



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم - 10 سوال

۱۲۱- عدد پنج رقمی $\overline{7a32b}$ مضرب ۴۴ می‌باشد. بیش‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۲۲- اگر ۱۷ روز قبل شنبه باشد، ۲۳ روز بعد، چه روزی از هفته است؟

- (۱) چهارشنبه (۲) پنج‌شنبه (۳) جمعه (۴) شنبه

۱۲۳- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی که ۵ برابر آن به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

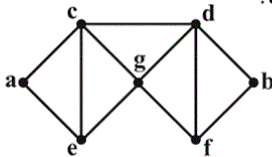
۱۲۴- روی خط $12x + 7y = 1379$ ، چند نقطه وجود دارد که مختصات آن اعداد طبیعی باشد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۱۲۵- در گرافی از مرتبه ۹ و اندازه ۳۲، δ چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۶- در گراف شکل مقابل، چند مسیر از رأس a به رأس b وجود دارد به گونه‌ای که از یال cd عبور نماید؟



- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۲۷- اگر گراف G ، $4 -$ منتظم و اندازه گراف \overline{G} برابر ۲۵ باشد، مرتبه گراف G کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

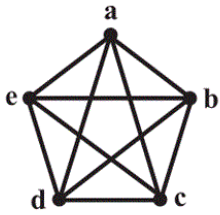
۱۲۸- با افزودن چند یال به گراف P_7 ، گراف کامل مرتبه ۷ حاصل می‌شود؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۱۲۹- در گرافی از مرتبه ۵، اگر $N_G(a) = \{b, c, d, e\}$ ، $N_G(b) = \{a, c, d, e\}$ و مجموعه‌های همسایه‌های باز رؤس c ، d و e ، هر

کدام ۲ عضو داشته باشند، آن‌گاه در این گراف، چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴



۱۳۰- گراف شکل زیر، چند زیرگراف دارد به گونه‌ای که در هر کدام از آنها، $q = 5$ و $deg(a) = 4$ باشد؟

- (۱) ۳
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۸

آمار و احتمال - 10 سوال

۱۴۱- میانگین سن ۱۱ بازیکن یک تیم فوتبال ۲۱ سال است. اگر دو بازیکن با سن‌های ۲۰ و ۱۸ سال از این تیم را با دو فرد مسن‌تر

جایگزین کنیم، میانگین تیم ۲۳ سال می‌شود. میانگین سن این دو عضو جدید کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۰

۱۴۲- در جدول فراوانی داده‌های آماری زیر، میانگین برابر ۱۰ است. فراوانی نسبی، متناظر با داده ۱۱ کدام است؟

داده‌ها	۵	$x+3$	۱۱	۲۵
فراوانی	۲	۳	x	۱

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۳- داده‌های آماری جدول زیر را روی نمودار دایره‌ای نشان داده‌ایم. اگر بزرگ‌ترین زاویه مرکزی این نمودار 108° باشد، آنگاه

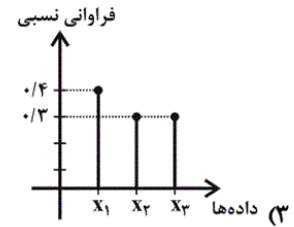
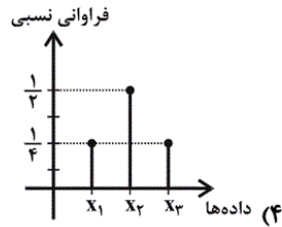
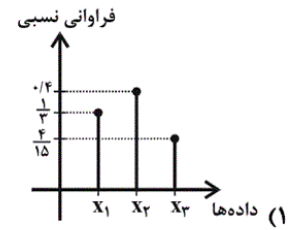
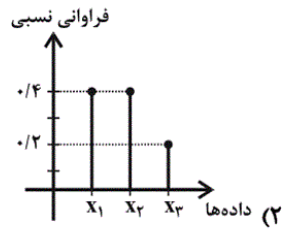
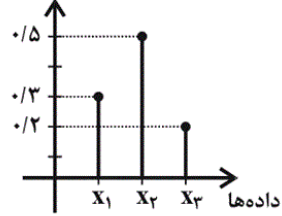
دسته	$0-2$	$2-4$	$4-6$	$6-8$	$8-10$
فراوانی	۳	x	۲	$x+1$	۲

مجموع فراوانی‌های نسبی دسته‌های دوم و سوم کدام است؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/3$ (۳) $0/6$ (۴) $0/5$

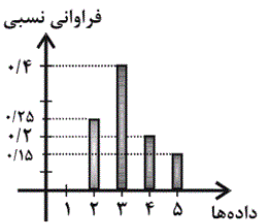
۱۴۴- نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی نسبی ۱۰ داده آماری به صورت زیر است. اگر داده‌های X_1, X_2, X_3, X_4 را به داده‌ها اضافه

کنیم، نمودار میله‌ای جدید کدام خواهد بود؟



۱۴۵- در یک کلاس ۲۰ نفری، آزمون با حداکثر امتیاز ۵ برگزار کرده‌ایم. نمودار میله‌ای عملکرد دانش‌آموزان این کلاس به صورت زیر

است. کدام گزینه صحیح است؟



(۲) میانگین < مد < میانه

(۱) مد < میانگین < میانه

(۴) میانگین = مد < میانه

(۳) میانگین < مد = میانه

۱۴۶- کدام گزینه درست نیست؟

(۱) اگر داده‌های آماری در عددی ضرب شوند، میانه هم در آن عدد ضرب می‌شود.

(۲) میانه تعدادی داده آماری، لزوماً در میان داده‌ها قرار ندارد.

(۳) میانگین تعدادی داده آماری، منحصر به فرد است.

(۴) اگر از داده‌های آماری مقداری کم کنیم، مد تغییر نمی‌کند.

۱۴۷- میانگین داده‌های X_1, X_2, \dots, X_n برابر ۲۶ است. اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این داده‌ها را برداریم و به جای آنها یک داده

که برابر قدر مطلق اختلاف آنها است را جایگزین کنیم، میانگین ۲۴ می‌شود. اگر تعداد داده‌های اولیه، نصف کوچک‌ترین داده

باشد، آنگاه کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

(۲) کوچک‌ترین داده ۲۴ است.

(۱) کوچک‌ترین داده ۱۲ است

(۴) بزرگ‌ترین داده ۴۸ است.

(۳) بزرگ‌ترین داده ۲۴ است.

۱۴۸- دو مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a و دو مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع b مفروض اند ($a > b$). اگر میانگین محیط

و مساحت آن‌ها به ترتیب ۱۸ و $۱۰\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۰
(۴) $۶\sqrt{3}$

$2x_i + 1$	۳	۵	۷	۹	۱۱
f_i	۲	۱	۳	۶	۲

۱۴۹- با توجه به جدول مقابل، میانگین داده‌های x_i ، چقدر از مد آنها کم‌تر است؟

- (۱) $\frac{5}{7}$
(۲) $\frac{5}{14}$
(۳) $\frac{3}{7}$
(۴) $\frac{9}{14}$

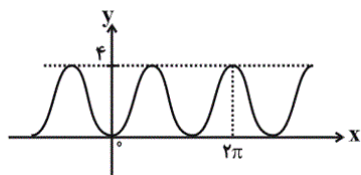
۱۵۰- اگر چارک سوم داده‌های $a+1, a+4, a+7, \dots, a+31$ ، برابر چارک اول همین داده‌ها باشد، آنگاه میانه این داده‌ها کدام

است؟

- (۱) ۱۶
(۲) ۱۷
(۳) ۱۸
(۴) ۱۹

حسابان ۲، مثلثات - ۹ سوال

۸۱- شکل زیر مربوط به کدام ضابطه می‌تواند باشد؟



$$y = -2 \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + 2 \quad (2)$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{2}{3}x\right) - 2 \quad (1)$$

$$y = 4 \sin\left(\frac{2}{3}x\right) \quad (4)$$

$$y = -2 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + 2 \quad (3)$$

۸۲- به ازای چند مقدار صحیح a ، دوره تناوب دو تابع $y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3$ و $y_2 = -3 \cos 3ax - 2$ یکسان است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۸۳- کدام یک، ریشه‌ای برای معادله $\cos 5x = 2 \cos^2 x - 1$ است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{7}$
(۲) $\frac{\pi}{3}$
(۳) $\frac{\pi}{7}$
(۴) $\frac{4\pi}{7}$

