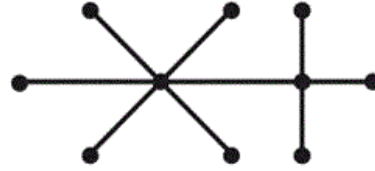
۴

۳

۲

۱

گراف همبند فاقد دور، درخت است. اگر این درخت به صورت شکل زیر رسم شود، آنگاه دارای بیشترین تعداد رأس درجه ۱ خواهد بود که این تعداد برابر ۸ است.



(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(بوار فاطمی)

طبق قضیه تقسیم،  $a = bq + r$  است که  $0 \leq r < b$  می‌باشد. بنابراین داریم:

$$96 = bq + 6 \Rightarrow 90 = bq \Rightarrow q = \frac{90}{b} \quad (b > 6)$$

یعنی  $b$  یکی از مقسوم‌علیه‌های ۹۰ می‌باشد که از ۶ بزرگ‌تر است.

$$b = 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90$$

پس برای  $b$ ، ۷ عدد طبیعی وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left. \begin{array}{l} p \mid 30! + 13p \\ p \mid 13p \end{array} \right\} \Rightarrow p \mid 30!$$

حال اگر  $30!$  را تجزیه کنیم، عامل‌های اول  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$

$23$  و  $29$  در آن وجود دارد که تعداد آنها برابر  $10$  است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های  $38$  و  $39$ )

۴

۳

۲

۱

$$80a'b'd = 21d^2(a'^2 - b'^2) \Rightarrow \frac{a'b'}{a'^2 - b'^2} = \frac{21d}{80}$$

$$\xrightarrow{d=2} \frac{a'b'}{a'^2 - b'^2} = \frac{21}{40} \quad (1)$$

$$(a', b') = 1 \Rightarrow \begin{cases} (a'b', a' + b') = 1 \\ (a'b', a' - b') = 1 \end{cases} \Rightarrow (a'b', a'^2 - b'^2) = 1$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{cases} a'b' = 21 \\ a'^2 - b'^2 = 40 \end{cases} \Rightarrow a' = 7, b' = 3$$

بنابراین داریم:

$$b = b'd = 3 \times 2 = 6$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های  $40$  تا  $43, 45$  و  $46$ )

۴

۳

۲

۱

فرض کنید ب.م.م این دو عدد برابر  $d$  باشد. در این صورت داریم:

$$(11n + 7, 9n + 2) = d$$

$$\left. \begin{array}{l} d | 11n + 7 \xrightarrow{\times 9} d | 99n + 63 \\ d | 9n + 2 \xrightarrow{\times 11} d | 99n + 22 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 41$$

بنابراین  $d = 1$  یا  $d = 41$  است. حال مقادیری از  $n$  را پیدا می‌کنیم که

$d = 41$  باشد.

$$41 | 9n + 2 \Rightarrow 9n + 2 \equiv 0 \pmod{41} \Rightarrow 9n \equiv -2 \equiv 39 \pmod{41} \xrightarrow{\div 3, (41,3)=1} 3n \equiv 13 \pmod{41}$$

$$\Rightarrow 3n \equiv 54 \pmod{41} \xrightarrow{\div 3, (41,3)=1} n \equiv 18 \pmod{41} \Rightarrow n = 41k + 18$$

بنابراین به ازای  $n = 18$  و  $n = 59$ ، دو عدد نسبت به هم اول نیستند و به

ازای  $90 - 2 = 88$  عدد طبیعی دو رقمی نسبت به هم اول می‌باشند.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳ و ۴۸ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر  $(a, b) = d$  باشد، آنگاه با توجه به این که معادله  $ax + by = 5$  در  $\mathbb{Z}$  دارای جواب است، پس  $d | 5$ . در نتیجه داریم:

گزینه «۱»:  $d | 5$  و  $5 | 10$ ، پس  $d | 10$  و در نتیجه معادله  $ax + by = 10$  قطعاً در  $\mathbb{Z}$  دارای جواب است.

گزینه «۲»:  $d = (a, b)$  است، پس  $d | a$  و در نتیجه معادله  $ax + by = a$  قطعاً در  $\mathbb{Z}$  دارای جواب است.

گزینه «۴»:  $d | a$ ، پس  $d | 3ab$  و در نتیجه معادله  $ax + by = 3ab$  قطعاً در  $\mathbb{Z}$  دارای جواب است.

اما وجود جواب برای معادله  $ax + by = 7$  قطعی نیست.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا ۳ رقم را به  $\binom{6}{3} = 20$  طریق انتخاب می‌کنیم (از میان ارقام ۱، ۲، ۳،

۴، ۵ و ۶). هر دسته از این ارقام را فقط به یک طریق می‌توان با توجه به

شرط مسئله در این عدد چهاررقمی قرار داد (توجه کنید که رقم صفر در

صورت انتخاب، باید در هزارگان قرار بگیرد که مجاز نیست). حال رقم

دهگان باقی می‌ماند که به ۴ طریق توسط ارقام باقی‌مانده می‌تواند پر شود.

بنابراین تعداد اعداد چهاررقمی با شرایط داده شده برابر است با:

$$20 \times 4 = 80$$

(ریاضی ۲- ترکیبیات: صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۹۰)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