۸۴- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{3}{2}\cos x - \sin^2 x = 0$ کدام است؟

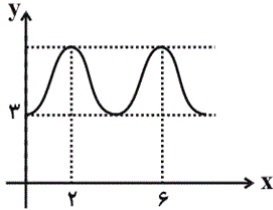
$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳)

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۱)

۸۵- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin^2(b\pi x)$ را نشان می‌دهد، $f(\frac{5}{3})$ کدام است؟



$\frac{13}{4}$ (۲)

$\frac{9}{4}$ (۱)

$\frac{17}{4}$ (۴)

$\frac{15}{4}$ (۳)

۸۶- معادله $\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{1}{12}$ در فاصله $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۸۷- معادله $\tan 2x = 3 \tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

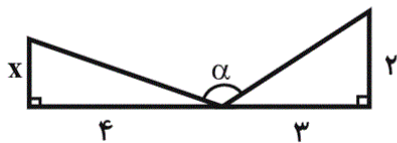
۹ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

۸۸- در شکل زیر اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ باشد، مقدار x کدام است؟



$\frac{27}{13}$ (۲)

$\frac{24}{17}$ (۱)

$\frac{19}{13}$ (۴)

$\frac{21}{17}$ (۳)

۸۹- حاصل $(1 - \sqrt{3} \tan 10^\circ)(\frac{\sqrt{3}}{3} + \tan 70^\circ)$ کدام است؟

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۹۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۳

۹۱- اگر $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۹۲- تابع $f(x) = \frac{3x^k - x^2 + 3}{2x^k + 4x^2 + 5}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ باشد، k کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k = 0$ (۲) $k \leq 1$ (۳) $k = 2$ (۴) $k \geq 3$

۹۳- در تابع $f(x) = \frac{[x+2]+k}{x-2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ باشد، محدوده k کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است).

- (۱) $-4 < k < -3$ (۲) $-3 < k < -2$
(۳) $k < -4$ یا $k > -3$ (۴) $k < -3$ یا $k > -2$

۹۴- نقطه $(-1, -2)$ یکی از محل های تلاقی مجانب های نمودار تابع $y = \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ است. $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱
(۳) -۲ (۴) ۲

۹۵- اگر $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+2}{x^2+ax+b} = -\infty$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) -۱۴ (۳) ۸ (۴) -۸

۹۶- اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b} = +\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2+2x+5}{bx^2+x^2+7}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) -3 (۴) $\frac{1}{3}$

۹۷- نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2-x}$ در اطراف مجانب قائم خود به کدام صورت است؟



۹۸- تابع $f(x) = \frac{x\sqrt{16-x^2}}{\sin x}$ چند مجانب قائم دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۹۹- نمودار تابع $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$ در اطراف مجانب افقی خود هنگامی که x به $\pm\infty$ میل می‌کند، به کدام صورت زیر است؟



۱۰۰- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{5x+1}{4x^2-1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{gof}(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) ۴ (۴) -4

هندسه 3- دوازدهم - 7 سوال

۱۱۴- دایره به معادله $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ از کدام نواحی دستگاه مختصات می‌گذرد؟

- (۱) فقط چهارم (۲) سوم و چهارم (۳) هر چهار ناحیه (۴) اول و چهارم

۱۱۵- معادله دایره‌ای که خطوط $x + y = 3$ و $2x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $3x + 4y + 5 = 0$ بر آن مماس باشد،

کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y + 5 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - x + 3y + 2 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - 5x + y = 2 \quad (3)$$

۱۱۶- نقطه $M = (2 - t, t)$ خارج دایره $x^2 + y^2 - 34 = 0$ قرار دارد. حدود t کدام است؟

$$t > 5 \text{ یا } t < -3 \quad (2)$$

$$-3 < t < 5 \quad (1)$$

$$t > 3 \text{ یا } t < -5 \quad (4)$$

$$-5 < t < 3 \quad (3)$$

۱۱۷- شعاع دایره‌ای که مرکز آن نقطه $O = (0, 1)$ باشد و از خط به معادله $3x + 4y + 11 = 0$ و تری به طول ۶ جدا کند، کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

۱۱۸- دایره‌ای از سه نقطه $A = (1, 2)$ ، $B = (1, -4)$ و $C = (3, 2)$ عبور می‌کند. کدام نقطه روی این دایره واقع است؟

$$(-1, -4) \quad (2)$$

$$(5, 0) \quad (1)$$

$$(0, 4) \quad (4)$$

$$(-4, 0) \quad (3)$$

۱۱۹- دو دایره $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ و $C_2: x^2 + y^2 - 12x - 2y + 36 = 0$ مفروض‌اند. معادله دایره‌ای که بر دایره‌های

C_1 و C_2 مماس خارج بوده و مرکز آن روی خط‌المركزین این دو دایره قرار داشته باشد، کدام است؟

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad (2)$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad (1)$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4} \quad (3)$$

۱۲۰- خروج از مرکز یک بیضی که یک رأس و کانون‌های آن، رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

هندسه 3- دوازدهم، **ماتریس، و کاربردها** - 3 سوال -

۱۱۱- کدام ماتریس می‌تواند مربع یک ماتریس 2×2 باشد؟

$$\begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

۱۱۲- اگر A ماتریسی اسکالر از مرتبه ۳ و $7 - |A| = |A - I|$ باشد، آنگاه مجموعه مقادیر $|A|$ کدام است؟

$$\{-1, -8\} \quad (۴)$$

$$\{1, 8\} \quad (۳)$$

$$\{1, -8\} \quad (۲)$$

$$\{-1, 8\} \quad (۱)$$

۱۱۳- حاصل $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b & b^2 \\ c & 0 & c^2 \end{vmatrix}$ ، همواره با کدام یک از دترمینان‌های زیر برابر است؟

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & ab \\ 0 & b & b^2 \\ c & 0 & c^2 \end{vmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & b & b^2 \\ ac & 0 & c^2 \end{vmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{vmatrix} c & a & a^2 \\ 0 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{vmatrix} c & a^2 & a \\ 0 & b^2 & b \\ c & 0 & c^2 \end{vmatrix} \quad (۳)$$

ریاضی پایه - دوازدهم - 7 سوال

۱۰۱- به ازای چند مقدار صحیح m ، معادله $x^2 + 4x + 3m^2 = 0$ ، دو ریشه متمایز دارد؟

$$3 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

۱۰۲- اگر عبارت $(m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره مثبت باشد، حدود m کدام است؟

$$-1 < m < 3 \quad (۴)$$

$$-1 < m < 2 \quad (۳)$$

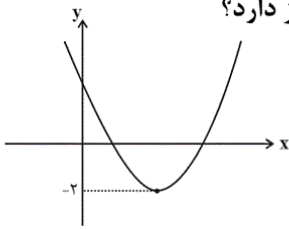
$$1 < m < 3 \quad (۲)$$

$$-2 < m < 1 \quad (۱)$$

۱۰۳- اگر $x=1$ بین مقادیر دو ریشه معادله $x^2 + kx + 2k = 0$ قرار داشته باشد، محدوده k کدام گزینه زیر می باشد؟

- (۱) $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ (۲) $(\frac{1}{3}, +\infty)$ (۳) $(-\infty, \frac{1}{3})$ (۴) $(-\infty, -\frac{1}{3})$

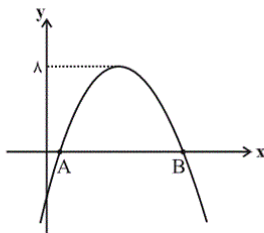
۱۰۴- در شکل روبه‌رو سهمی $y = p(x)$ رسم شده است. معادله $p'(x) - 2p(x) - 8 = 0$ چند جواب متمایز دارد؟



- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۱۰۸- نمودار $y = -2x^2 + ax + b$ به صورت مقابل است. اندازه قطعه‌ای که نمودار روی محور x ها

ایجاد می‌کند، (یعنی طول پاره خط AB) کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۳

۱۰۹- اگر نمودار سهمی $y = mx^2 + (m+4)x + (2-m)$ دقیقاً از سه ناحیه مختصاتی عبور کند، حدود m کدام است؟

- (۱) $(-1, 3]$ (۲) $(0, 2]$ (۳) $(1, 3]$ (۴) $(0, 3]$

۱۱۰- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) $4\sqrt{10}$ (۳) ۱۶۰ (۴) $5\sqrt{6}$

ریاضی پایه - دوازدهم، جبر و معادله - 3 سوال

۱۰۵- مجموع مربعات ریشه‌های معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ برابر $\frac{65}{16}$ است. مقدار m^2 کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۶ (۳) ۲۵ (۴) ۴

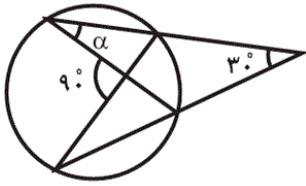
۱۰۶- هر یک از ریشه‌های معادله $x^2 - ax + a - 4 = 0$ ، نصف ریشه‌های معادله $x^2 - bx - 2x - b = 0$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۰۷- با ۲ واحد انتقال افقی سهمی $y = x^2 + ax + b$ به سمت راست، رأس آن در نقطه $(3, -4)$ قرار می‌گیرد. مجموع جواب‌های معادله $y = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۳۱- در شکل زیر، اندازه α کدام است؟



(۲) 45°

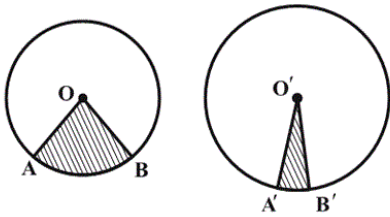
(۱) 30°

(۴) 75°

(۳) 60°

۱۳۲- در شکل زیر مساحت دو قطاع رنگی با هم برابر است. اگر $\widehat{AOB} = 80^\circ$ و $\widehat{A'O'B'} = 20^\circ$ باشد، طول کمان AB چند برابر

طول کمان $A'B'$ است؟ (O و O' مراکز دایره‌ها هستند).



(۱) ۰/۵

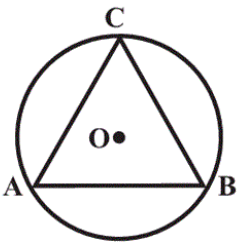
(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

۱۳۳- در شکل زیر $\widehat{A} = 70^\circ$ و $\widehat{B} = 50^\circ$ است. از نقطه O (مرکز دایره) بر اضلاع AB، AC و BC به ترتیب عمودهای OP،

OQ و OR رسم می‌شود. کدام مورد درست است؟



(۲) $OQ > OR > OP$

(۱) $OP > OR > OQ$

(۴) $OQ > OP > OR$

(۳) $OP > OQ > OR$

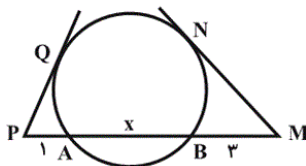
۱۳۴- در شکل زیر، اگر اندازه مماس MN دو برابر اندازه مماس PQ باشد، x کدام است؟

(۱) ۴

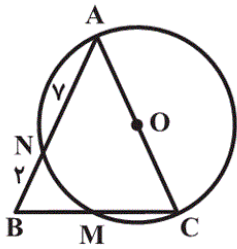
(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷



۱۳۵- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین است ($AB = AC$)، $AN = 7$ ، $BN = 2$ و O مرکز دایره است. اندازه قاعده BC کدام است؟



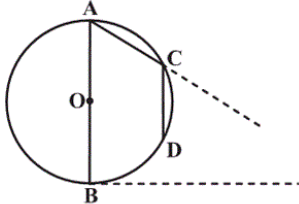
۴/۸ (۲)

۴ (۱)

۷/۲ (۴)

۶ (۳)

۱۳۶- در دایره زیر، O مرکز دایره است. وتر CD موازی با AB و به اندازه نصف آن، رسم شده است. اگر از B مماسی بر دایره رسم کنیم، امتداد وتر AC ، این مماس را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟



30° (۲)

15° (۱)

60° (۴)

45° (۳)

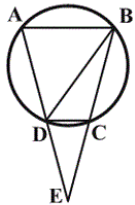
۱۳۷- از نقطه M واقع در بیرون دایره $C(O, 6)$ ، مماس $MT = 4\sqrt{6}$ و قاطع MAB را نسبت به دایره رسم می‌کنیم که A نزدیک‌ترین نقطه برخورد قاطع با دایره نسبت به M است. اگر $MA = 8$ ، آنگاه فاصله O تا AB کدام است؟

$2\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۱)

$4\sqrt{2}$ (۴)

$3\sqrt{3}$ (۳)



۱۳۸- در شکل زیر $AB \parallel CD$ ، $\hat{E} = \widehat{BDC}$ و $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ است. اندازه زاویه BCD کدام است؟

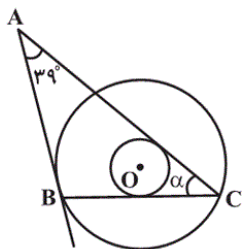
112° (۲)

108° (۱)

120° (۴)

116° (۳)

۱۳۹- دو دایره هم‌مرکز مطابق شکل، مفروض‌اند. پاره‌خط‌های AC و BC بر دایره کوچک‌تر مماس‌اند و پاره‌خط AB در نقطه B بر دایره بزرگ‌تر مماس می‌باشد. اندازه α کدام است؟



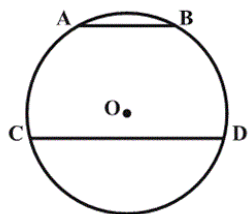
32° (۲)

30° (۱)

36° (۴)

34° (۳)

۱۴۰- در شکل زیر، شعاع دایره برابر $4\sqrt{7}$ و $AB \parallel CD$ است. اگر فاصله مرکز دایره تا وتر AB ، 5 برابر فاصله مرکز دایره تا وتر



CD و $CD = 3AB$ باشد، طول وتر AB کدام است؟

(۲) $4\sqrt{2}$

(۱) $4\sqrt{3}$

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(هومن نورائی)

۱۲۱-

با توجه به آن که $44 = 11 \times 4$ می‌باشد، پس لزوماً عدد $7a32b$ هم مضرب ۴ و هم مضرب ۱۱ است. داریم:

$$\overline{7a32b} \equiv 7a3 \times 100 + 2b \equiv 2b \equiv b + 20 \equiv b \equiv 0$$

$$\Rightarrow b = \{0, 4, 8\}$$

$$\overline{7a32b} \equiv 0 \Rightarrow b - 2 + 3 - a + 7 \equiv 0 \Rightarrow b - a \equiv -8 \equiv 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow -a \equiv -8 \Rightarrow a \equiv 8 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a + b = 8 \\ b = 4 \Rightarrow 4 - a \equiv -8 \Rightarrow a \equiv 12 \equiv 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 6 \\ b = 8 \Rightarrow 8 - a \equiv -8 \Rightarrow a \equiv 16 \equiv 6 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 14 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۴

۳

۲

۱

(هومن نورائی)

۱۲۲-

شنبه را مبدأ و متناظر با صفر در نظر می‌گیریم. از طرفی از ۱۷ روز قبل تا ۲۳ روز بعد، ۴۰ روز فاصله وجود دارد و باقی‌مانده ۴۰ بر ۷ برابر با ۵ است. در نتیجه داریم:

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

بنابراین ۲۳ روز بعد، پنج‌شنبه خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه ۲۴)

۴

۳

۲

۱

اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$5x + 9 \equiv 0 \Rightarrow 5x \equiv -9 \equiv -9 + 4 \times 11 \Rightarrow 5x \equiv 35$$

$$\xrightarrow[\substack{\div 5 \\ (5, 11) = 1}]{11} x \equiv 7 \Rightarrow x = 11k + 7 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی با انتخاب $k = 8$ حاصل می‌شود. در این صورت داریم:

$$x = 11 \times 8 + 7 = 95 \longrightarrow = 14 = \text{مجموع ارقام}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ مشابه تمرین ۱۷ صفحه ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$12x + 7y = 1379 \Rightarrow 12x \equiv 1379 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = 7k$$

$$\Rightarrow 12 \times 7k + 7y = 1379 \Rightarrow y = 197 - 12k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7k > 0 \Rightarrow k \geq 1 \\ 197 - 12k > 0 \Rightarrow 12k < 197 \Rightarrow k \leq 16 \end{cases}$$

بنابراین $1 \leq k \leq 16$ است، یعنی ۱۶ نقطه با مختصات طبیعی روی این خط وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌توانیم این گراف را گراف کامل (K_4) در نظر بگیریم که ۴ یال آن را برداشته‌ایم. در گراف K_4 درجه تمام رئوس برابر ۸ است. اگر این ۴ یال را از یک رأس برداریم، حداقل مقدار δ به دست می‌آید که برابر با $8 - 4 = 4$ است.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

هر مسیر از رأس a به رأس b که از یال cd عبور کند، از ۳ بخش (از رأس a به رأس c ، یال cd و از رأس d به رأس b) تشکیل شده است. از رأس a به رأس c ، ۳ مسیر موجود است که در صورت انتخاب هر یک از مسیرهای ac یا aec ، از رأس d به رأس b می‌توان از هر یک از ۳ مسیر db ، dfb و $dgfb$ استفاده نمود ولی در صورت انتخاب مسیر $aegc$ ، تنها یکی از دو مسیر db و dfb ، بین دو رأس d و b امکان پذیر است. بنابراین تعداد مسیرهای موجود از رأس a به رأس b که شامل یال cd باشند، برابر است با:

$$2 \times 3 + 1 \times 2 = 8$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هومن نورائی)

$$q(G) + q(\bar{G}) = q(K_p) \Rightarrow \frac{4p}{2} + 25 = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} - \frac{4p}{2} = 25 \Rightarrow p(p-1) - 4p = 50$$

$$\Rightarrow p(p-5) = 50 = 10 \times 5 \Rightarrow p = 10$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علیرضا شریف‌فطیپی)

تعداد یال‌های گراف P_n ، برابر $n-1$ است، پس مطابق شکل زیر، گراف P_7 دارای ۶ یال است.



تعداد یال‌های گراف K_7 ، برابر $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ است، بنابراین باید

$$21 - 6 = 15 \text{ یال به این گراف اضافه کرد تا به گراف کامل تبدیل شود.}$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

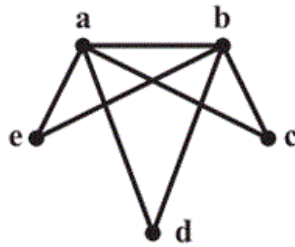
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علیرضا شریف فطیعی)



مطابق تعریف مجموعه همسایه‌های باز یک رأس، نمودار گراف مطابق شکل روبه‌رو است:

این گراف ۳ دور به طول ۳ دارد که عبارت‌اند از:

abca, abda, abea

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱

(علیرضا شریف فطیعی)

چون درجه رأس a مساوی ۴ است، پس در هر یک از زیرگراف‌های مورد نظر، رأس a با ۴ یال به رئوس b، c، d و e متصل است (تمام این زیرگراف‌ها لزوماً از مرتبه ۵ هستند). در این صورت از ۶ یال باقی‌مانده در گراف صورت سؤال، یکی باید به دلخواه انتخاب شود که در نتیجه ۶ زیرگراف با مشخصات داده‌شده قابل رسم است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۴

۳

۲

۱

(کیان کریمی فراسانی)

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{11}}{11} = 21 \xrightarrow{\substack{x_1=18 \\ x_2=20}} 38 + x_3 + \dots + x_{11}$$

$$= 21 \times 11 = 231 \Rightarrow x_3 + \dots + x_{11} = 193$$

میانگین سن دو فرد جدید را \bar{y} می‌گیریم. در این صورت حاصل جمع سن

آنها $2\bar{y}$ است. پس:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = 23 \Rightarrow \frac{2\bar{y} + x_3 + \dots + x_{11}}{11} = \frac{2\bar{y} + 193}{11} = 23$$

$$\Rightarrow 2\bar{y} + 193 = 253 \Rightarrow 2\bar{y} = 60 \Rightarrow \bar{y} = 30$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۴

۳

۲

۱

(روح انگیز جلیلیان)

$$\bar{x} = 10 \Rightarrow \frac{2 \times 5 + 3(x+3) + 11x + 25}{2+3+x+1} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{14x + 44}{6+x} = 10 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین داریم: $\frac{x}{6+x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ فراوانی نسبی داده ۱۱

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۴ تا ۸۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(کیان کریمی خراسانی)

بزرگ‌ترین زاویه مرکزی، مربوط به داده با فراوانی $x+1$ یا با فراوانی ۳

است. پس داریم:

حالت اول: بیش‌ترین فراوانی برابر $x+1$ باشد.

$$\frac{x+1}{8+2x} = \frac{108^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{10} \Rightarrow 24+6x = 10x+10 \Rightarrow x = 3/5$$

که قابل قبول نیست زیرا فراوانی‌ها اعدادی طبیعی‌اند.

حالت دوم: بیش‌ترین فراوانی برابر ۳ باشد.

$$\frac{3}{8+2x} = \frac{3}{10} \Rightarrow x = 1$$

 ۴ ۳ ۲ ۱

(مسئله کورسری)

$$\frac{f_1}{10} = 0/3 \Rightarrow f_1 = 3$$

با افزودن X_1 و X_1 ، فراوانی جدید داده X_1 برابر ۵ می‌شود. $f'_1 = 5$

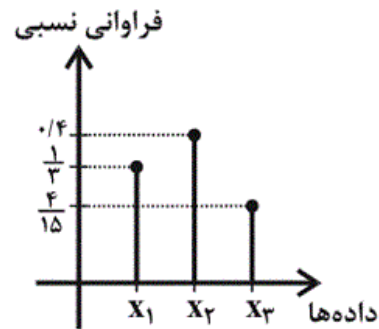
به همین ترتیب:

$$\frac{f_2}{10} = 0/5 \Rightarrow f_2 = 5 \xrightarrow{\text{با افزودن } X_2} f'_2 = 6$$

$$\frac{f_3}{10} = 0/2 \Rightarrow f_3 = 2 \xrightarrow{\text{با افزودن } X_3 \text{ و } X_3} f'_3 = 4$$

تعداد داده‌های جدید برابر $15 = 10 + 2 + 1 + 2$ است. پس داریم:

$$\frac{f'_1}{15} = \frac{1}{3}, \frac{f'_2}{15} = \frac{6}{15} = 0/4, \frac{f'_3}{15} = \frac{4}{15}$$



(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = 0/25 \times 2 + 0/4 \times 3 + 4 \times 0/2 + 5 \times 0/15 = 3/25$$

مد نیز داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد. بنابراین ۳، مد داده‌ها است.

۰/۲۵ داده‌ها یعنی ۵ داده برابر ۲ و ۰/۴ آنها یعنی ۸ داده برابر ۳ است.

بنابراین داده‌های دهم و یازدهم، هر دو برابر ۳ هستند و در نتیجه میانگین

آنها که همان عدد ۳ است، میانه داده‌ها می‌باشد.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ تا ۹۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(آرش ریمی)

اگر از داده‌های آماری مقداری کم کنیم، از مد نیز آن عدد کم می‌شود.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ تا ۹۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 26 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = 26n$$

فرض کنیم x_1 کوچک‌ترین و x_n بزرگ‌ترین داده باشد. در این صورت:

$$\frac{(x_n - x_1) + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} = 24 \Rightarrow \frac{26n - 2x_1}{n-1} = 24$$

$$\Rightarrow 26n - 2x_1 = 24n - 24 \Rightarrow 2x_1 = 2n + 24 \Rightarrow x_1 = n + 12$$

از طرفی $n = \frac{x_1}{2}$. بنابراین: $x_1 = \frac{x_1}{2} + 12 \Rightarrow \frac{x_1}{2} = 12 \Rightarrow x_1 = 24$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱

$$\text{میانگین محیطها} = \frac{3a + 3a + 3b + 3b}{4} = \frac{3}{2}(a + b) = 18$$

$$\Rightarrow a + b = 12$$

$$\text{میانگین مساحتها} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \right) = 10\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 80$$

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a^2 + b^2 = 80 \end{cases} \xrightarrow{b=12-a} a^2 + (12-a)^2 = 80 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\Rightarrow a^2 - 12a + 32 = 0 \Rightarrow (a-8)(a-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8 \Rightarrow b = 4 \\ a = 4 \Rightarrow b = 8 \end{cases}$$

چون $a > b$ است، پس مقدار $a = 8$ قابل قبول می باشد.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه های ۸۴ تا ۸۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا میانگین داده‌های $2x_i + 1$ که برابر $2\bar{x} + 1$ است را از جدول به دست

$$2\bar{x} + 1 = \frac{6 + 5 + 21 + 54 + 22}{14} = \frac{54}{7} \Rightarrow \bar{x} = \frac{47}{14}$$

می‌آوریم:

از طرفی در داده‌های $2x_i + 1$ ، مد برابر ۹ است. پس در داده‌های x_i ، مد

برابر است با:

$$2x + 1 = 9 \Rightarrow x = 4$$

پس اختلاف مد و میانگین برابر است با:

$$4 - \frac{47}{14} = \frac{56}{14} - \frac{47}{14} = \frac{9}{14}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۱۴ تا ۹۱)

۴

۳

۲

۱

داده‌ها یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a + 31 = a + 1 + (n-1) \times 3$$

$$\Rightarrow 30 = 3(n-1) \Rightarrow n-1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

تعداد داده‌ها برابر ۱۱ است (عددی فرد است)، بنابراین داده ششم (داده

وسط) میانه داده‌ها است. میانه ۵ داده اول یعنی داده سوم، چارک اول و میانه

۵ داده آخر یعنی داده نهم، چارک سوم است. بنابراین $Q_1 = a + 7$ و

$$Q_3 = a + 25 \text{ است و داریم:}$$

$$a + 25 = 3(a + 7) \Rightarrow a + 25 = 3a + 21 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه میانه داده‌ها برابر است با:

$$Q_2 = a + 16 \xrightarrow{a=2} Q_2 = 18$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسئله مصطفی ابراهیمی)

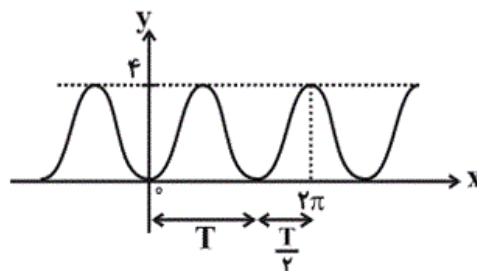
ضابطه مورد نظر می‌تواند $y = -a \cos bx + c$ باشد که $a > 0$ است.

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{4 - 0}{2} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

به علاوه با توجه به شکل، $T + \frac{T}{2} = 2\pi$ است، در نتیجه:

$$\frac{3T}{2} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3}$$



از طرفی می‌دانیم دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2}$$

چون نمودار تابع $y = \cos x$ نسبت به محور y متقارن است، هر دو مقدار قابل قبول‌اند.

$$\Rightarrow y = -2 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + 2$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(ظاهر) (استانی)

$$y_1 = -r \sin(a^r + r)x + r : T_1 = \frac{r\pi}{|a^r + r|}$$

$$y_2 = -r \cos rax - r : T_2 = \frac{r\pi}{|ra|}$$

$$\xrightarrow{T_1=T_2} |a^r + r| = |ra|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^r + r = ra \Rightarrow a^r - ra + r = 0 \\ | a^r + r = -ra \Rightarrow a^r + ra + r = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a-r) = 0 \\ (a+1)(a+r) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1, 1, -r, r$$

(مسائل ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سید عادل مسینی)

$$\cos \Delta x = r \cos^r x - 1 = \cos r x \Rightarrow \Delta x = rk\pi \pm rx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} rx = rk\pi \Rightarrow x = \frac{rk\pi}{r} & ; k \in \mathbb{Z} \\ | rx = rk\pi \Rightarrow x = \frac{rk\pi}{r} & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه «۴» یعنی $\frac{4\pi}{r}$ در فرم جواب کلی معادله

است.

(مسائل ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سید عادل حسینی)

$$\frac{3}{2} \cos x - \sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(مسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سید عادل حسینی)

$$f(0) = a = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + \sin^2(b\pi x)$$

$$= 3 + \frac{1 - \cos 2b\pi x}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \cos 2b\pi x$$

با توجه به شکل دوره تناوب تابع f ، برابر $T = 6 - 2 = 4$ است؛ بنابراین داریم:

$$T = \frac{2\pi}{2\pi |b|} = \frac{1}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{4}$$

چون نمودار تابع $y = \cos x$ نسبت به محور y ها متقارن است، در علامت b تأثیری ندارد.

$$\Rightarrow f\left(\frac{5}{3}\right) = 3 + \sin^2 \frac{25\pi}{6} = 3 + \sin^2 \frac{\pi}{6}$$

$$= 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

(مسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳

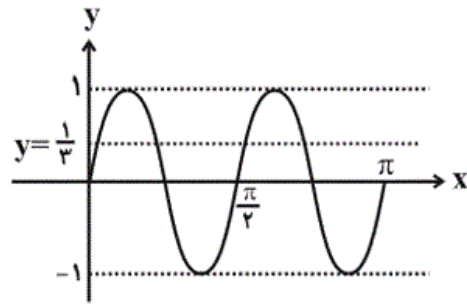
۲ ✓

۱

(جهانبفش نیکنام)

$$\begin{aligned}\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x &= \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x\end{aligned}$$

پس معادله به فرم $\sin 4x = \frac{1}{3}$ در می‌آید. نمودار $y = \sin 4x$ از انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ با ضریب ۴ به دست می‌آید. در این صورت مطابق شکل زیر، نمودارهای $y = \sin 4x$ و $y = \frac{1}{3}$ در ۴ نقطه تلاقی دارند، پس معادله دارای ۴ ریشه است.



(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مروضیه کو درزی)

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x$$

$$\Rightarrow \tan x \left(\frac{2}{1 - \tan^2 x} - 3 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \text{یا} \\ 1 - \tan^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan x = 0 \xrightarrow{\text{در بازه } (0, \frac{\Delta\pi}{2})} x = \pi, 2\pi \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{در بازه } (0, \frac{\Delta\pi}{2})} x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{در بازه } (0, \frac{\Delta\pi}{2})} x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{array} \right.$$

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳

۲ ✓

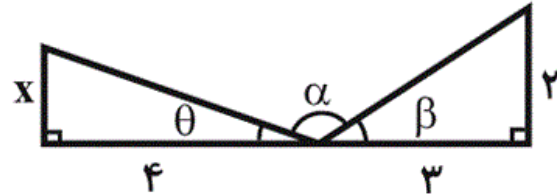
۱

(کلیه اجزای)

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - (\beta + \theta)$$

$$\tan \alpha = \tan(180^\circ - (\beta + \theta)) \Rightarrow \tan \alpha = -\tan(\beta + \theta)$$

$$-\frac{4}{3} = -\frac{\tan \beta + \tan \theta}{1 - \tan \beta \tan \theta}$$



از طرف دیگر با توجه به شکل $\tan \theta = \frac{x}{4}$ و $\tan \beta = \frac{2}{3}$ است.

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} = -\frac{\frac{2}{3} + \frac{x}{4}}{1 - (\frac{2}{3})(\frac{x}{4})} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{8 + 3x}{12 - 2x} \Rightarrow x = \frac{24}{17}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه ۱۴۲)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\tan 70^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 10^\circ}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan 70^\circ \tan 10^\circ = \tan 70^\circ - \tan 10^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 70^\circ - \tan 10^\circ - \sqrt{3} \tan 70^\circ \tan 10^\circ = \sqrt{3} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه ۱۴۲)

۴

۳

۲

۱

(یاسین سپهر)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(3x-2)(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-2}{x-2} = -\infty$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(گوروش شاه‌منصوریان)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(یاسین سپهر)

با توجه به قضایای مربوط به حد در بی نهایت، می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{4x^2} = -\frac{1}{4} & ; k \leq 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{6x^2} = \frac{1}{3} & ; k = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^k}{2x^k} = \frac{3}{2} & ; k \geq 3 \end{cases}$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

برای آن که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ باشد، باید حد چپ و راست f ، وقتی

$x \rightarrow 2$ هر دو برابر با $+\infty$ باشند، پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x+2]+k}{x-2} = \frac{[4^+]+k}{2^+-2} \\ &= \frac{4+k}{0^+} = +\infty \xrightarrow{\text{باید صورت کسر مثبت باشد.}} k+4 > 0 \Rightarrow k > -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x+2]+k}{x-2} = \frac{[4^-]+k}{2^- - 2} \\ &= \frac{3+k}{0^-} = +\infty \xrightarrow{\text{باید صورت کسر منفی باشد.}} 3+k < 0 \Rightarrow k < -3 \end{aligned}$$

از اشتراک دو شرط بالا، داریم: $-4 < k < -3$.

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

چون محل تلاقی مجانب‌های تابع $y = \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ ، نقطه $(-1, -2)$ می‌باشد،

تابع دارای مجانب‌های $x = -1$ و $y = -2$ است.

یعنی $x = -1$ ریشهٔ مخرج می‌باشد.

$$1 + b(-1)^2 = 0 \Rightarrow b = -1$$

از طرفی حد تابع در بی نهایت $\frac{a}{b}$ است. پس مجانب افقی $y = \frac{a}{b}$ می‌باشد.

بنابراین:

$$\frac{a}{b} = -2 \xrightarrow{b=-1} a = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ تا ۶۷ تا ۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ظاهر دانسانی)

حد صورت ۲- است، پس باید حد مخرج 0^+ شود. این در معادله درجه ۲ هنگامی امکان پذیر است که مخرج، ریشه مضاعف ۴- داشته باشد. یعنی $x^2 + ax + b = (x + 4)^2$ باشد.

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow a = 8, b = 16$$

$$\Rightarrow a - b = -8$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۴)

۴

۳

۲

۱

(آرژن ریمی)

مخرج کسر باید ریشه مضاعف ۳- $x = -3$ داشته باشد، یعنی به فرم $(x + 3)^2$ باشد؛

$$\Rightarrow x^2 + 2ax + b = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x + 5}{9x^3 + x^2 + 7} = \frac{1}{3}$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۴ و ۵۹ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱

(عارف سمیعی)

$$y = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

شکل نمودار گزینه «۳» این ویژگی را دارد.

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شهرابی)

ابتدا دامنه تعریف عبارت زیر رادیکال را مشخص می‌کنیم:

$$16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

مجانباتی قائم از بین ریشه‌های مخرج انتخاب می‌شوند. بنابراین باید

ریشه‌های مخرج را حساب کنیم.

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{-4 \leq x \leq 4} x = -\pi, 0, \pi$$

 $x = 0$ ریشه ساده صورت نیز است، پس مجانب قائم تابع f نمی‌باشد؛ زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$$

پس تابع دو مجانب قائم $x = \pm\pi$ را دارد.

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(ظاهر در استانی)

$$y = \frac{(x^2 - 4) - 5x + 8}{x^2 - 4} = 1 + \frac{8 - 5x}{x^2 - 4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$$

اما وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، $y > 1$ و وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $y < 1$ است که تنها شکل

نمودار گزینه «۲» این ویژگی را دارد.

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۴

۳

۲

۱

(میت سردار)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{gof}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{5x+1}{4x^2-1} = \frac{-\frac{3}{2}}{0^-} = +\infty$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

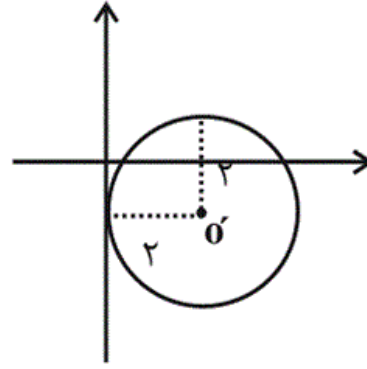
۴

۳

۲

۱

شعاع دایره ۲ و مرکز آن $O' = (2, -1)$ می‌باشد.



با توجه به شکل، دایره از نواحی اول و چهارم عبور می‌کند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

محل تلاقی دو خط $2x - y = 3$ و $x + y = 3$ ، مرکز دایره می‌باشد.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow O = (2, 1)$$

از طرفی فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، برابر شعاع دایره است.

$$r = \frac{|3(2) + 4(1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

پس معادله دایره عبارت است از:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه تمرین ۱ (ت) صفحه ۴۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فرض کنید $C(x,y) = 0$ ، معادلهٔ یک دایره باشد. در این صورت اگر

$M = (x_0, y_0)$ نقطه‌ای خارج این دایره باشد، آنگاه $C(x_0, y_0) > 0$ است.

در نتیجه داریم:

$$(2-t)^2 + t^2 - 34 > 0 \Rightarrow 4 + t^2 - 4t + t^2 - 34 > 0$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 4t - 30 > 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 15 > 0 \Rightarrow (t-5)(t+3) > 0$$

$$\Rightarrow t > 5 \text{ یا } t < -3$$

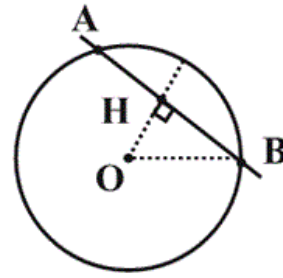
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۴۶)

۴

۳

۲ ✓

۱



ابتدا فاصله مرکز دایره تا خط را به دست می آوریم:

$$OH = \frac{|0 + 4 + 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

از طرفی عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می شود، آن وتر را نصف

می کند، پس چون طول AB برابر ۶ می باشد، $HB = 3$ است.

$$(OB)^2 = (OH)^2 + (HB)^2 \Rightarrow (OB)^2 = 3^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه کار در کلاس صفحه ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مرکز یک دایره، محل هم‌رسی عمودمنصف‌های همه وترهای آن دایره است. پس کافی است معادله عمودمنصف‌های دو وتر از میان سه وتر AB ، AC و BC را پیدا کرده و با هم تلاقی دهیم تا مرکز دایره پیدا شود. نقاط A و B طول یکسانی دارند، پس معادله عمودمنصف آنها به سادگی پیدا می‌شود. از طرفی نقاط A و C عرض یکسانی دارند، پس معادله عمودمنصف آنها نیز به سادگی پیدا می‌شود.

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 2) \\ B = (1, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف: } y = \frac{2 + (-4)}{2} \Rightarrow y = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 2) \\ C = (3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف: } x = \frac{1 + 3}{2} \Rightarrow x = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{محل تلاقی}} \text{ مرکز دایره: } O = (2, -1)$$

$$\text{شعاع دایره: } R = |OA| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

از بین نقاط داده شده، تنها مختصات نقطه $(5, 0)$ در معادله این دایره صدق می‌کند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه تمرین ۵ صفحه ۴۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

معادله دایره‌ها را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$R_1 = 2, O_1 = (2, 1)$$

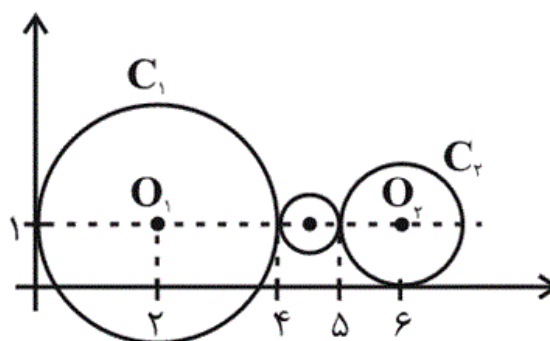
$$C_2: x^2 + y^2 - 12x - 2y + 36 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$R_2 = 1, O_2 = (6, 1)$$

با توجه به شکل، شعاع دایره مطلوب برابر با $\frac{1}{2}$ و مرکز آن نقطه $(\frac{9}{2}, 1)$

می‌باشد. لذا معادله این دایره عبارت است از:

$$(x - \frac{9}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$$



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

 ۴

 ۳

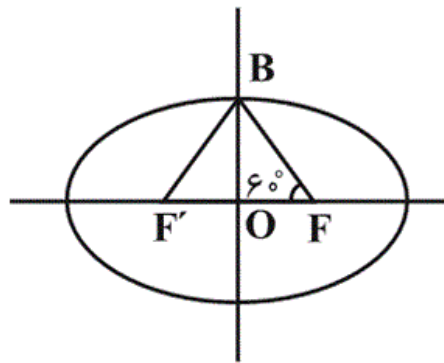
 ۲

 ۱

در مثلث BOF، $\hat{F} = 60^\circ$ است و داریم:

$$\tan \hat{F} = \frac{OB}{OF} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \sqrt{3}c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3c^2 + c^2 = 4c^2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$|A^2| = |A|^2 \geq 0$$

بنابراین ماتریس‌هایی که دترمینان آنها منفی است، نمی‌توانند ماتریس A^2 باشند.

دترمینان ماتریس‌های داده شده برابر است با:

$$\text{گزینه «۱»}: 5 \times 3 - (-8)(-8) = -49$$

$$\text{گزینه «۲»}: (-5)(-3) - (-8)(-8) = -49$$

$$\text{گزینه «۳»}: (-5)(-3) - 8 \times 8 = -49$$

$$\text{گزینه «۴»}: 5(-3) - 8(-8) = 49$$

بنابراین تنها ماتریس گزینه «۴» می‌تواند مربع یک ماتریس باشد.

تذکر: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(کیوان دارابی)

$$A = \begin{bmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & k \end{bmatrix} \Rightarrow A - I = \begin{bmatrix} k-1 & \circ & \circ \\ \circ & k-1 & \circ \\ \circ & \circ & k-1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A - I| = |A| - \gamma \Rightarrow (k-1)^3 = k^3 - \gamma$$

$$\Rightarrow k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = k^3 - \gamma \Rightarrow 3k^2 - 3k - 6 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow (k-2)(k+1) = 0 \Rightarrow k = 2 \text{ یا } k = -1$$

$$|A| = k^3 \Rightarrow |A| = 2^3 = 8 \text{ یا } |A| = (-1)^3 = -1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کیوان دارابی)

اگر ابتدا a را از سطر اول فاکتور گرفته و سپس در ستون اول ضرب کنیم،

داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \circ & b & b^2 \\ c & \circ & c^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \circ & b & b^2 \\ c & \circ & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ \circ & b & b^2 \\ ac & \circ & c^2 \end{vmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\Delta = 16 - 12m^2; \Delta > 0 \rightarrow 16 - 12m^2 > 0 \rightarrow m^2 < \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \pm 1, 0 \text{ : اعداد صحیح این بازه}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید بعفری کافی آبار)

$$(m+2)x^2 - 2mx + 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \\ \Delta < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m+2) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 4(m^2 - m - 2) < 0 \Rightarrow 4(m+1)(m-2) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < m < 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 < m < 2$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۸ تا ۹۱)

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

معادله باید دو جواب داشته باشد، یعنی $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta = k^2 - 8k > 0 \Rightarrow k < 0 \text{ یا } k > 8 \quad (1)$$

حال برای اینکه $x = 1$ ، بین دو ریشه قرار بگیرد، علامت عبارت موردنظر به

ازای $x = 1$ ، مخالف علامت ضریب x^2 باشد؛ یعنی:

$$(1)^2 + k(1) + 2k < 0 \Rightarrow 3k + 1 < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} k \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$p^2(x) - 2p(x) - 8 = 0 \Rightarrow (p(x) - 4)(p(x) + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x) = 4 \\ p(x) = -2 \end{cases}$$

با توجه به شکل سهمی $p(x)$ ، مشاهده می‌شود که این سهمی خط افقی

$y = 4$ را در ۲ نقطه قطع می‌کند، پس معادله $p(x) = 4$ ، ۲ جواب دارد.

همچنین خط افقی $y = -2$ بر سهمی مماس است. بنابراین معادله

$p(x) = -2$ یک جواب دارد.

در نتیجه این معادله ۳ جواب دارد.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم مختصات رأس یک سهمی به صورت $S(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است، پس:

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\Delta}{4a} \xrightarrow{a=-2} \lambda = \frac{-\Delta}{-8} \rightarrow \Delta = 64$$

از طرفی $|AB| = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ یعنی؛

$$\Rightarrow |AB| = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

نمودار $y = ax^2 + bx + c$ وقتی از سه ناحیه عبور می‌کند که دو ریشه هم

علامت داشته باشد یا یکی از ریشه‌ها صفر باشد؛ یعنی $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} \geq 0$ در

این مسئله داریم:

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{2-m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2 \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+4)^2 - 4m(2-m) > 0 \Rightarrow 5m^2 + 16 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{سه‌می} \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3)$$

$$\frac{(1) \cap (2) \cap (3)}{\longrightarrow} m \in (0, 2]$$

(مسئله ۱- پیر و معارله: صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\alpha + \beta = 6 \quad , \quad \alpha\beta = 4$$

$$A = \alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta} \rightarrow A^2 = \alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow A^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

$$= (\alpha + \beta)((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = 6(36 - 12) + 16$$

$$= 160 \Rightarrow A = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

(ریاضی ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲

۱

(یاسین سپهر)

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشند. مجموع

مربعات ریشه‌های این معادله به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{7}{2} = \frac{65}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow m^2 = 9$$

(مسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲

۱

فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $x^2 - ax + a - 4 = 0$ و x_1 و x_2

ریشه‌های معادله $x^2 - bx - 2x - b = 0$ باشند. پس $\alpha = \frac{x_1}{2}$ و

$$\text{لذا: } \beta = \frac{x_2}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \alpha\beta &= \frac{x_1 x_2}{4} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b+2}{2} \\ a-4 = -\frac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 2 \\ 4a + b = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

(مسئله ۱- پیچ و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

کافی است نقطه $(۳, -۴)$ را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ انتقال

دهیم تا رأس سهمی $y = x^2 + ax + b$ به دست آید؛ بنابراین نقطه

$(۱, -۴)$ رأس اولیه سهمی بوده است. حال چون طول رأس سهمی، میانگین

صفرهای آن است، مجموع جوابهای معادله $y = ۰$ به سادگی به دست

می آید:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = ۱ \Rightarrow x_1 + x_2 = ۲$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

و حسابان ۱- پیر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

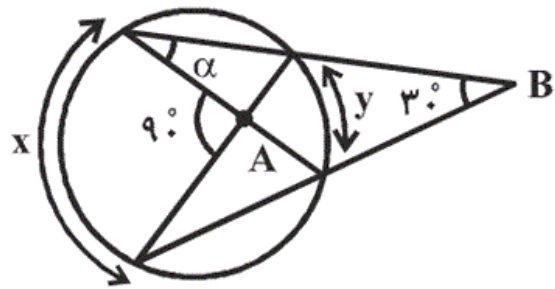
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مطابق شکل اگر اندازه دو کمان مشخص را x و y بگیریم، داریم:



$$\begin{cases} \widehat{A} = \frac{x+y}{2} = 90^\circ \\ \widehat{B} = \frac{x-y}{2} = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 180^\circ \\ x-y = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ \\ y = 60^\circ \end{cases}$$

زاویه α ، زاویه محاطی روبه‌رو به کمان y است، بنابراین:

$$\alpha = \frac{y}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

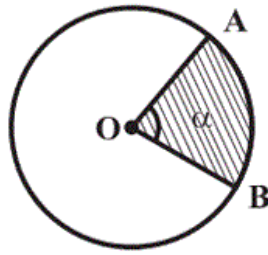
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، طول کمان AB برابر $L = \frac{\pi R \alpha}{180}$ و مساحت قطاع برابر



$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \text{ است.}$$

بنابراین با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{\pi R^2 \times 80^\circ}{360^\circ} \\ S' = \frac{\pi R'^2 \times 20^\circ}{360^\circ} \end{array} \right. \xrightarrow{S=S'} R^2 \times 80^\circ = R'^2 \times 20^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{R'^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{1}{2}$$

حال نسبت طول کمان AB به $A'B'$ را به دست می آوریم:

$$\frac{L_{AB}}{L_{A'B'}} = \frac{\frac{\pi R}{180^\circ} \times 80^\circ}{\frac{\pi R'}{180^\circ} \times 20^\circ} = \frac{R}{R'} \times 4 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = 70^\circ \\ \hat{B} = 50^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

می دانیم در یک مثلث، ضلع روبه رو به بزرگ ترین زاویه، بزرگ ترین ضلع است و ضلع روبه رو به کوچک ترین زاویه، کوچک ترین ضلع است. داریم:

$$\hat{B} < \hat{C} < \hat{A} \Rightarrow AC < AB < BC$$

می دانیم هر چه وتر بزرگ تر باشد، به مرکز دایره نزدیک تر است، پس:

$$OQ > OP > OR$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

$$\begin{cases} MN^2 = MB \times MA \\ PQ^2 = PA \times PB \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{MN}{PQ}\right)^2 = \frac{3 \times (x+3)}{1 \times (x+1)}$$

$$\xrightarrow{MN=2PQ} 4 = \frac{3x+9}{x+1} \Rightarrow 4x+4 = 3x+9 \Rightarrow x=5$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسن ممسکریمی)

پاره خط AM را رسم می‌کنیم. چون زاویه AMC محاطی روبه‌رو به قطر است، قائمه می‌باشد و چون در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نظیر قاعده است، پس $BM = MC$ می‌باشد. بنا به روابط طولی داریم:

$$BM \times BC = BN \times BA \Rightarrow x \times (2x) = 2 \times 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow BC = 6$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴

 ۳

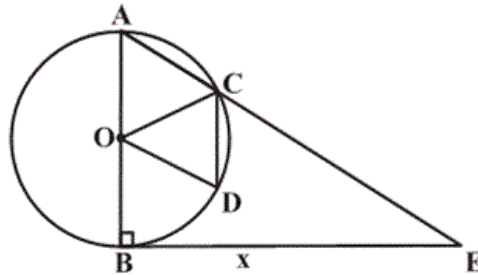
 ۲

 ۱

از O به C و D وصل می‌کنیم، در این صورت مثلث ODC متساوی‌الاضلاع است (طول CD نصف قطر دایره است، پس طول CD برابر شعاع دایره می‌باشد، یعنی $CD = OC = OD$ است). در نتیجه

$\widehat{AC} = \widehat{BD} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ پس $CD \parallel AB$ چون $\widehat{COD} = 60^\circ$

نتیجه $\widehat{AOC} = 60^\circ$ است. از طرفی $OA = OC$ است، پس مثلث OAC متساوی‌الاضلاع است و $\widehat{OAC} = 60^\circ$ می‌باشد.



از آن جا که شعاع دایره، بر مماس رسم شده از یک نقطه واقع بر دایره، در

آن نقطه عمود است، پس $\widehat{OBE} = 90^\circ$ و در نتیجه در مثلث ABE،

$\widehat{E} = 30^\circ$ است که همان زاویه میان امتداد AC و BE می‌باشد.

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۱، ۱۵ و ۱۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به شکل، طول OH مورد نظر است، داریم:

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow (4\sqrt{6})^2 = 8(8 + AB)$$

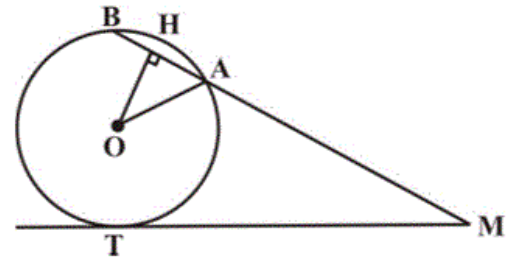
$$\Rightarrow 96 = 8(8 + AB) \Rightarrow AB = 4$$

اکنون با توجه به اینکه شعاع عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، می‌توانیم

بنویسیم:

$$OA^2 = OH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$



(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

اگر $\widehat{CD} = x$ باشد، آنگاه $\widehat{AB} = 2x$ است. از طرفی چون $AB \parallel CD$ ،

پس $\widehat{AD} = \widehat{BC} = y$ است و داریم:

$$\widehat{E} = \widehat{BDC} \Rightarrow \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \frac{2x - x}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow x = y$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 2x + y + x + y = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{x=y} 5x = 360^\circ \Rightarrow x = 72^\circ \Rightarrow y = 72^\circ$$

$$\widehat{BCD} (\text{زاویهٔ محاطی}) = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} = \frac{144^\circ + 72^\circ}{2} = \frac{216^\circ}{2} = 108^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow \widehat{D\hat{B}C} = \widehat{B\hat{D}C} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABD: \widehat{B\hat{D}C} = \widehat{A} + \widehat{A\hat{B}D} \text{ زاویه خارجی} \\ \widehat{A\hat{B}D} = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ زاویه ظللی} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 39^\circ + \frac{\widehat{BD}}{2}$$

از طرفی $\widehat{B\hat{C}D} = \frac{\widehat{BD}}{2}$ (زاویه محاطی) پس $\alpha = \frac{\widehat{BD}}{2}$ در نتیجه:

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 39^\circ + \alpha \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 51^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2 \times 51^\circ}{3} = 2 \times 17^\circ = 34^\circ$$

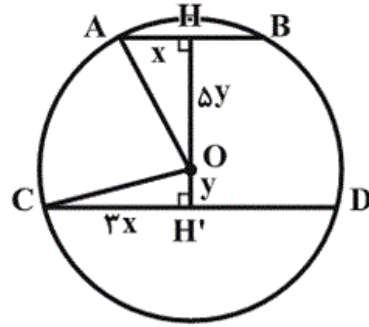
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱



مطابق شکل از مرکز دایره بر دو وتر AB و CD ، عمود رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس اگر از مرکز دایره به نقاط A و C وصل کنیم، با فرض $CD = 6x$ و $OH' = y$ داریم:

$$\Delta OHA : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = x^2 + 25y^2 \quad (1)$$

$$\Delta OH'C : OC^2 = CH'^2 + OH'^2 \Rightarrow R^2 = 9x^2 + y^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x^2 + 25y^2 = 9x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 8x^2 = 24y^2 \Rightarrow x^2 = 3y^2 \quad (*)$$

با توجه به این که $R = 4\sqrt{7}$ است، داریم:

$$R^2 = x^2 + 25y^2 \xrightarrow{(*)} 112 = 3y^2 + 25y^2 = 28y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$x^2 = 3y^2 = 3 \times 4 \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{طول وتر } AB = 4\sqrt{3}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه ۱۳)

۴

۳

۲

۱ ✓